Úloha VIII.2 ... Do nekonečna a ještě dál

10 bodů; (chybí statistiky)

Výfučí kosmická agentura (VKA), která loni úspěšně vypustila sondy Výfučkomut 1 a 2, si letos, jak už víme, mohla připsat i zásluhu na první lidské návštěvě planetky UCHO-373. Do konce tohoto roku však musí pracovníci VKA dokončit zatím nejrozsáhlejší projekt – návrh první mezihvězdné sondy Emise 1.

Let bude jednosměrný, avšak Emise 1 bude vysílat data zpět k Zemi až tehdy, když se ke svému cíli – obyvatelné planetě Proxima Centauri b – přiblíží na vzdálenost jedné tisíciny světelného roku.

Odhadněte a výpočtem zdůvodněte, jak dlouho může mezihvězdná cesta trvat a jak dlouho budeme čekat, než nám od sondy přijde zpráva. Uvažujte nějaký realistický způsob pohonu; sonda neunese vlastní motor a musíme ji tak urychlit už poblíž Země. Fantazii se meze nekladou. Potřebné údaje si dohledejte.

Tato úloha má mnoho správných řešení s velmi odlišnými výsledky, a tak je spíše váš postup tím, co jsme převážně hodnotili. Ke hvězdám je totiž možné se vydat řadou velmi odlišných technologií, které se liší jak v energetických nárocích, tak v dosažitelných rychlostech i zrychleních, a to i v případě, že sonda nenese motor s sebou. Čím pomaleji se mezi hvězdami pohybujeme, tím složitěji musíme naše odhady počítat, protože gravitační přitažlivosti startovní i cílové hvězdy (a případných blízko míjených planet) mají proměnlivý a výrazný vliv na rychlost sondy.

Jedno je však jisté – nikdy nepřekonáme rychlost světla (což je fakt, který považujeme za vám již známý): teorie relativity nám toto jasně zamezuje, což se projevuje tím, že kdyby se sonda blížila rychlosti světla, těžkla by a k jejímu dalšímu urychlení by bylo třeba stále větší množství energie. Tento jev se může zesilovat donekonečna a to stále rychleji tak, aby rychlost světla nebylo možné překročit. Ostatně sama sonda také nevydrží vše. Proto tedy doba příjmu signálu z cíle od doby vypuštění sondy musí být *vždy větší než* dvojnásobek vzdálenosti ve světelných rocích (sonda je omezena cestou tam rychlostí světla a pak cestou zpátky je omezen její signál, který se šíří právě světelnou rychlostí), což dává zhruba

$$t > 4{,}243\,\mathrm{r} + 4{,}243\,\mathrm{r} \doteq 8{,}486\,\mathrm{r}\,,$$

kde první sčítanec odpovídá době cesty světelnou rychlostí do oné vzdálenosti tisíciny světelného roku od hvězdy a druhý sčítanec odpovídá návratu zprávy z blízkosti Proximy Centauri k Zemi, resp. Slunci (vzdálenost Země – Slunce vytváří malou nepřesnost pouhých 0,001 6 % z jednoho světelného roku, proto tento rozdíl neuvažujeme). Dokud hodnota t ve vašem řešení nebyla menší než zde námi uvedená, nemohlo být vaše řešení úplně nesprávné.

Připomeňme si jen ještě pro úplnost (pokud bychom chtěli převádět na základní jednotky), že světelný rok je vzdálenost, kterou urazí světlo za jeden tzv. juliánský rok, který je dlouhý 365,25 dní po 86 400 sekundách. Po vynásobení rychlostí světla ($c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) dostáváme zhruba:

$$1\,\mathrm{ly} \doteq 9{,}460\,7 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,.$$

Nejprve tedy budeme v tomto vzorovém řešení počítat s technicky dnes dostupnými možnostmi mezihvězdného cestování (ty patří k těm nejpomalejším) a ukážeme si, co jsou to kosmické rychlosti. Poté již zapojíme trochu představivosti a naše výpočty zjednodušíme, protože budeme mít dostatečnou rychlostní rezervu. Proto následující sekce jsou nejdříve početně složitější a budou se postupně zjednodušovat.

Nejpomalejší cesta – s kosmickými rychlostmi

Máme celkem tři základní tzv. *kosmické rychlosti*. *První k. r.* nám říká, jakou rychlost bychom museli udělit tělesu na povrchu Země,[1] aby začalo Zemi obíhat po kruhové dráze.

Klasicky si tuto rychlost můžeme odvodit z rovnosti dostředivé (gravitační) a odstředivé síly při oběhu po zmíněné kruhové dráze:

$$\frac{GMm}{R_\mathrm{Z}^2} = \frac{mv^2}{R_\mathrm{Z}}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost centrálního tělesa (tedy $M = M_\mathrm{Z}$ je hmotnost Země), m hmotnost obíhajícího tělesa, R_Z poloměr Země, v rychlost tělesa (tedy $v = v_\mathrm{I}$ je první kosmická rychlost). Levá strana představuje známý *Newtonův gravitační zákon*. Po vynásobení R_Z, vydělení m a odmocnění získáme

$$v_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}}\,.$$

Máme tedy vztah pro první kosmickou rychlost (její hodnota je zhruba $7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$), což je rychlost tělesa na kruhové dráze těsně nad povrchem Země.

Druhá kosmická rychlost nám udává potřebnou rychlost k opuštění gravitačního pole Země (kdyby tedy byly Země a těleso ve vesmíru samy, rychlost tělesa by byla v nekonečnu nulová). Můžeme ji jednoduše odvodit ze zákona zachování mechanické energie (E_M):

$$E_\mathrm{M} = E_\mathrm{K} + E_\mathrm{P}\,,$$

kde položíme hodnotu $E_\mathrm{M} = 0$ (níže vysvětlíme) a v dané situaci tak platí:

$$-E_\mathrm{K} = +E_\mathrm{P}\,,$$

neboli: těleso má tak velkou kinetickou energii, že je schopno vyletět tak vysoko, že už na něj gravitační síla nebude působit (což je v onom nekonečnu). Jak ale lépe rozumět znaménku minus? Pozastavme se u toho ještě na chvíli.

Potenciální energii nemůžeme počítat podle známého vzorce $E_\mathrm{P} = mhg$, protože ten platí pro homogenní gravitační pole, tedy takové, které se s polohou nemění. Ve velkých vzdálenostech od Země to však již gravitační pole Země nesplňuje, neboť síla mění jak velikost (klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu Země) tak svůj směr (vždy míří do středu Země). Pro takovéto *radiální* (tj. šířící se od Země do všech směrů stejně) gravitační pole, kde gravitační síla je

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,,$$

definujeme potenciální energii jako

$$E_\mathrm{P} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}\,.$$

Možná vám přijde divné, jak může být energie záporná. Nulovou hladinu potenciální energie si totiž můžeme zvolit libovolně, u homogenního pole volíme obvykle právě povrch Země. Absolutní hodnota energie nás nezajímá tak jako její změny! U centrálního pole žádnou takovou

[1] Měřeno samozřejmě vůči středu Země a ne vůči povrchu obecně, protože povrch se sám pohybuje na každé zeměpisné šířce jinak rychle.

význačnou hladinu nemáme,[2] volíme tedy nulovou energii nekonečně vzdáleným tělesům (nekonečně vzdálená tělesa nebudou gravitací přitažena, a tak nezískají žádnou pádovou kinetickou energii, kterou bychom předtím ukládali do nějaké výchozí potenciální). Pro bližší tělesa je energie menší, tedy musí být záporná, a s narůstající vzdáleností se zvyšuje (zlomek $-1/r$ roste pro větší r), což na povrchu Země do omezené výšky přibližně odpovídá i nárůstu energie dle součinu mhg. Dostáváme tedy:

$$-\frac{mv^2}{2} = -\frac{GM_\mathrm{Z}m}{r}\,.$$

Vykrátíme m a vyjádříme rychlost:

$$v_\mathrm{II} = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}}\,.$$

Hodnota druhé kosmické rychlosti je zhruba $11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, nicméně tuto rychlost má těleso pouze u povrchu Země a během vzdalování postupně zpomaluje tak, aby jeho mechanická energie byla stále nula (celkové E_M se nemění). Uvažujeme zde pouze gravitační pole Země a zanedbáváme ostatní tělesa, například Slunce, které budeme uvažovat v následujícím případě.

Třetí kosmická rychlost vyjadřuje takovou rychlost, při které by se těleso dostalo z povrchu Země mimo Sluneční soustavu (kdyby tedy byly Sluneční soustava a těleso ve vesmíru samotné, byla by rychlost tělesa v nekonečnu nulová). Pokud zanedbáme gravitační síly a pohyb Země, potom se jedná o únikovou rychlost:

$$v''_\mathrm{III} = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}}\,,$$

kde M_S je hmotnost Slunce a a_Z velká poloosa Země (vzdálenost Země od Slunce). Všimněte si, že šlo pouze o aplikaci úvahy z minulé kosmické rychlosti na novou situaci. Země však obíhá kolem Slunce nemalou rychlostí, a proto ji musíme od únikové rychlosti odečíst (abychom získali relevantní výsledek pro sondu vypouštěnou z naší planety, kterou chceme vypouštět ekonomicky *po směru jejího oběhu kolem Slunce*, tj. aby měla větší „náskok“):

$$v'_\mathrm{III} = v''_\mathrm{III} - v_\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}} - \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}}\,,$$

kde jsme pro jednoduchost uvažovali, že Země obíhá Slunce po kruhové dráze. Hodnota takové rychlosti vychází přibližně $12{,}3\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$

Ještě jsme nezapočítali gravitační síly Země. Pro to můžeme použít úvahy, že sonda potřebuje kinetickou energii jak k úniku ze Země, tak ze Sluneční soustavy – jedinou možností je tyto energie prostě sečíst a dostat tak výslednou kinetickou energii a z ní rychlost vůči Slunci:

$$\frac{mv_\mathrm{III}^2}{2} = \frac{mv'^2_\mathrm{III}}{2} + \frac{mv_\mathrm{II}^2}{2}\,,$$

vydělíme hmotností sondy, zkrátíme dvojky a dostaneme:

$$v_\mathrm{III} = \sqrt{v'^2_\mathrm{III} + v_\mathrm{II}^2} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{2GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}}\,.$$

[2] Mohli byste navrhnout taktéž povrch Země, ale pak bychom měli problém s výpočtem u soustav více těles, například Země a Slunce.

Hodnota třetí kosmické rychlosti je zhruba $16{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ (vzhledem k Zemi). Ta nás zajímá nejvíce, jelikož je to minimální rychlost, při které je možné opustit Sluneční soustavu (úplně minimální není; to by byla, kdyby Proxima Centauri ležela v nekonečnu a ve vesmíru neexistovaly jiné objekty, tedy zanedbáváme například gravitační vliv ostatních planet, avšak rozdíl mezi těmito situacemi je zanedbatelný).

Jelikož však v minulosti (i v současnosti) bylo relativně těžké takové rychlosti dosáhnout hned u Země, využívá se tzv. *gravitační prak* (resp. *gravitační manévr*). Těleso prolétá v těsné blízkosti planet, čímž se rychlost vůči planetě nezmění, ale heliocentrická (vůči Slunci) rychlost ano, a to bez potřeby jakéhokoli paliva. Vypočítat takovou změnu rychlosti tělesa je však relativně těžká záležitost, proto se jí zabývat nebudeme. Je nicméně třeba zmínit, že právě těchto manévrů využilo všech pět sond, které kdy lidstvo vyslalo k úniku ze Sluneční soustavy a do mezihvězdného prostoru (i když bez jakéhokoli cíle mimo těles soustavy). Voyager 1, 2, Pioneer 10, 11 a New Horizons, ty všechny se už vydaly k sousedním hvězdám, ovšem rychlostí, která v absolutním měřítku příliš nepřevyšuje třetí kosmickou rychlost. Navíc sondy při vzdalování od Slunce nevyhnutelně zpomalují v souladu se zákonem zachování energie – nyní jediný Voyager 1 má vůči Slunci rychlost vyšší, než je 3. kosmická u Země vůči Zemi, a to $16{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ – pořád jde však o rychlost 3,5krát vyšší, než je 3. kosmická ve vzdálenosti od Slunce, ve které se Voyager nachází (>148 au),[3] a tak bude pokračovat. Tímhle tempem by (pokud by se ovšem pohyboval konstantní rychlostí a měl tam vůbec namířeno) překonal 4,243 ly za *více než 75 tisíc let* (dodatečný čas od dosažení cíle k přijetí signálu našimi prapotomky je pak už zanedbatelný).

Nejrychlejší cesta – okamžité zrychlení

To by tedy bylo k minulým letům mimo Sluneční soustavu, nyní se zaměříme na v budoucnu uvažované způsoby mezihvězdných letů. Klasická představa z počátků éry raket nás vede k tomu, že by snad mohlo být možné poblíž Země, přímo z povrchu Země, nebo alespoň v naší Sluneční soustavě nějakou metodou získat mnohem vyšší rychlost, aby byla cesta k Proximě podstatně zkrácena. Takový podnik ale vyžaduje obrovské množství energie.

Pokud by se například sonda pohybovala 90 % rychlosti světla, pak můžeme zanedbat gravitační vlivy okolí (tak rychlému tělesu hvězdy a planety změní trajektorii nepatrně) a vypočítat jednoduše čas cesty (mimo by bylo zanedbatelné pro odhad i to, že se musí sonda dostat k Proximě Centauri b na jednu tisícinu světelného roku, oproti její vzdálenosti, protože potom chyba našeho výpočtu je právě jen v řádu tisícin). Dostaneme jej tedy z prostého součtu času pohybu rovnoměrnou rychlostí a času šíření signálu:

$$t \approx \frac{d - 0{,}001\,\mathrm{ly}}{k \cdot c} + \frac{d - 0{,}001\,\mathrm{ly}}{c} = \frac{d - 0{,}001\,\mathrm{ly}}{k \cdot c} + 4{,}243\,\mathrm{r} \tag{1}$$

kde d je vzdálenost Proximy Centauri od Slunce (4,244 ly), c je rychlost světla ($1\,\mathrm{ly\cdot r^{-1}}$ neboli 1 světelný rok za rok), a k je podíl rychlosti světla, kterou sonda cestuje. V případě zmíněných 90 % je $k = 0{,}9$ a vychází $t \doteq 8{,}957\,\mathrm{r}$.

Musíme však zauvažovat, který druh pohonu by mohl dostatečnou energii za krátký čas poskytnout. Je zde omezení, že sonda nemůže nést svůj vlastní motor, což je smysluplné: nebudeme zde rozepisovat potřebné výpočty, ale postačí zmínka, že rakety, které by se dokázaly přiblížit rychlosti světla a spaliny by je urychlovaly na raketám typické několikanásobky rychlosti zvuku, by musely nést více paliva, než je hmotnost celé naší galaxie! Nadějí jsou obecně

[3] $1\,\mathrm{au} \doteq 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$, *astronomická jednotka*, střední vzdálenost Země od Slunce.

motory, které vypouštějí hmotu rychlostí významného zlomku rychlosti světla – potom nepotřebují tolik paliva. Pro naši sondu ale musíme uvažovat pohony, které ji urychlí „zvenčí“, tj. sonda se jimi nechá roztlačit, i když nejsou její vlastní součástí.

Jedním takovým by mohl být pohon, který získává energii díky anihilaci hmoty a antihmoty (kontakt hmoty a antihmoty vede k přímé přeměně na elektromagnetické záření, které na sondu může působit tlakem). Tuto energii jednoduše získáme z Einsteinova vztahu:

$$E = \eta m' c^2 \approx \frac{mv^2}{2}\,,$$

kde m' je celková hmotnost hmoty s antihmotou (za předpokladu, že máme stejné množství hmoty i antihmoty), c je rychlost světla a η je účinnost, se kterou dojde k předání energie sondě. Přibližná rovnost však platí jen při malých zlomcích rychlosti světla a také za předpokladu, že hmota a antihmota nejsou součástí sondy, ale jsou k ní „přivezeny“.

Při rychlosti blízké rychlosti světla by se začaly projevovat relativistické jevy, ale můžeme zde prozradit, že chyby ve výpočtech při 10 % rychlosti světla ještě nepřekračují pár procent a naše odhady tak ještě dávají smysl.[4]

Vztah (1) nám pro 10 % rychlosti světla udává celkový čas 46,673 r. Klasicky (tj. ne relativisticky) vypočítaná kinetická energie je pro malou sondu o hmotnosti 1 kg:

$$E_\mathrm{K} \approx \frac{m(0{,}1\cdot c)^2}{2} = \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}1\cdot(3\cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}))^2}{2} = 4{,}5\cdot 10^{15}\,\mathrm{J}\,,$$

což je energie, kterou dokáže poskytnout:

$$m = \frac{E_\mathrm{K}}{c^2} = \frac{4{,}5\cdot 10^{15}\,\mathrm{J}}{(3\cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} \doteq 0{,}050\,\mathrm{kg}$$

hmoty a antihmoty, tedy přesněji pouhých 25 g hmoty a k tomu 25 g antihmoty při 100% účinnosti.

Problém je, že skutečnou antihmotu, tedy „antiatomy“ složené z antiprotonů, antineutronů a pozitronového obalu, je velmi obtížné vytvořit, resp. je to možné, ale pouze ve velmi malém množství (v jednotkách „antiatomů“). Další pravděpodobně ještě větší problém je udržet antihmotu tak, aby neanihilovala s hmotou dříve, než potřebujeme. I když jsou to problémy řešitelné, jsou tu i realističtější cesty podobně rychlého získání energie...

Oblíbené je například využití vodíkových bomb nebo tradičních jaderných zbraní. Jde o možná nejlepší mírové využití těchto zařízení, protože dokáží uvolnit obrovské množství energie, které se dá například směrovat do velkých plachet a stínidel, které udělí sondě rychlost. Nejsilnější vodíková bomba, která kdy byla odpálena – sovětská *Car-bomba* roku 1961 – uvolnila energii odpovídající více než 2 kg přeměny hmoty na energii dle $E = m'c^2$, což mnohokrát převyšuje výše vypočítané nároky na energii.

---

[4] Pro zájemce můžeme prozradit, že správný vzorec, pro výpočet energie pohybujícího se tělesa ve speciální teorii relativity z hlediska statického pozorovatele (např. těch hvězd), se kterým se možná setkáte na střední škole, je takový, ve kterém místo hmotnosti m dosazujete tzv. *relativistickou hmotnost*: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, kde m_0 je hmotnost klidová.

Ekonomická cesta – dlouhé zrychlování

Další, též velmi známý a daleko více vědecky promyšlený návrh, je tzv. projekt *Breaktrough Starshot*. Jedná se o „flotilu“ asi tisíce centimetrových sond se 4 metry širokými plachtami, jež jsou poháněny polem pozemních laserů o výkonu asi 100 GW na každou sondu. Jedna by přitom měla hmotnost řádově 1 g (hmotnost plachty zatím není jistá). Světlo se od plachty odrazí z téměř 90 %, přičemž jak pohlcené, tak odražené světlo přispívají k urychlení plachty.

Fotony tedy nejprve do plachty vrazí, přičemž působí tlakem:

$$p_1 = \frac{I}{c} = \frac{P}{Sc}\,,$$

kde I je tzv. hustota světelného toku, kterou měříme ve wattech na metr čtvereční (v našem případě jde o výkon $P = 100\,\mathrm{GW}$ na nějakých $S = 4\,\mathrm{m^2}$). Tomuto vztahu můžete lépe porozumět například po přečtení našeho Výfučtení o Maxu Planckovi[5] či studiem vzorového řešení čtvrtého úkolu úlohy C z 2. série 8. ročníku,[6] na jehož konci se přímo možnost solárních plachetnic zmiňuje (pozor však na jiný význam symbolu P ve zmíněném textu).

Poté se fotony od plachty odrazí z 90 %, což vede k vzniku dalšího tlaku v opačném směru, tj. také do plachty:

$$p_2 = 0{,}9 \cdot p_1 = 0{,}9\frac{P}{Sc}\,.$$

Celkem je tlak na plachtu vyvíjený:

$$p = p_1 + p_2 = 1{,}9\frac{P}{Sc}\,.$$

Tento vztah můžeme pak přepočítat na tlakovou sílu násobením S a po dělení hmotností dostaneme zrychlení $a = 1{,}9P/(mc)$, které se pro výše zmíněné údaje pohybuje v řádech desítek tisíc $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (silně záleží na hmotnosti plachty).

Udává se, že takto lze sondu urychlovat až do vzdálenosti 1 au, z čehož si můžeme snadno přepočítat, že například pro zrychlení $20\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ to znamená nabrat rychlost více než 77 mil. $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (zhruba čtvrtina rychlosti světla) během ne o moc více než jedné hodiny. Tímto tempem by informace ze sondy u cílové destinace dorazily k nám dle vzorce (1) za *více než 20 let* a skutečně: předpokládaná doba mise Breakthrough Starshot se odhaduje na 20 až 30 let.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[5] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf
[6] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r8/s2/reseni2-7.pdf