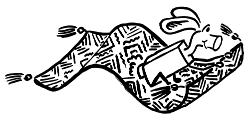
Úloha V.5 ... Aladin ušetřil

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček byl ze svého nového létajícího koberce celý nadšený. Ještě když si jej pod paží nesl na nějaké klidnější místo, rozmýšlel se, jak se mu s ním asi poletí a jak rychlý koberec bude. Pomozte mu s jeho úvahami.



1. *Jakmile se Výfuček rozletí, bude se koberec pohybovat konstantní rychlostí $v_0 = 200\,\mathrm{km/h}$. Jakou vzdálenost x pak Výfuček v této fázi letu urazí za čas $t_0 = 30\,\mathrm{min}$? Jakou vzdálenost urazí za obecný čas t? Matematicky řečeno, napište předpis funkce Výfučkovy uražené vzdálenosti v závislosti na čase $x(t)$.*

2. *Již jsme řekli, Výfučkova rychlost je v této fázi konstantní, jeho funkce rychlosti v závislosti na čase je $v(t) = v_0$. Vytvořte graf této funkce (s velkými dlouhými osami) a znázorněte v něm čas t_0 jakož i rychlost v_0. Jak lze z grafu pomocí geometrie určit, jakou vzdálenost Výfuček uletěl za čas t_0?*

Výfučka však ještě zajímala akcelerace koberce a jeho další vlastnosti.

3. *Jestliže koberec rovnoměrně zrychlí z nuly na sto (kilometrů v hodině) za $2{,}5\,\mathrm{s}$, jaké je jeho zrychlení?*

4. *Napište předpis funkce rychlosti koberce v čase $v(t)$ a zhotovte její graf. Graficky odvoďte uraženou vzdálenost Výfučka za čas a zkontrolujte, že vše sedí tak, že vzdálenost změříte pro $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$.*

Výfuček konečně došel na vhodné klidné místo a rozprostřel svůj koberec připraven vyrazit. Nastartoval a... koberec mu, jak se lidově říká, chcípl.

5. *Jakou vzdálenost při tomto špatném startu urazil, trval-li celých pět sekund a rychlost koberce v čase lze zapsat funkcí*

$$v = \sqrt{(2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (t - 2{,}5\,\mathrm{s})^2 \cdot (1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2}\ ?$$

Jistě vám pomůže si nakreslit graf této funkce. Třeba tak, že si nejprve vynesete pár jejích bodů. Výsledek uveďte v plné obecnosti, a pak teprve dosaďte za všechny konstanty, které se mohou vyskytnout.

1. Ze základní fyziky známe vzorec pro dráhu $s = vt$, který má v případě našeho značení formu

$$x = v_0 t_0\,. \tag{1}$$

Z něj po dosazení hodnot $v_0 = 200\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a $t_0 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}5\,\mathrm{h}$ získáváme rovnici

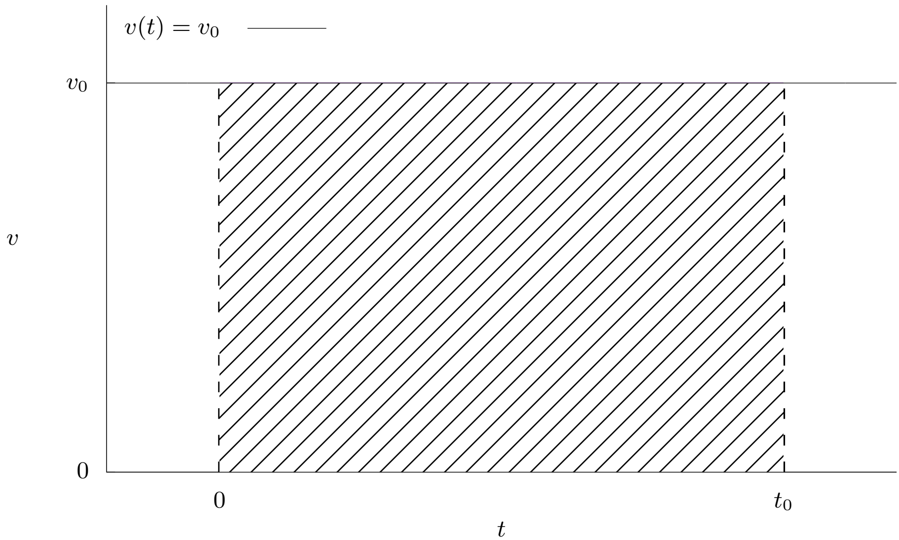
$$x = 200\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 100\,\mathrm{km}\,.$$

Výfuček tak během svého letu urazí vzdálenost $x = 100\,\mathrm{km}$.

Z rovnice (1) zároveň můžeme jednoduše vyjádřit funkci dráhy v závislosti na čase. Napsáním proměnné t místo konkrétního času t_0 vzniká předpis funkce

$$x(t) = v_0 t\,.$$

2. Rozeberme si nejdříve předpis funkce rychlosti $v(t) = v_0$. Můžeme vidět, že ať je t jakékoliv, vždy bude výsledkem funkce (funkční hodnotou) v_0. Jedná se tak o konstantní funkci, která má v každém bodě stejnou hodnotu a v grafu se projeví jako přímka rovnoběžná s osou t.[1]



Obr. 1: Graf funkce $v(t) = v_0$ s vyznačenými hodnotami na ose t pro 0 a t_0.

V grafu 1 je kromě funkce také vyznačena i tzv. plocha pod grafem. Ta je vytyčena osou t, hodnotami funkce a začátečním a koncovým bodem na ose t. V našem případě, kdy je funkce konstantní, se jedná o obdélník o stranách v_0 a t_0. Obsah obdélníku můžeme vypočítat jakožto součin délek stran, z čehož vyplývá, že obsah našeho obdélníku je $v_0 t_0$, což je vlastně uražená dráha v rovnici (1). To znamená, že z grafu můžeme dráhu geometricky určit jako plochu pod grafem (křivkou).

Tuto metodu výpočtu dráhy můžeme využít i pro jiné grafy. Je to způsobeno tím, že si můžeme představit, že plochu pod křivkou jakéhokoliv grafu rozdělíme na malé obdélníčky o obsahu $v \cdot \Delta t$ a pro každý obdélník je jasné, že naše metoda funguje.

3. Pro zrychlení platí $a = \Delta v / \Delta t$, kde Δv vyjadřuje rychlost, o kterou těleso zrychlilo, a Δt značí za jaký čas těleso takto zrychlilo. Výfuček zrychlil o $100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ (což je $100/3{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$), a to za čas $2{,}5\,\mathrm{s}$. Jeho zrychlení proto je

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100}{3{,}6 \cdot 2{,}5} = 11{,}\overline{1}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

[1] V tomto konkrétním případě se jedná o osu t. Pokud bychom chtěli graf popisovat obecně, použili bychom značení osy jako x. To zde ovšem není použito, aby nedocházelo k zaměňování osy x a funkce $x(t)$.

Výfučkovo zrychlení bylo tedy $a \doteq 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

4. Výfučkovu rychlost během rovnoměrně zrychleného pohybu můžeme zapsat jako

$$v = v_0 + at\,,$$

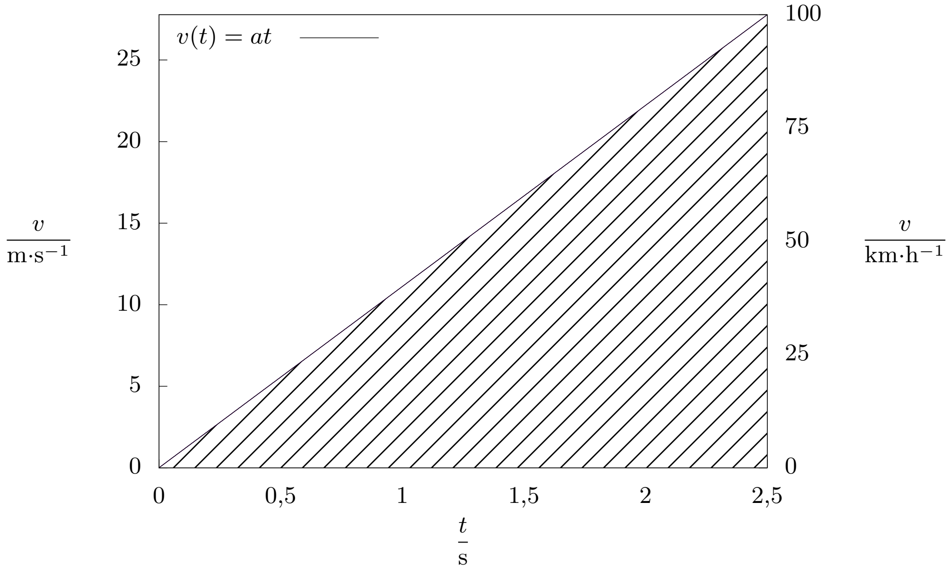
přičemž v_0 vyjadřuje rychlost, ze které Výfuček zrychloval, a at je rychlost, o kterou zrychlil. V našem příkladu se Výfuček na začátku nepohybuje, takže $v_0 = 0$, a tento člen tak můžeme z rovnice vyřadit. Vyplývá nám předpis funkce rychlosti

$$v(t) = at\,,$$

do které můžeme dosadit hodnotu zrychlení $a \doteq 11{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ vypočítanou předtím (dosadíme s větší přesností, protože se nyní jedná o mezivýsledek).

$$v(t) = 11{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot t$$

Vidíme, že si ale musíme po dosazení zrychlení dávat pozor, abychom používali správné jednotky času a dostali předpokládané jednotky rychlosti.



Obr. 2: Graf zrychlení včetně vyznačené plochy.

Jak už jsme jednou řekli, v grafu závislosti rychlosti na čase vyjadřuje plocha pod křivkou vzdálenost, kterou těleso během pohybu urazí. Na rozdíl od grafu 1, kde se jednalo o obdélník, se v grafu 2 jedná o trojúhelník, konkrétně pravoúhlý trojúhelník.

Obsah pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a a b je stejný jako obsah obdélníku o stranách a a b, který by byl podél úhlopříčky přeříznut na dvě poloviny. Proto je obsah pravoúhlého trojúhelníku

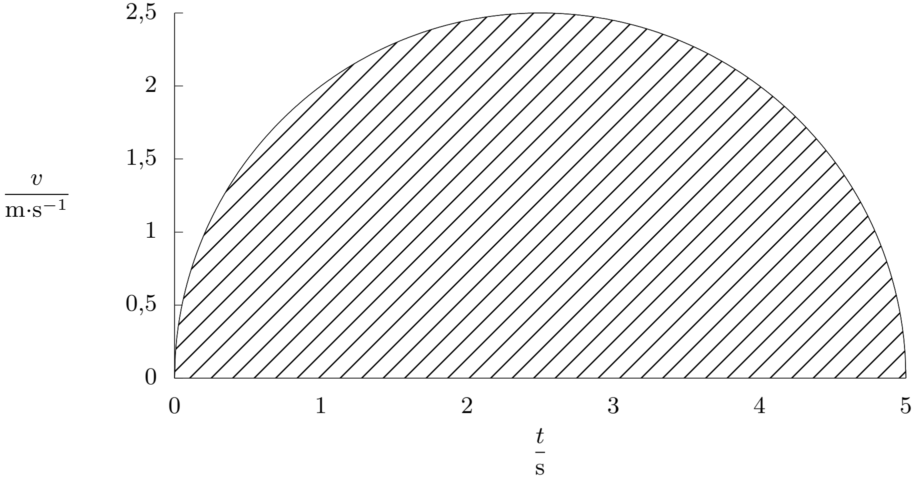
$$S = \frac{1}{2}ab\,,$$

z čehož v našem případě dostáváme vztah

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}v(t)t = \frac{1}{2}at^2\,,\\
x(2{,}5\,\mathrm{s}) &= \frac{1}{2}\cdot 11{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot(2{,}5\,\mathrm{s})^2\,,\\
x(2{,}5\,\mathrm{s}) &\doteq 35\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}
$$

Výfuček během zrychlování z nuly na sto urazil vzdálenost zhruba $x \doteq 35\,\mathrm{m}$.

5. Na první pohled by se mohlo zdát, že se jedná o příliš složitou funkci, popisuje nepředstavitelný pohyb. Zde je opravdu důležité si nejdříve vytvořit graf. To můžeme pomocí nějakého softwaru (např. programu Geogebra), či tak, že vynášíme postupně jednotlivé body s rozestupem po čase třeba 0,1 s a následně body propojíme (dostaneme tak přibliný graf). My jsme graf vytvořili pomocí počítačového programu.



Jak z něj můžeme vidět, funkce má tvar půlkružnice. To, že se jedná opravdu o část kružnice, můžeme dokázat i upravením obecného vyjádření kružnice v kartézské soustavě souřadnic:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,.$$

V ní x_0 a y_0 vyjadřují pozici středu kružnice a r je poloměr dané kružnice. Pro y_0 v našem případě platí $y_0 = 0$. Proto po obecném vyjádření y dostáváme předpis

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}\,,$$

což je nápadně podobné naší funkci rychlosti $v(t)$. Když porovnáme obě tyto rovnice, můžeme z nich vypozorovat hodnoty proměnných $r = 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $x_0 = 2{,}5\,\mathrm{s}$.

Hodnoty proměnných jsme ale mohli určit i třeba pomocí pravítka.

Jak už jsme několikrát řekli, vzdálenost je plocha pod grafem. V našem případě se jedná o půlkruh, jehož obsah můžeme vypočítat jako

$$x = S = \frac{1}{2}\pi r^2 \,.$$

Poloměr kružnice r jsme si již vyjádřili, a tak jej můžeme dosadit do rovnice.

$$x = \frac{1}{2}\pi \cdot 2{,}5^2 = 3{,}125\pi \text{ m}$$

Výfuček urazí během letu vzdálenost $x = 3{,}125\pi$ m, což je přibližně 9,8 m.

Tato úloha je ovšem kromě uvedeného způsobu řešitelná i jinými metodami, přičemž mnoha z nich využívá výpočetní technika. Takovým postupem může být například známá metoda *Monte Carlo*. V ní náhodně[2] simulujeme házení bodů do obdélníku, kterému je graf vepsaný a ověřujeme, zda-li se bod nachází uvnitř nebo vně plochy grafu (jestli je jeho hodnota menší či větší než funkční hodnota). Z následného poměru počtu bodů vně a uvnitř plochy a toho, že známe plochu obdélníku, bychom byli schopni zjistit samotnou plochu pod grafem.

Další takovou metodou může být *integrace*, což je matematická operace, která přímo vypočítá plochu pod křivkou nějaké funkce. Je motivovaná rozsekáním plochy do obdélníků, které mají strany o délkách velmi malé změny na ose x a hodnoty funkce na y. Hodnotu takového integrálu můžeme určit matematicky nebo i výpočetně pomocí nějakého programovacího jazyku, jakým je například Python nebo C++ (tzv. numerické řešení).

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Kvůli architektuře počítačů je většina čísel, která by neměla být předvídatelná, ve skutečnosti tzv. *pseudonáhodná*, protože naprosto náhodná čísla pouze za pomoci počítače nelze získat. S většími či menšími úspěchy se snažíme tyto problémy chytrým programováním obcházet.