Úloha VI.3 . . . Eráta sténavá

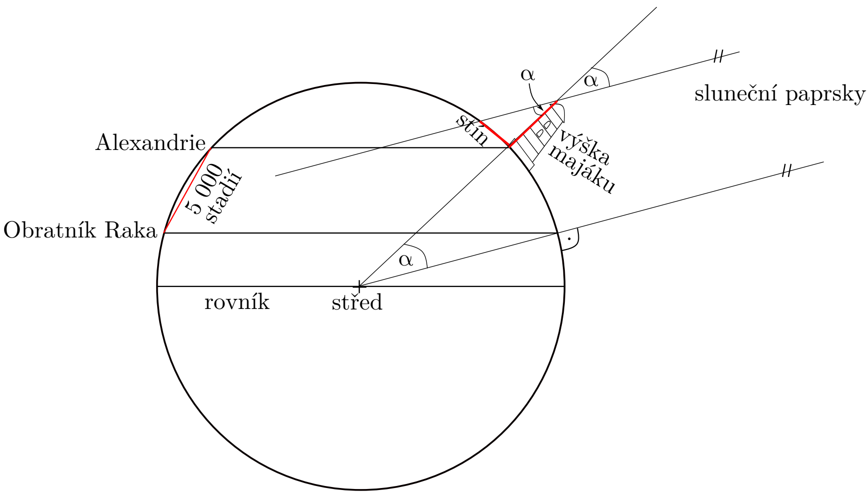
6 bodů; (chybí statistiky)

Marco a Robert se dostali do neobvyklé situace. Ředitel někdejší Alexandrijské knihovny, jistý Eratosthenés z Kyrény, jim zadal zvláštní úkol. Marca poprosil, aby odkrokoval pěšky 5 000 stadií z Asuánu do Alexandrie nehostinnou pouští (Marco šel celou cestu směrem na sever), zatímco Robert zůstal v Asuánu. V poledne v den letního slunovratu si Robert zapsal, že Slunce osvětluje dno hluboké studny a předměty nevrhají stíny. Marco si měl zapsat, jak dlouhý stín vrhá v poledne maják z Alexandrie na blízkém ostrově Faro, tehdy obdivovaný jako jeden ze sedmi divů světa.

Eratosthenés si původně myslel, že Země není tak velká, a očekával tedy, že když Marco dojde do své destinace, zjistí, že maják vrhá stejně dlouhý stín, jako je vysoký. Kdyby to tak bylo, jak velkou část obvodu zeměkoule by Marco obešel? Jak velký by tedy Země měla obvod v kilometrech?

Marco si ten den v poledne ale všiml, že maják vysoký 430 stop vrhal stín do délky 54 stop, měřeno od základny – Zeměkoule je tedy větší než Eratosthenés očekával. Určete její obvod ve stadiích. Také jej určete v kilometrech, víte-li, že jedno stadium má 160 metrů.
Nápověda: *sluneční paprsky dopadají na celou Zemi přibližně rovnoběžně.*

Nejdůležitější je si situaci nakreslit na velkém, přehledném obrázku. Znázorníme si nejdříve průřez Země jako kružnici, jako úsečky si nakreslíme rovník vedoucí středem kružnice, obratník Raka, na kterém se nachází Asuán, a nakonec myšlenou Alexandrii severně od Asuánu, vzdálenou 5 000 stádií; vizte obrázek 1.



Obr. 1: Nákres Zeměkoule spolu se slunečními paprsky, které dopadají do Asuánu a do Alexandrie. Úhel α přenášíme jakožto úhel *střídavý*.

Poté do náčrtku doplníme maják jako úsečku, která je kolmá k zemskému povrchu. Prodloužíme ji směrem *do* Země a zjistíme, že střed Země leží přesně na této přímce. To je vlastnost kružnice – každá spojnice středu a bodu na jejím obvodu (tedy středu Země a paty majáku) pokračuje dále kolmo na její tečnu v daném bodě (tedy, přeloženo, tečna je povrch Země, takže spojnice pokračuje kolmo k povrchu Země směrem k vršku majáku).

Nyní si postupně dokreslíme dva rovnoběžné sluneční paprsky. Jeden dopadá na obratník Raka (do Asuánu), a když si ho prodloužíme, tak opět protne střed Země, neboť v den letního slunovratu jsou sluneční paprsky kolmé na povrch Země v místě obratníku Raka.

Druhý paprsek nakreslíme tak, aby protínal špičku (vrch) majáku a aby byl rovnoběžný s již nakresleným „asuánským" paprskem. Vzdálenost na Zemi (tedy kružnici) mezi patou majáku a místem, kde se tento paprsek dotkl Země, je rovna stínu majáku.

Označíme si úhel α jako úhel mezi majákem a paprskem (viz obrázek). Všimneme si, že úhel α bude i mezi Asuánem, středem Země a Alexandrií. To díky tomu, že sluneční paprsky jsou dvě rovnoběžky a přímka vedoucí středem Země a majákem tuto rovnoběžku protíná. Vznikají tak úhly střídavé, které mají stejnou velikost. Musíme přijít na to, jak velký je úhel α.

Víme, že stín měl být stejně dlouhý jako maják. To znamená, že se jedná o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, takže úhel $\alpha = 45^\circ$. Jelikož 45° je osmina z 360° (což odpovídá celému obvodu Země), Marco musel ujít právě osminu z obvodu Země.

Víme, že osmina obvodu o odpovídá vzdálenosti obou měst, tj. 5 000 stádií. Sestavíme tak rovnici

$$\frac{o}{8} = 5\,000\,\mathrm{stad} \quad \Rightarrow \quad o = 40\,000\,\mathrm{stad}\,,$$

takže obvod Země měl být 40 000 stádií. To po přepočtu odpovídá 6 400 km.

Jenže stín byl jinak dlouhý, než se předpokládalo. Na výpočet u Země tak můžeme použít stejný postup, jen s jiným úhlem α. Tento úhel získáme pomocí goniometrické funkce tangens

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{54\,\mathrm{stop}}{430\,\mathrm{stop}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{54}{430}\right) \doteq 7{,}16^\circ\,.$$

Bylo také možné jej určit z narýsovaného trojúhelníku pomocí úhloměru. Obvod o Země dopočítáme stejným způsobem jako předtím, tedy trojčlenkou

$$\frac{7{,}16^\circ}{360^\circ} = \frac{5\,000\,\mathrm{stad}}{o} \quad \Rightarrow \quad o \doteq 250\,000\,\mathrm{stad}\,,$$

a pokud stádia převedeme na metry, získáme

$$o = 250\,000\,\mathrm{stad} \cdot 160\,\mathrm{m/stad} \doteq 40\,000\,\mathrm{km}\,.$$

Naše úloha je založena na skutečném měření obvodu země Eratosthenem ve starověkém Řecku. Vzhledem k tomu, že skutečný obvod činí opravdu cca 40 000 km, učenec odhadl obvod vskutku přesně.

Robert Gemrot
`robert@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.