Úloha VI.V ... zahradní

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček našel zahradní hadici o průřezu S_0. Zvedl ji do výšky h tak, aby byl výstupní otvor hadice vodorovně se zemí, a pustil jí proud vody s neznámou rychlostí v_0. Zjistil, že voda dostříkla do vzdálenosti l. Poté packou zakryl část hubice a voda dostříkla do čtyřikrát větší vzdálenosti.

1. *Jakou část hubice Výfuček zakryl? Jaká část by musela být odkryta, aby voda dostříkla 10krát dále než původně? Vodu uvažujme jako ideální kapalinu.*

2. *Po těchto pokusech žíznivý Výfuček obrátil hubici k nebi, načež se podivil, jak dlouho se k němu kapky vody vracely. Zvědavý však chtěl zkusit prodloužit tento čas a zadní packou ještě hadici stlačil, a zvýšil tak tlak u hubice o $\Delta p'$. Do jaké výšky H nad zemí voda vystoupala? Výfuček s hadicí nehnul žádným jiným způsobem.*

1. Při řešení úlohy si vzpomeneme na jeden ze zákonů zachování, přesněji na rovnici kontinuity. Nejdříve si ale popíšeme tok vody v okamžiku, kdy hadice není zakrytá. Ve výšce h vytéká voda rychlostí v_0. Abychom zjistili tuto rychlost, použijeme pohybové rovnice. Víme, že voda se ve svislém směru pohybuje volným pádem a pro danou vzdálenost bude platit $h = gt^2/2$, voda na zem tedy spadne za čas $t = \sqrt{2h/g}$. Po tuto dobu se ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrným pohybem a urazí vzdálenost $l = v_0 t$. Vyjádříme-li rychlost v_0 a dosadíme za čas t, získáme
$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$
Teď již sestavíme rovnici kontinuity. Zvolíme si dvě různá místa v toku trubice, první v libovolném místě uvnitř hadice a druhé v místě stlačení. Pro tyto různé úseky platí, že jejich objemové průtoky se rovnají. Jazykem matematiky
$$v_0 S_0 = Sv\,.$$
Stlačíme-li hadici na obsah S, zůstává doba pádu vody pořád stejná, tudíž voda musí urazit čtyřikrát větší vzdálenost za stejný čas. Z toho plyne, že rychlost při opuštění trubice musí být čtyřikrát větší, tedy $v = 4l\sqrt{g/(2h)}$. Dosazením do rovnice kontinuity získáme
$$l\sqrt{\frac{g}{2h}}S_0 = 4l\sqrt{\frac{g}{2h}}S$$
$$S_0 = 4S$$
$$S = \frac{S_0}{4}\,.$$
Výfuček nechal odkrytou čtvrtinu ústí hadice, tudíž zakryl $S_1 = (3/4) \cdot S_0$. Uděláme-li stejnou úvahu i u druhé otázky, je jasné, že Výfuček nechal odkrytou $S_2 = (1/10) \cdot S_0$.

2. K řešení této úlohy použijeme Bernoulliho rovnici. Znovu si určíme dvě různá místa, první u výtoku vody z hadice a druhé na vrcholu vodního proudu. Předpokládáme, že voda vystříkávající z hadice tvoří spojitý proud, který, dokud letí nahoru, se nerozděluje na kapičky (tento předpoklad je z naší každodenní zkušenosti splněn). Bernoulliho rovnice má tedy tento tvar (ϱ je hustota vody):

$$\frac{1}{2}\varrho v_0^2 + p_\mathrm{a} + \Delta p' + h\varrho g = p_\mathrm{a} + H\varrho g\,.$$

Na levé straně máme nejdříve rychlost výtoku vody v_0, atmosférický tlak p_a a tlak přidaný Výfučkovou tlapkou $\Delta p'$, dále nesmíme zapomenout, že Výfuček drží hadici ve výšce h nad zemí. Na pravé straně nám vypadla část s kinetickou energií, jelikož ve vrcholu vodního sloupce se voda zastavuje a padá zpět na zem. Dále má kolem sebe jenom atmosférický tlak p_a a většina energie se uchovává v potenciální energii ve výšce H. V rovnici se nám odečte atmosférický tlak p_a a následně vyjádříme výšku H

$$H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{\Delta p'}{\varrho g} + h\,.$$

K výsledné výšce přispívají čtyři faktory – původní rychlost vody, rozdíl tlaků $\Delta p'$, hustota vody ϱ a výška h, o kterou jsme hadici zvedli.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.