Úloha V.4 ... Alhazenův odraz

6 bodů; (chybí statistiky)

Během náročných výpočtů si Výfuček krátil čas hraním si s propiskou. Uchopil její konec, na němž je kovový hrot, a propisku upustil. Poté, co pero s hmotností $m = 2\,\mathrm{g}$ spadlo z výšky $h = 10\,\mathrm{cm}$, se kvůli pružině počáteční délky $l = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ a tuhosti $k = 50\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ odrazilo do výšky $h' = 6\,\mathrm{cm}$. Pokud Výfuček zdvihl ruku trochu výš, k odrazu již nedošlo; propiska se pouze převrátila a spadla.

Vyjádřete maximální výšku h_{max}, ze které Výfuček musí propisku shodit, aby se ještě odrazila do výšky h'_{max}. Víte, že při prodlužování a zkracování pružiny se nevratně přemění na teplo stejné množství energie. Toto množství je totožné při každém odrazu. Pokud se pružina zkrátí na délku $l_{\mathrm{min}} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$, propiska se zasekne. Výšku h'_{max} také vyjádřete.

Nejdříve si připravíme zápis známých veličin

$$
\begin{aligned}
m &= 2\,\mathrm{g} = 0{,}002\,\mathrm{kg}\,,\\
h &= 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}\,,\\
h' &= 6\,\mathrm{cm} = 0{,}06\,\mathrm{m}\,,\\
l &= 1{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}015\,\mathrm{m}\,,\\
k &= 50\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.
\end{aligned}
$$

Nyní určíme, jakou silou bude pružina působit na propisku, když ji shodíme z výšky h_{max}. Zpětnou sílu pružiny můžeme spočítat jako $F = k \cdot \Delta l$, problém však je, že Δl se v průběhu děje mění. Výpočty s proměnlivou silou můžeme obejít tak, že si spočítáme průměrnou. Protože se síla zvyšuje lineárně se změnou délky od nuly do maximální hodnoty, průměrná síla, kterou pružina působí, je $F_{\mathrm{p}} = k\Delta l/2$.

Teď můžeme spočítat maximální výšku, z níž lze propisku pustit, jestliže maximální změna délky pružiny je $\Delta l_{\mathrm{max}} = l - l_{\mathrm{min}} = 1\,\mathrm{cm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$. Víme, že pružina působí silou proti pohybu propisky na vzdálenosti $d = \Delta l_{\mathrm{max}} = 0{,}01\,\mathrm{m}$. Ze zákona zachování energie platí, že se potenciální energie pružiny spuštěné z výšky h_{max} musí rovnat práci, kterou vykoná pružina, aby propisku zastavila. Můžeme tedy napsat první sadu rovnic:

$$
\begin{aligned}
W &= Fd\,,\\
W &= \frac{k\Delta l_{\mathrm{max}}}{2}\Delta l_{\mathrm{max}}\,,\\
E_{\mathrm{p}} &= mgh_{\mathrm{max}}\,,
\end{aligned}
$$

avšak pro kompletní model toto nestačí. Celková energie E, která bude v pružině propisky uložena, není pouze E_{p}. V průběhu stlačování propiska přemění ještě více potenciální energie, než by odpovídalo výšce h_{max} (potenciální energie se stále bude rovnat vykonané práci, ale energie bude víc, než z pouhého zvednutí nestlačené propisky o h_{max} nad zem), protože po stlačení pružiny bude její těžiště ještě níže, než byla uvažována nulová výška, a tak platí

$$
E \leq E_{\mathrm{p}} + mg\Delta l_{\mathrm{max}} = mg(h_{\mathrm{max}} + \Delta l_{\mathrm{max}})\,,
$$

kde znaménko $\leq$ píšeme kvůli poslednímu postřehu, o kterém je potřeba se zmínit, a tím je ztracená energie.

Jelikož se propiska nevrátila do původní výšky, musela být část její energie přeměněna. Tu odečítáme od celkové energie, kterou propiska získala pádem. To znamená, že se nemohla podílet na stlačení pružiny, a tedy pružina se stlačila méně. Rovnost energie je i po této úvaze stále nedotčena – jedná se pouze o to, že ztráty třením tvoří tu část vykonané „práce“ pružiny, kterou v rovnicích nechceme sledovat.

Poněvadž při odrazu se na teplo přemění vždy stejné množství energie, změní se i konečná potenciální energie vůči počáteční pokaždé o stejnou hodnotu. Změnu potenciální energie lze vyjádřit jako $\Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h = mg(h - h')$. Určíme tento rozdíl a vydělíme jej dvěma, protože celková ztráta energie sestává ze dvou ztrát: při stlačování a při roztažení pružiny. Nyní již přesně:

$$E = E_\mathrm{p} + mg\Delta l_\mathrm{max} + \frac{\Delta E_\mathrm{p}}{2} = mg\left(h_\mathrm{max} + \Delta l_\mathrm{max} - \frac{h - h'}{2}\right),$$

a tak můžeme napsat celkovou bilanci energie a vyjádřit hledanou výšku

$$mg\left(h_\mathrm{max} + \Delta l_\mathrm{max} - \frac{h - h'}{2}\right) = \frac{k\Delta l_\mathrm{max}}{2}\Delta l_\mathrm{max}$$

$$h_\mathrm{max} = \frac{k\cdot(\Delta l_\mathrm{max})^2}{2mg} - \Delta l_\mathrm{max} + \frac{h - h'}{2}.$$

Vypočteme výšku h_max dosazením

$$h_\mathrm{max} = \frac{50\cdot 0{,}01^2}{2\cdot 0{,}002\cdot 9{,}81}\,\mathrm{m} - 0{,}01\,\mathrm{m} + \frac{0{,}1\,\mathrm{m} - 0{,}06\,\mathrm{m}}{2},$$

$$h_\mathrm{max} \doteq 0{,}13\,\mathrm{m} - 0{,}01\,\mathrm{m} + 0{,}02\,\mathrm{m},$$

$$h_\mathrm{max} \doteq 0{,}14\,\mathrm{m} = 14\,\mathrm{cm}.$$

Musíme ještě spočítat i výšku h'_max, do níž propiska po odrazu vyletí. Z úvah výše jsme viděli, že když bude stejný rozdíl energií, bude mít propiska i stejný rozdíl počáteční a konečné výšky.

$$\Delta h = h - h'$$

$$\Delta h = (10 - 6)\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$$

Propiska vždy vyletí do výšky o 4 cm nižší, než z jaké byla puštěna.

$$h'_\mathrm{max} = h_\mathrm{max} - \Delta h$$

$$h'_\mathrm{max} = (14 - 4)\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$$

Aby se ještě odrazila, může ji Výfuček shodit z maximální výšky $h_\mathrm{max} = 14\,\mathrm{cm}$ a tehdy se odrazí do výšky $h'_\mathrm{max} = 10\,\mathrm{cm}$.

Lubor Čech
`lubor@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.