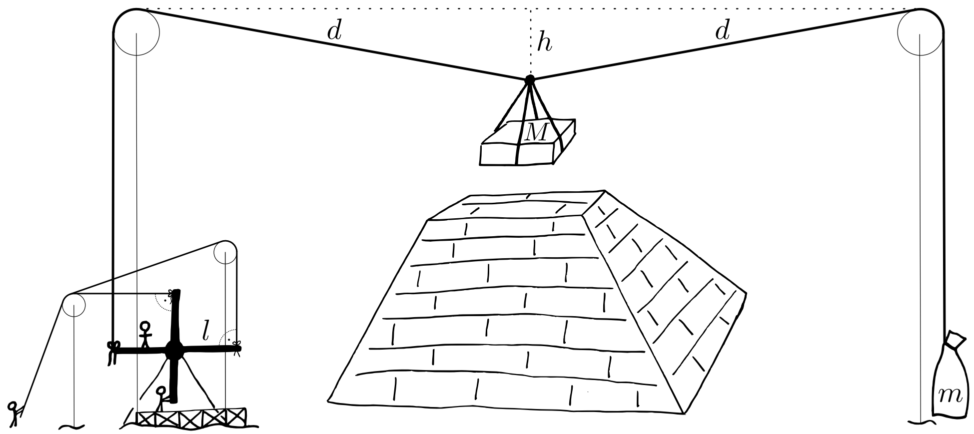
Úloha V.V ... Efekt egyptské efektivity

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček už byl skoro nad pyramidami, když měl koberec nehodu. A jak už to tak s poruchovými nadpřirozenými předměty bývá, přistál náš Výfuček v době, kdy se slavná pyramida teprve stavěla. Rozhodl se tedy ohromit faraona svými fyzikálními znalostmi a ukázal mu návrh svého dokonalého stavebního stroje.



Na obrázku vidíte Výfučkův náčrtek. Aby přesvědčil faraona, že se mu tento stroj vyplatí postavit, musel nejprve spočítat několik charakteristik:

1. *Jakou silou tahá za kvádr o hmotnosti* $M = 100\,\mathrm{kg}$ *každé z lan, na kterých visí?*
2. *Jakou hmotnost* m *musí mít pytel zavěšený na konci jednoho z lan?*
3. *Jak velká je celková síla, kterou lano působí na velké kladky? A jakým směrem míří?*
4. *Jakou silou musí kvalifikovaný dělník tlačit do lopatky mlýnu ve vzdálenosti* $l = 5\,\mathrm{m}$*, jak těžký musí být kvalifikovaný dělník stojící na mlýnu ve vzdálenosti* $l/2$ *a jakou silou musí poslední kvalifikovaný dělník tahat za lana přivázaná k mlýnu ve vzdálenosti* l*?*

Provaz je od kladky po kvádr dlouhý $d = 141{,}42\,\mathrm{m}$ *a kvádr je na něj přivázán v hloubce* $h = 36{,}60\,\mathrm{m}$ *pod úrovní horních konců kladek. Celý stroj je takto v rovnováze, všechna přivázaná lana jsou kolmá na mlýn. Všichni dělníci pracují společně a námahu dělí mezi lopatky rovnoměrně. Jak bylo již ve Výfučtení naznačeno: úlohu a hledané číselné hodnoty můžete určit také graficky za pomoci rýsování a přepočtu ve správném poměru.*

1. (a) Začněme vymyšlením jednoduššího *grafického* řešení. Z geometrie víme, že pokud zachováme jejich poměry stran, budou mít dva trojúhelníky stejné úhly. Stejně tak platí, že při zachování úhlů budou mít dva trojúhelníky stejné poměry stran. Toho při grafickém řešení využijeme.

   Přepočteme si délky stran pro trojúhelník, který budeme rýsovat (tvořený kusem lana, hloubkou cihly a úrovní kladek). Jak víme z Výfučtení, jde nám o to, aby se zachoval úhel.

$$\frac{d}{h} = \frac{d'}{h'} \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{d \cdot h'}{h}$$

Zvolíme si dobře rýsovatelnou délku h', dosadíme (pozor na jednotky) a dopočteme si, jak dlouhé máme rýsovat d'. Pravoúhlý trojúhelník pak jednoduše narýsujeme z obou stran úsečky délky h'.

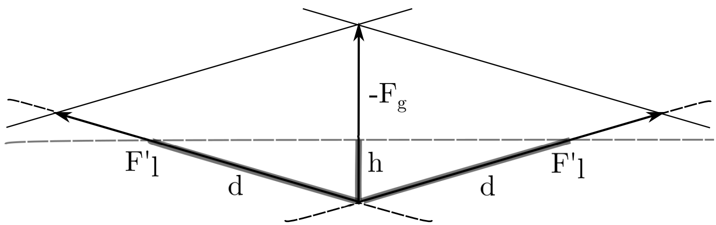
Dobře rýsovatelnou délku si můžete zvolit libovolnou. Vzorová řešení můžete číst v různě velkých formátech, tedy i s různě velkým obrázkem. Máte-li po ruce dvě různě velká řešení, zkuste si změřit, že úhly jsou stejné pro obě velikosti.

Při zjišťování velikosti síly potřebujeme dodržet úhly, které se, jak už víme, s měřítkem nemění. Pro síly tedy může být úplně jiné než pro uspořádání lan. Zadanou sílu závaží $F_\mathrm{g} = gM = 981\,\mathrm{N}$ tedy vydělíme libovolně zvoleným x, které si pečlivě poznamenáme, protože se ještě bude hodit. Rýsovat budeme velikost síly opačné k $F'_\mathrm{g} = F_\mathrm{g}/x$, tedy $-F'_\mathrm{g}$, která míří nahoru.[1]

Podle návodu ve Výfučtení provedeme rozklad síly: narýsujeme $-F'_\mathrm{g}$, protáhneme lana, doplníme na rovnoběžník (to je důležité, protože ten je určen jednoznačně, na rozdíl od jiných obrazců) a změříme velikost síly F'_l, která je, jak víme, pro obě lana stejná, protože se jedná o případ volné kladky. Soustava tedy je symetrická. Sílu, kterou skutečně lano působí, přepočteme vynásobením změřené síly dříve zvoleným x.

$$F_\mathrm{l} = F'_\mathrm{l} \cdot x$$

Tímto postupem získáme sílu o velikosti přibližně 1 900 N. Záleží ovšem také na tom, jak přesně rýsujeme a měříme a jak malé zvolíme x.



Obr. 1: Rozklad sil na volné kladce

(b) Pro milovníky vzorečků totéž vyřešíme ještě *výpočtem*. Ve Výfučtení nalezneme odvozený vzorec pro výpočet síly lana volné kladky $F_\mathrm{l} = \sqrt{(F_\mathrm{g}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + F_\mathrm{g}^2)/4}$ neboli

$$F_\mathrm{l} = \frac{F_\mathrm{g}}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}\,.$$

Jediné, co potřebujeme a ještě neznáme, je úhel α. Dopočteme jej ze zadaných délek goniometrickou funkcí $\cos \alpha = h/d \Rightarrow \alpha \doteq 75°$.

Po dosazení dostáváme sílu $F_\mathrm{l} \doteq 1\,895\,\mathrm{N}$, čemuž by měla v ideálním případě odpovídat i hodnota získaná graficky.

[1] Úsečka bude mít délku v centimetrech, milimetrech, nebo klidně bramborách takovou, jako F'_g velikost v newtonech.

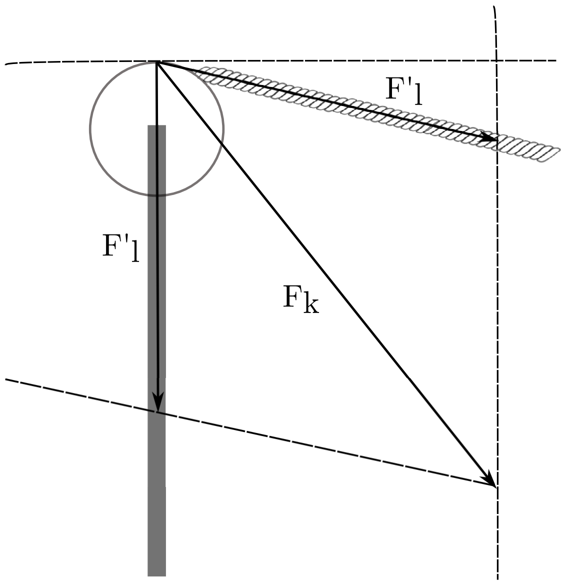
2. Pytel visí na laně vedoucím přes pevnou kladku, nahoru ho tedy zvedá stejná síla, jakou lano drží kvádr. Víme totiž, že pevná kladka vlastně jenom „pootočí“ sílu. Z Newtonových zákonů pak plyne, že stejně velká musí být tíha pytle, tedy

$$m = \frac{F_\mathrm{l}}{g} \doteq 190\,\mathrm{kg}\,.$$

3. (a) Tento podúkol lze opět řešit dvěma způsoby. Začneme zase tím *grafickým*. Do obrázku z prvního podúkolu doplníme sloup mířící dolů (kolmo na linii spojující kladky). Jeho délku nepotřebujeme znát, při skládání sil nám jde o úhel svíraný s lanem, který je jasně určený postavením sloupu vůči ostatním částem stroje.

   Zvolíme si opět nějaké pohodlné x, kterým zmenšíme sílu lana $F_\mathrm{l}' = F_\mathrm{l}/x$. Tyto síly vrýsujeme do obrázku podél sloupu a podél lana. Doplníme na rovnoběžník podle návodu ve Výfučtení. Hledaná síla tvoří úhlopříčku našeho rovnoběžníku. Tu změříme a pomocí zvoleného x přepočteme zpět na skutečnou sílu $F_\mathrm{k} = F_\mathrm{k}' \cdot x$. Takto získaná síla bude mít velikost okolo 3 000 N.

   Úhel se s měřítkem, jak už jsme několikrát zopakovali, nemění. Velikost úhlu, který svírá síla se sloupem, jednoduše změříme úhloměrem. Síla bude mířit na pyramidu a se sloupem svírá úhel $\beta \approx 38^\circ$. Jelikož je soustava osově souměrná, pro druhou kladku platí totéž, jen zrcadlově.



Obr. 2: Rozklad sil na pevné kladce

   (b) Jako první podúkol, i tento vyřešíme ještě druhou metodou – *výpočtem*. Ze symetrie situace dojdeme k závěru, že síla bude mířit někam směrem na pyramidu. Lano svírá se sloupem již vypočtený úhel α. Počítáme pro pevnou kladku, která vlastně jen

„pootočí“ sílu, tedy oba konce lana působí silou stejně velkou. Když se zamyslíme, zjistíme, že onen rovnoběžník, na který budeme doplňovat, tedy musí být nutně kosočtvercem. A jeho úhlopříčky (z nichž jedna je hledanou silou) nutně půlí jeho vnitřní úhly. Se sloupem tedy bude síla svírat úhel $\beta = \alpha/2 = 37{,}5^\circ$. Stejná situace, jen zrcadlově otočená, pak platí i pro druhou kladku.

Úhel už známe, zbývá vypočítat velikost síly. Úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé. Vytvoří tak uvnitř pravoúhlé trojúhelníky. Z úhlu, který známe, tedy můžeme vypočítat velikost poloviny úhlopříčky (hledané síly).

$$\frac{F_\mathrm{k}}{2} = F_\mathrm{l} \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{k} = 2F_\mathrm{l} \cdot \cos\beta \doteq 3\,000\,\mathrm{N}$$

4. Začneme tím, že si vyjádříme, jakým momentem síly působí lano na kolotoč. Tahá již spočtenou silou ve vzdálenosti l od místa, kde je mlýn upevněn, proto $M = lF_\mathrm{l}$. Nutno podotknout, že mlýn je vlastně jen soustava dvou pák kolmých na sebe. Součet momentů sil všech dělníků a lana musí být nulový. To znamená, že dělníci budou mlýn roztáčet nutně v opačném směru než lano. Jejich síla, a tedy i moment síly, by měly mít opačné znaménko. Podle Výfučtení tak udělíme záporné znaménko síle (tedy i momentu síly), kterou působí lano, protože to roztáčí mlýn po směru hodinových ručiček.

   Lopatky dělníci zatěžují rovnoměrně, tento moment síly tedy rozdělíme na čtyři části a každému dělníkovi budeme moment síly „dávkovat“ podle toho, na kolik lopatek přímo působí. Pro velikost momentu síly pro jednu lopatku bude platit

$$4M_\mathrm{l} - M = 4F_\mathrm{d}l_\mathrm{d} - F_\mathrm{l}l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{d} = \frac{F_\mathrm{l}l}{4l_\mathrm{d}}\,,$$

   kde M_l je moment síly působící na jednu lopatku, l_d je vzdálenost působení dělníka a F_d síla, kterou dělník musí v daném místě působit.

   (a) Začneme tlačícím kvalifikovaným dělníkem. Tlačí ve vzdálenosti $l_\mathrm{d} = l$. Ihned po dosazení zde můžeme zkrátit zlomek, dosadit čísla a spočítat sílu, kterou potřebuje.

$$F_{\mathrm{d}_1} = \frac{F_\mathrm{l}l}{4l} = \frac{F_\mathrm{l}}{4} \doteq 470\,\mathrm{N}$$

   (b) Pokračujme stojícím dělníkem. Ten působí ve vzdálenosti $l/2$. Zároveň víme, že síla, kterou působí, je jeho síla tíhová, ze které hmotnost dělníka spočteme jako $m_\mathrm{d} = F_\mathrm{d}/g$. Tam dosadíme vztah pro výpočet síly dělníka a ještě dosadíme jeho vzdálenost, zlomek zkrátíme, dosadíme čísla a spočteme jeho hmotnost.

$$m_\mathrm{d} = \frac{F_\mathrm{l}l}{4\frac{l}{2}g} = \frac{F_\mathrm{l}}{2g} \doteq 97\,\mathrm{kg}$$

   (c) Poslední dělník táhne za lana. Obě lana vedou přes stejnou pevnou kladku a pokračují stejným směrem dělníkovi do ruky. A pevná kladka, jak už víme, umí „pootočit“ sílu. Dělník tedy táhne součtem sil, kterými musí na mlýn působit každé z lan upevněných ve vzdálenosti $l_\mathrm{d} = l$. Obě lana pak působí ve stejné vzdálenosti $l_\mathrm{d} = l$, tedy obě působí stejnou silou. Síla dělníka tedy bude

$$F_{\mathrm{d}_3} = 2 \cdot \frac{F_\mathrm{l}l}{4l} = \frac{F_\mathrm{l}}{2} \doteq 950\,\mathrm{N}\,.$$

Vidíme, že Výfučkův stroj je realistický z toho hlediska, že se určitě najdou dělníci, kteří váží cca 100 kg a působí silou cca 1 000 N.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.