Úloha III.5 ... Jeskyně a jídlo

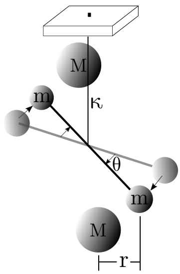
7 bodů; (chybí statistiky)

Na konci osmnáctého století jeden velice stydlivý muž jménem Henry Cavendish jako první člověk přesněji změřil tzv. gravitační konstantu G, která figuruje[1] v Newtonově gravitačním zákoně.

K měření využil velmi přesné tzv. torzní váhy (viz obrázek), v nichž jsou konce lehkého vodorovného torzního ramena zatížené kuličkami o hmotnosti m. K těmto oběma koncům jsou ve vzdálenosti r přiblíženy dvě těžší koule o hmotnostech M. Na obou tak vzniká moment síly daný gravitační přitažlivostí mezi malými a velkými koulemi. Rameno je ve svém těžišti zavěšeno tzv. torzním závěsem, což je kterýkoli pevně ukotvený drát či tyč, který se při otáčení ramena kroutí. Jeho krut vytváří protichůdný moment síly, který je přímo úměrný torzní konstantě vlákna κ a úhlu stočení mezi jeho konci θ (neboli úhlu pootočení celého ramena) v radiánech.

1. *Sestavte rovnici pro působící síly/momenty, vyjádřete z nich gravitační konstantu a upravte ji tak, aby fungovala, kdybychom θ měřili ve stupních.*

2. *Uvažujte, že všechny veličiny až na měřený úhel θ a samotnou konstantu G známe přesně. Nechť $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $M = 10\,\mathrm{kg}$, $r = 10\,\mathrm{mm}$ a přibližná hodnota úhlu je $\langle\theta\rangle = 0{,}2^\circ$. Jaká by musela být délka celého ramena L, abychom při 1% relativní nejistotě měření úhlu dosáhli 1% nepřesnosti určení gravitační konstanty?[2] Vztáhněte ji k již známé přesné hodnotě získané jinou metodou: $6{,}674\,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$.*



Obr. 1: Zjednodušené schéma torzních vah

1. Začněme určením momentu síly gravitační, tedy té, kterou na sebe působí velká a malá koule. Pro moment síly obecně platí

$$M = Fd \sin\alpha\,,$$

kde F je síla působící ve vzdálenosti d od osy rotace a α úhel, který svírá vektor síly F s vektorem r. Protože je ale úhel α u torzních vah téměř pravý, můžeme použít i zjednodušený vztah pro moment síly

$$M = Fd\,.$$

[1] I když se ve škole často setkáte se symbolem kappa (κ), tak ve vědě (a zejména teorii relativity, která se gravitací nejvíce zabývá) se již více používá symbol G.

[2] Pro práci s nejistotami vám může pomoci náš tahák: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/jak_resit/tahak.pdf`.

Jelikož se osa otáčení torzního ramena nachází přesně v jeho středu, bude vzdálenost koulí, a tím pádem i působících sil od osy, rovna polovině jeho délky:

$$d = \frac{L}{2}\,.$$

Poněvadž se malé koule nachází na obou stranách torzního ramena a na obě působí velké koule stejnou silou a ve stejném směru, bude celková síla, která nutí rameno k rotaci, rovna dvojnásobku síly gravitační:

$$F = 2F_\mathrm{G}\,.$$

Protože je ale gravitační síly dvojnásobek a délky torzního ramena naopak jen polovina, dvojky se vykrátí a moment sil, který roztáčí torzní rameno, je tedy roven:

$$M_1 = F_\mathrm{G}L\,,$$

přičemž gravitační sílu F_G vypočítáme pomocí Newtonova gravitačního zákona, jenž zní

$$F_\mathrm{G} = G\frac{Mm}{r^2}\,,$$

kde r je vzdálenost těžišť velké a malé koule, kterou známe ze zadání. Důležité je, že jsme již přidali gravitační konstantu G do vztahů. Následně dosadíme gravitační sílu do rovnice pro moment síly:

$$M_1 = GL\frac{Mm}{r^2}\,.$$

Aby se torzní rameno vyrovnalo do pozice, při které je otočeno o úhel θ, musí se protichůdný moment síly (protichůdnost vyjádříme zápornou hodnotou momentu) vyrovnat momentu gravitační síly

$$M_1 + M_2 = 0\,,$$

kde M_1 je moment gravitační síly a M_2 protichůdný moment síly vyvíjený torzním závěsem. Pokud nebude závěs namáhán za svou mez pružnosti (tedy pokud nebude nevratně deformován), budou platit již vyřčené vztahy ze zadání, tedy že je protichůdný moment síly přímo úměrný torzní konstantě závěsu κ a úhlu stočení θ v radiánech:

$$M_2 = -\kappa\theta\,.$$

Pokud tedy porovnáme oba momenty, získáme rovnici

$$GL\frac{Mm}{r^2} = \kappa\theta\,,$$

ze které určíme vztah pro gravitační konstantu

$$G = \frac{\kappa\theta r^2}{MmL}\,.$$

Problém je v tom, že úhel stočení θ musí být vyjádřen v radiánech (jelikož torzní konstanta se uvádí pro radiány) a my jej máme mít vyjádřený ve stupních. Naši hodnotu ve stupních tak musíme uměle převést na hodnotu v radiánech, aby rovnice platila.

Při převodu ze stupňů na radiány nám vzniká konstanta $\pi\mathrm{rad}/180^\circ$ (jelikož $\pi\mathrm{rad}$ odpovídá 180° a chceme, aby se stupně zkrátily a aby radiány zůstaly). Máme tedy $\theta = \theta_\mathrm{d} \cdot \pi/180$, kde θ je v radiánech a θ_d je ve stupních. Můžeme tak dosadit

$$G = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa \theta_\mathrm{d} r^2}{MmL}\,.$$

2. Pro přehlednost si schovejme všechny přesně známé veličiny použité ve vztahu pro gravitační konstantu (ze kterého budeme vycházet) za konstantu, kterou si označíme k

$$k = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa r^2}{Mm}\,.$$

Potom můžeme zapsat, že

$$G = \theta_\mathrm{d} \frac{k}{L}\,.$$

V následujících výpočtech budeme používat dvě jednoduchá pravidla. Prvním je, že pokud platí vztah

$$a = kb\,,$$

kde a je závislá veličina, k je číslo bez nejistoty (tedy konstanta) a b je nezávislá veličina, potom pro jejich (normální) nejistoty platí

$$u_a = k u_b\,.$$

Druhým je vztah pro relativní nejistotu

$$\delta_a = \frac{u_a}{\langle a \rangle}\,.$$

Díky prvnímu pravidlu platí mezi nejistotami G a θ_d následující vztah:

$$u_G = u_{\theta_\mathrm{d}} \frac{k}{L}\,,$$

což díky druhému pravidlu přepíšeme pomocí relativních nejistot:

$$\delta_G \langle G \rangle = \delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle \frac{k}{L}\,.$$

Dostali jsme rovnici, která říká, že pokud chceme měřit G s nejistotou δ_G o velikosti jednoho procenta a máme k dispozici aparaturu, která dovoluje měřit úhel s nejistotou $\delta_{\theta_\mathrm{d}}$ (v našem případě taktéž jedno procento), tak vše musíme kompenzovat odpovídající délkou vah L. Z toho si vyjádříme ono potřebné L a dosadíme za konstantu k

$$L = k \frac{\delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle}{\delta_G \langle G \rangle} = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa r^2 \delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle}{\delta_G \langle G \rangle M m}\,.$$

Nakonec dosadíme hodnoty ze zadání:

$$L = \frac{\pi}{180} \frac{2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m} \cdot (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 \cdot 1\,\% \cdot 0{,}2}{1\,\% \cdot 6{,}674\,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{kg}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Aby byly splněny zadané podmínky pro relativní nejistoty gravitační konstanty a úhlu stočení, musí být délka torzního ramena $L \doteq 1{,}2\,\mathrm{m}$.

Můžeme si všimnout, že délka ramena je dost malá na to, aby se vešla např. do místnosti. Chyba experimentu bude pravděpodobně větší díky cizím vlivům, jako jsou poryvy větru či cizí gravitační pole. V zadání jsme předpokládali, že Cavendish naměřil hmotnosti a vzdálenosti dokonale přesně. Tento předpoklad je i za Cavendishovy doby velmi dobře splnitelný, neboť tyto veličiny lze opakovaným měřením dobře určit. Vidíme tedy, že Cavendish mohl vskutku před více než 200 lety uskutečnit relativně přesné měření.

Chcete-li se o chybách měření dozvědět více, přečtěte si náš text Hokus Pokus: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus`.

Tomáš Patsch
`patscht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.