Úloha IX.3 ... Vodotoč

10 bodů; (chybí statistiky)

Může se stát, že otočíte kelímek s vodou vzhůru nohama a voda nevyteče? Ano, jen to musíte provést dostatečně rychle! Při točení totiž na vodu působí odstředivá síla, která brání jejímu vytečení. Změřte experimentálně tíhové zrychlení g pomocí uvažování odstředivé síly.

Abyste mohli g změřit, připevněte provázek ke kelímku tak, aby z něj voda nevytekla, když ho roztočíte. Provázek by měl mít délku 1 m, abychom měření mohli porovnat se vzorovým. Poté kelímek roztočte jako řetízkový kolotoč tak, aby provázek svíral po celou dobu pohybu se zemí úhel přibližně 45°.

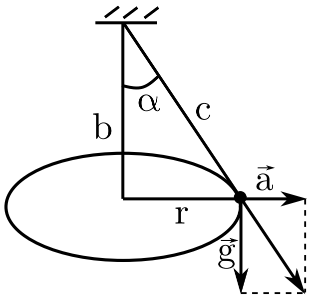
Změřte frekvenci, se kterou kelímkem točíte. Z této frekvence f si můžete spočítat úhlovou rychlost jako $\omega = 2\pi f$. Pomocí úhlové rychlosti si můžete dopočítat rychlost kelímku $v = \omega r$, kde r značí poloměr otáčení (ne délku provázku), a pomocí této rychlosti můžete získat odstředivé zrychlení jako $a = \omega^2 r = v^2/r$. Z náčrtu sil působících na kelímek pak lze vidět, že v situaci, kdy točíte vodou pod úhlem 45°, platí, že $a = g$.

Jakou frekvencí musíte oproti tomu točit, aby kelímek byl podle vás vodorovně? Existuje nějaká frekvence, kterou musíte točit, aby byl opravdu vodorovně?

Teorie

Než se začneme zabývat samotným experimentem, připomeňme si několik věcí, které budou náš točící se kelímek s vodou ovlivňovat. Naší hlavní úlohou je změřit tíhové zrychlení. To ovlivňuje pohyb všech věcí na Zemi. Například víme, že upustíme-li libovolný předmět, bude padat dolů právě s tímto tíhovým zrychlením (zanedbáme-li odpor prostředí), které se na jednotlivých místech zeměkoule může malinko lišit. V našich zeměpisných šířkách se obecně uvažuje, že $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ – tuto hodnotu si zapamatujme, bude se nám později hodit. Tíhové zrychlení se od gravitačního liší (ačkoliv málo) hlavně tím, že zohledňuje otáčení Země kolem vlastní osy.[1]

Druhým zrychlením, které je pro náš úkol důležité, je odstředivé zrychlení. To působí od středu kružnice, po níž se těleso pohybuje. Zadání nám napovídá, že jej můžeme vypočítat jako $a = \omega^2 r$, kde ω je úhlová rychlost a r poloměr zmíněné kružnice.[2]



Obr. 1: Náčrt vektorových sil působících na kelímek

[1] Více si o obou můžeš přečíst například zde: `http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/60-gravitacni-a-tihova-sila-resp-zrychleni`

[2] Více si o obou můžeš přečíst například zde: `http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/38-dostrediva-sila`

Nyní si představme, že provázek svíráme v ruce a kelímek roztočíme tak, aby opisoval nad zemí kružnici. Naše ruka bude na tuto soustavu působit silou, která bude kompenzovat jak tíhové, tak odstředivé zrychlení. Pokud navíc bude provázek svírat se svislým směrem 45°, víme, že v rozkladu sil uvidíme rovnoramenný trojúhelník. Obě odvěsny trojúhelníku jsou tedy stejně dlouhé a znázorňují gravitační (svislý směr) a odstředivou sílu (vodorovný směr). Z geometrických vlastností rovnoramenného trojúhelníku pak můžeme ještě vyčíst, po jak velké kružnici se vlastně náš kelímek bude pohybovat. Zadání nám říká, že provázek by měl mít 1 m, a když kelímek na jeho konci roztočíme, vidíme, že provázek je vlastně přepona rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Abychom zjistili délky stran v takovém trojúhelníku, můžeme si vypomoci Pythagorovou větou: $a^2 + b^2 = c^2$, kde c je přepona, jejíž délka je $c = 1\,\mathrm{m}$, a navíc a a b jsou odvěsny – v našem případě jsou stejně dlouhé a určují poloměr kružnice, tj. $a = b = r$. Pythagorovu větu si tedy pro náš případ můžeme přepsat do tvaru

$$1\,\mathrm{m}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2\,.$$

Ze získané rovnice si vyjádříme poloměr kružnice r:

$$r = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}^2}{2}} \doteq 0{,}71\,\mathrm{m} = 71\,\mathrm{cm}\,.$$

Pro snadnější provedení experimentu si tak můžeme například křídou na zem naznačit kružnici, která bude mít poloměr 71 cm, tj. průměr 142 cm (a nezapomeňme si také označit střed kružnice – nad ním se budeme snažit udržet naši ruku s provázkem).

Praktická rada

Upevnit vhodným způsobem kelímek k provázku může být komplikovaná záležitost. Pro účely našeho experimentu můžeme použít i plastovou PET láhev a provázek upevnit k jejímu hrdlu. Do láhve nalijeme vodu. Když ji poté uzavřeme, nemusíme se bát, že nám voda v případě nehody někam uteče. Je navíc dobré, aby PET láhev měla tvar co nejvíce podobný válci (nebo ji naplníme tak, aby voda byla pouze ve válcové části). U takové láhve se nám totiž bude poměrně jednoduše určovat těžiště – bude přesně v půlce mezi dnem a hladinou vody. Vzdálenost od těžiště k upevnění provázku totiž musíme započítat k délce provázku tak, aby až celková vzdálenost od těžiště k místu, kde provázek držíme, měla požadovaný 1 m.

Třetí odstavec zadání nám radí, co přesně měřit a jak vypočítat výsledek. Měřenou veličinou v našem experimentu je frekvence f, která udává, kolik otáček vykonal kelímek za nějaký časový interval. Můžeme tedy změřit, za jak dlouho opíše kelímek námi nakreslenou kružnici, tj. jednu periodu. To se však dělá obtížně, protože zapínání a vypínání stopek může nějaký čas trvat nebo nemusíme pohyb rukou provést dostatečně rovnoměrným způsobem. V našem přístupu jsme tedy neměřili jeden oběh/periodu, ale deset oběhů/period T_{10} a frekvenci f pak mohli vypočítat z formule

$$f = \frac{10}{\text{naměřený čas pro 10 oběhů}} = \frac{10}{T_{10}}\,.$$

Zadání nám dále radí, že získanou frekvenci můžeme použít k výpočtu úhlové rychlosti $\omega = 2\pi f$ a tuto úhlovou rychlost budeme dále dosazovat do rovnice pro odstředivé zrychlení $a = \omega^2 r$. Spojíme-li obě rovnice, můžeme psát

$$g = a = (2\pi f)^2 r = 4\pi^2 \frac{100}{T_{10}^2} \cdot 0{,}71\,\mathrm{m}\,.$$

Do takovéto rovnice můžeme přímo dosazovat naše naměřené hodnoty a po výpočtu získáme hodnotu tíhového zrychlení, kterou můžeme porovnat se zmíněnou hodnotou g.

Shrnutí aneb jak budeme při našem měření postupovat

1. Nakreslíme si na zemi kružnici a označíme si její střed.
2. PET láhev připevníme na provázek.
3. Provázek držíme nad středem kružnice a láhev roztočíme tak, aby opisovala nakreslenou kružnici.
4. Změříme čas deseti period.

Co je dobré si uvědomit? Jednotlivé kroky měření lze provést i jiným způsobem, zde pouze uvádíme příklad, jak lze k problému přistupovat.

Výsledky měření tíhového zrychlení

Abychom měření zpřesnili, celou soustavu natáčíme a čas poté odečítáme z videa v editoru. To se dělá velmi jednoduše – najdeme začátek měřeného úseku (např. když nám PET láhev mine střed obrazovky), odečteme čas, najdeme konec měřeného úseku (tatáž situace, ovšem o deset oběhů později), opět odečteme čas a rozdíl těchto časů je právě naším hledaným časem deseti period. Toto provedeme šestkrát a zapíšeme do tabulky 1.

$\frac{\text{start}}{\text{s}}$	$\frac{\text{konec}}{\text{s}}$	$\frac{\text{10 period}}{\text{s}}$
18,25	35,17	16,92
35,17	53,15	17,98
17,06	34,25	17,19
16,25	34,16	17,91
15,22	34,12	18,90
12,10	30,15	18,05
Průměr [s]		17,83
Směrodatná odchylka [s]		0,64

Tab. 1: Naměřené hodnoty period

Po dosazení do vztahu odvozeného v teorii můžeme nyní vypočítat hodnotu naměřeného tíhového zrychlení

$$\overline{a} = 4\pi^2 \frac{100}{(17{,}83\,\mathrm{s})^2} \cdot (0{,}71\,\mathrm{m}) \doteq 8{,}82\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zbývá určit celkovou nejistotu měření. Víme, že naše naměřené tíhové zrychlení se od skutečné hodnoty liší o $g - \overline{a} = 0{,}99\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, ovšem zda naše měření bylo úspěšné, nám ukáže až jeho nejistota. Bude-li větší, než rozdíl naměřené a skutečné hodnoty, skutečná hodnota tíhového zrychlení leží v naměřeném intervalu hodnot, což znamená, že naše měření úspěšné bylo. V opačném případě máme někde nejspíš systematickou chybu, která náš naměřený interval posunula.

Pro výpočet nejistoty celkového měření potřebujeme znát nejistotu periody (v tabulce 1) a nejistotu poloměru kružnice, který ve výpočtu také figuruje. Nejistota v určení druhé mocniny periody způsobí nejistotu cca 7,2 % (směrodatná odchylka představuje 3,6 % průměrné periody a to se zdvojnásobuje díky druhé mocnině). Nejistotu poloměru kružnice odhadneme na $\Delta r = 0{,}05\,\mathrm{m}$, což činí $\delta r \doteq 7{,}0\,\%$ (z poloměru 71 cm). Pro zjednodušení nyní předpokládejme, že nejistota r se na výsledku projevila lineárně, takže nejistoty sečteme a máme celkovou relativní nejistotu $\delta a \doteq 14{,}2\,\%$.[3] Celková nejistota zrychlení a činí tedy $u_a \doteq 1{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Můžeme tedy vidět, že se nám skutečná hodnota tíhového zrychlení vešla do intervalu a měření můžeme považovat za úspěšné.

Závěr

Naměřili jsme tíhové zrychlení $a = (8{,}82 \pm 1{,}3)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Do naměřeného intervalu spadá i hodnota skutečná, tedy měření bylo úspěšné. Největší nepřesnost mohlo způsobit samotné točení láhví na provázku nad kružnicí, protože kružnici o správném poloměru nikdy neopíšeme přesně. Odečítání času z videa ovšem měření značně zpřesnilo, protože při frekvenci snímků 30 fps je čas mezi jednotlivými snímky mnohem nižší než reakční čas člověka, tedy nejistotu způsobenou tímto můžeme zanedbat.

A co s tím vodorovným točením?

Z obrázku 1 můžeme pomocí trojúhelníkové podobnosti vyčíst vztah

$$\frac{a}{g} = \frac{r}{b}\,,$$

kde $b = \sqrt{c^2 - r^2}$, což pro změnu vypočteme Pythagorovou větou. Dosadíme

$$\frac{a}{g} = \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}$$

a můžeme rovnou číst jednoznačnou podmínku $r \neq c$, pro kterou byl náš model platný. Kdy by se poloměr kružnice mohl rovnat délce provázku? Právě v případě točení PET láhve vodorovně. Pokud byste (po dosazení známých veličin) rovnici vložili do programu na kreslení grafů, zjistíte, že kolem $r = 1$ začne graf prudce růst. To znamená, že pro dosažení vodorovného otáčení byste museli mít frekvenci ∞ otáček za sekundu, což není možné.

Ale jak je možné, že se vám mohlo povést nějakou frekvenci pro vodorovné otáčení přece jen naměřit, když jste láhev či kelímek roztočili bez zábran? To je prosté, milý Watsone. Za všechno můžou lidské reflexy. Co chceme? Točit vodorovně. Co tedy podvědomě udělá náš mozek? Posune ruku držící provázek o trošku níž na úroveň láhve. Alespoň na chvilku je to vodorovné. Když se láhev vzpamatuje a poklesne, udělá to mozek znovu, výchylky od vodorovného směru jsou zanedbatelné... Jsme spokojení, naměřili jsme frekvenci pro točení láhve vodorovně.

Navíc je třeba přiznat, že i naše teoretické výpočty nemusejí být úplně správné, protože bod úchytu provázku při rozpohybování rukou také nestojí přesně na místě, ale sám musí opisovat malou kružnici (bez toho by se vám žádný závěs ručně roztočit nepodařilo). Tím pádem bychom potřebovali ještě více proměnných pro úplné vystižení pohybu naší nádoby. V reálné situaci tedy nemůžeme vodorovný pohyb prakticky vyloučit.

[3] Jak nejistotu vypočítat naleznete podrobněji na našich stránkách v sekci Hokus Pokus.

Na tomhle příkladu je krásně vidět častý rozpor teorie s praxí – teorie započítá lecjaký vliv, ale na naše instinktivní jednání a spoustu dalších faktorů připravená nebývá. A uznejte sami – zbavit se podvědomých posunů ruky pro potřeby vědy není vůbec jednoduché.

Radka Štefaníková
radka@vyfuk.mff.cuni.cz

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.