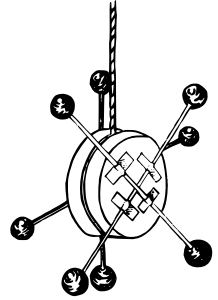


Úloha II.E ... Bojo(vé) jojo

7 bodů; průměr 4,96; řešilo 45 studentů

Čím je kolo těžší a větší, tím více nás stojí jej roztočit. Tomuto přírodnímu zákonu se nevyhne ani tak malé kolečko, jakým je jojo. Někteří z vás mohli v minulé úloze zkoumat existenci vztahu mezi tím, jak je jojo těžké a jak rychle se odvíjí na svém provázku – prověřme to nyní experimentálně! Seznamte se s délkou provázku na svém joju a změřte, jak dlouho trvá, než se vlastní vahou samo rozvine. Poté své jojo vylepšete a symetricky na něj, například pomocí špejlí, připevníte proměřené závaží¹ (např. z plastelíny), které se bude točit spolu s ním. Vyzkoušejte, jak ovlivní čas to, že jste přidali zátěž na střed joja (oproti joju bez závaží), ale také to, jak ovlivní čas odmotávání posouvání závaží dále od středu joja (v ideálním případě to můžete znázornit graficky). Nakonec popište, jaká časová změna by pro vás byla intuitivní a proč, a zda ji experiment potvrdil.



Teorie

V této části se pokusíme odvodit teoretický model. Díky němu dokážeme predikovat, jak by měl být měřený čas ovlivněn úpravou polohy závaží v závislosti na jeho poloze od středu. Jde o pokročilejší úlohu z mechaniky, jejíž řešení po vás nikdo ve vašich řešeních nevyžaduje. Využívá se při ní totiž výrazně konceptu tzv. momentu setrvačnosti, se kterým jste se na základní škole nemuseli setkat. Proto pokud se o tuto úlohu nezajímáte do hloubky z hlediska teoretického vysvětlení, můžete tuto část přeskóčit a pak v té druhé a třetí vidět, jak mají správně naměřené výsledky vypadat.

Moment setrvačnosti je veličinou popisující zjednodušeně řečeno „jak špatně se těleso roztáčí“, tedy čím je moment větší, tím větší silou nebo delší dobu musíme na těleso působit, abychom jej roztočili. Samotnému joju se moment setrvačnosti $J_j = m_j r_j^2 / 2$ nemění. Jeho hmotnost m_j je stále stejná – konstantní, stejně jako jeho poloměr r_j .

My ale na jojo přidáme prstenec plastelíny, tedy zvětšíme moment setrvačnosti soustavy joja s plastelínou o $J_p = m_p \cdot r_p^2$. Hmotnost plastelíny m_p zachováme pro všechna měření konstantní. Zajímá nás, co se bude dít se změnou poloměru prstence r_p . Čím bude prstenec dál od středu joja, tím větší bude (podle vzorečků výše) hodnota momentu setrvačnosti a tím hůře se jojo bude roztáčet. Vyšší silou jej roztáčet nemůžeme – působí na něj tíhová síla způsobená gravitací Země, a tu doma jen těžko ovlivníme.

Abyste tedy jojo s větším poloměrem plastelínového prstence roztočilo na stejnou úhlovou rychlost jako jojo s prstencem menším, muselo by se roztáčet delší dobu. Z toho plyne, že čím menší má jojo plastelínový prstenec, tím rychleji se bude odvíjet z provázku a dorazí tak na konec dřív.

Nyní trocha matematiky pro zvědavé – vypočteme si explicitní vzorec pro čas, za který se jojo odmotá. V ruce má jojo potenciální energii $E = mgl$, kde m je hmotnost joja i s plastelínou a l je délka provázku, tedy výška nad bodem, kde se jojo zastaví. Ze zákona zachování energie plyne, že celková kinetická energie joja, které se dorozvine na konec provázku, se rovná potenciální

¹Pochopitelně je také pro porovnání vhodné změřit i hmotnost samotného joja bez provázku.

energií joja v ruce. Jojo má dva druhy kinetické energie – otáčivou $E_o = J\omega^2/2$ a posuvnou $E_p = mv^2/2$ (neboli rotační a translační). Ze zákona zachování energie tedy dostaneme rovnici:

$$mgl = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Potřebujeme vyjádřit posuvnou rychlost joja v , ale než upravíme rovnici, dosadíme za normální rychlost úhlovou $\omega = v/r_t$, kde r_t je poloměr osy (tyčky), na které je navinutý provázek. Za jednu otočku osy se jojo odvine o její obvod, tedy rychlost, jakou se posouvá, je stejná jako obvodová rychlost osy. Nyní můžeme vytknout v^2 , vyjádřit jej z rovnice a odmocnit ji. Dostaneme tak:

$$v = \sqrt{\frac{2mgl}{\frac{J}{r_t^2} + m}}.$$

Dále víme, že dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu vypočteme jako $l = vt/2$. Polovina koncové rychlosti v je totiž průměrná rychlost joja. Z toho vyjádříme čas $t = 2l/v$. Dosadíme za rychlost předchozí vzorec a za moment setrvačnosti $J = J_j + J_p$ a dostáváme:

$$t = \frac{2l}{\sqrt{\frac{2mgl}{\frac{1}{2}m_j r_j^2 + m_p \cdot r_p^2} + m}}}.$$

Po zjednodušení tak dostaneme netriviální vzorec:

$$t = \sqrt{\frac{2l \left(\frac{\frac{1}{2}m_j r_j^2 + m_p \cdot r_p^2}{r_t^2} + m \right)}{mg}}.$$

Měření

Abychom omezili relativní nepřesnost měření způsobenou nenulovým reakčním časem člověka, bude použité jojo mít provázek o délce $l = 2$ m. Čím delší provázek, tím delší čas a tím menší relativní nepřesnost času. Jojo navineme, umístíme dostatečně vysoko, aby po odvinutí do něčeho nenarazilo, a pustíme. V tentýž moment spustíme stopky, které zastavíme, jakmile se provázek odmotá celý. Že se jojo odvinulo, poznáme nejen pohledem, ale i jemným škrubnutím, které ucítíme, pokud provázek držíme v ruce. Aby bylo naše měření ještě přesnější, pro každou vzdálenost plastelínového prstence od středu joja měříme alespoň desetkrát. Deset měření pak zprůměrujeme a vypočteme z nich odchylku²

Ve výše odvozeném vzorci počítáme s plastelínou jako s tenkým prstencem, který ideálně má zanedbatelnou tloušťku. Reálně prstenec plastelíny o hmotnosti $m_p = 7$ g zanedbatelnou tloušťku mít nebude, takže by se naměřené hodnoty měly od těch teoretických lišit. Abychom mohli hodnoty výpočtu a měření porovnat v jednom grafu, budeme jako poloměr prstence

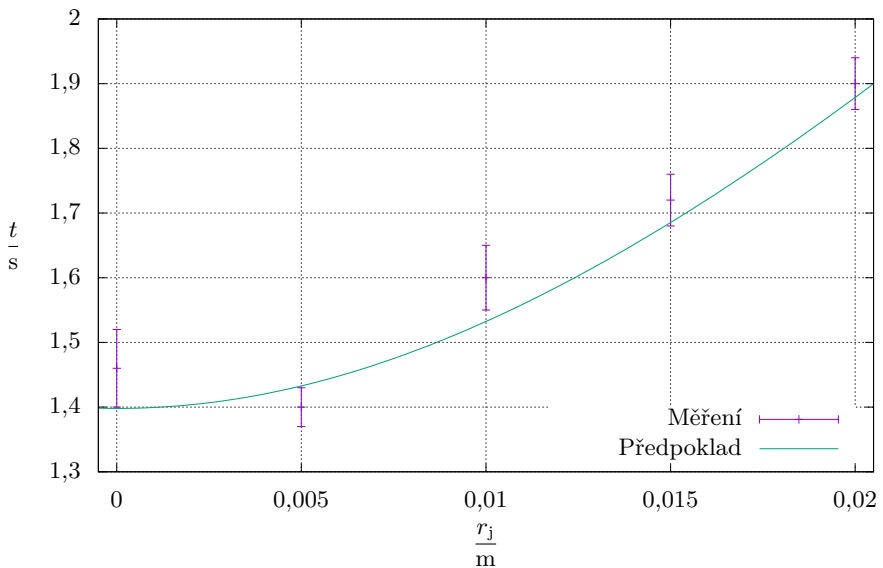
²Jak na to se dozvíte na našich webových stránkách v sekci Hokus Pokus.

uvažovat poloměr pomyslné kružnice uprostřed tloušťky našeho skutečného plastelínového kola.³ Ve vzorci si můžete všimnout, že pokud poloměr plastelínového prstence bude nulový, „zbude“ pouze moment setrvačnosti joja. Nastane tedy situace, kdy na joju žádná plastelína není.

Poloměr plastelíny	Průměrný naměřený čas/s	Odchylka/s
$r_{p0} = 0,0$ cm	1,46	0,06
$r_{p1} = 0,5$ cm	1,40	0,03
$r_{p2} = 1,0$ cm	1,60	0,05
$r_{p3} = 1,5$ cm	1,72	0,04
$r_{p4} = 2,0$ cm	1,90	0,04

Tab. 1: Výsledky měření

Hmotnost použitého joja je $m_j = 22$ g, poloměr středové tyčky $r_t = 0,5$ cm a poloměr joja $r_j = 2$ cm.



Obr. 1: Výsledné naměřené hodnoty času

Jak je z grafu vidět, výsledky měření teoretickému předpokladu odvozenému na začátku odpovídají pouze chováním, nikoliv hodnotou, ačkoliv u některých se teoretická hodnota nachází v intervalu odchylek. Při výpočtu teoretického předpokladu jsme totiž zanedbali některé významné vlastnosti, jako například tření o provázek, nenulovou tloušťku plastelíny (ovlivní

³Nadšenci si mohou na vlastní nebezpečí sami zkusit odvodit vzorec, který by zohlednil nezanedbatelnou tloušťku plastelíny.

moment hybnosti), fakt, že osa otáčení joja je lehce posunutá od jeho osy souměrnosti, fakt, že při odvíjení provázku začínáme na větším poloměru, protože je nenulově tlustý, a poloměr osičky se, jak jojo klesá, zmenšuje. Dále jsme zanedbali ještě nespočet dalších jevů, které ovlivňují chování joja.

Také jsme při výpočtu teoretických hodnot počítali s tím, že změřené parametry joja (jeho hmotnost, poloměr. . .) jsme naměřili přesně, což se reálně nestalo.

Zároveň značné chyby způsobí i naše pozornost. Stojíme-li dva metry nad koncem provázku a jojo se po klesnutí ihned začne vracet, špatně se odhaduje, kdy je vlastně opravdu v nejnižším bodě. Ono zmiňované škubnutí lanka totiž není tak výrazné, aby odhad usnadňovalo. To také mohlo způsobit, že první naměřená hodnota je výrazně větší, než druhá, ačkoliv podle teorie by to mělo být naopak.

Závěr

Naměřili jsme čas, za který se jojo odvine z provázku, a to jak pro jojo samotné, tak i pro jojo s přilepenou zátěží v podobě plastelíny různě daleko od středu.

Podle teoretického předpokladu by se jojo bez plastelíny mělo odvíjet po nejkratší čas, avšak výsledek měření předpokladu neodpovídá. Můžeme se jen domnívat, zda to bylo způsobené nepřesnostmi měření nebo zanedbáním spousty faktorů ve výpočtu.⁴ Jojo se bez plastelíny odvinulo za čas $t_0 = (1,46 \pm 0,06)$ s. Ostatní hodnoty odpovídají předpokladu, že čas se vzdáleností zátěže od osy souměrnosti joja poroste. Žádná se však, jak je vidět z grafu, nerovná hodnotě vypočtené. I zde může být odchýlení se způsobené nepřesnostmi v měření, avšak pro některá měření leží teoretická hodnota alespoň v intervalu odchylek. Spíš tedy neshodu teorie s praxí připíšeme zanedbáním při odvozování vzorce. Jojo s plastelínou nejbliže středu se odvinulo za čas $t_1 = (1,40 \pm 0,03)$ s, dále čas se vzdáleností rostl, $t_2 = (1,60 \pm 0,05)$ s, $t_3 = (1,72 \pm 0,04)$ s a jojo s plastelínou nej dál od středu se odvinulo za $t_4 = (1,90 \pm 0,04)$ s.

Pomalého roztáčení při závaží daleko od osy otáčení využívají například setrvačníky, které můžete potkat i ve spoustě hraček, třeba oblíbených autíček. Podíváte-li se zpátky na vzorečky energií v teoretickém úvodu, můžete si všimnout, že čím větší moment setrvačnosti, tím více energie se uloží v podobě té otáčivé (na posuvnou pak „nezbude“, protože potenciální před puštěním joja máme omezené množství, tedy rychlost posouvání musí být nižší). Když se pak setrvačník někam kutálí, tření mu ubírá energii posuvnou, která se doplní ze „zásob“ té rotační a setrvačník se vydrží otáčet déle.

Soňa Husáková

sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

⁴Může to znít, že zanedbávání je špatně, ale mnohdy musíme některé věci zanedbat, abychom vůbec byli schopni se svými znalostmi matematiky příklad spočítat. Každé zanedbání však, jak můžete vidět, přináší oddálení se od skutečnosti.