Výfučtení: Vrhy

Vrh je pohyb tělesa v gravitačním poli, při kterém na těleso působí jen gravitační síla a odporová síla prostředí. Druhou zmíněnou sílu mnohdy pro jednoduchost zanedbáváme mimo jiné proto, že má při nízkých rychlostech malý vliv. Typicky se bavíme o vrzích v gravitačním poli Země při rychlostech výrazně menších než první kosmická rychlost. Tím, že zanedbáme odporové síly prostředí (na Zemi se obvykle jedná o vzduch), můžeme vrh považovat za probíhající ve vakuu. Je tedy snadno popsatelný jednoduchými matematickými vztahy. Často také pro úplnost uvažujeme, že gravitační pole je tzv. *homogenní*, což znamená, že působí ve všech místech stejně. Takto o něm můžeme mluvit například při povrchu Země, kde nepoznáme, že je zakřivený (gravitační síly přece jen míří do středu naší planety, ale na tak malém kousku Země se to neprojeví).

Uvažujme hmotný bod (těleso – například míč, jehož rozměry jsou zanedbatelné, a proto jsme ho nahradili bodem v prostoru, nejčastěji to bývá těžiště), kterému v gravitačním poli Země udělíme počáteční rychlost v_0 ve směru charakterizovaném úhlem α (α je *elevační* úhel, tedy úhel mezi rovinou země a směrem počáteční rychlosti bodu). Na tento hmotný bod dále působí už jen neměnící se tíhová síla $F_\mathrm{g} = mg$ ve svislém směru. Klíčové je uvědomit si, že hmotný bod koná dva pohyby, které jsou na sobě nezávislé. V první řadě je to rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí v_0 ve vodorovném směru, a pak také rovnoměrně zrychlený volný pád ve svislém směru. Je to dáno tím, že na bod nepůsobí žádné síly ve vodorovném směru, a tak v tomto směru musí mít stále stejnou rychlost. Naopak, ve směru svislém bod urychluje tíhová síla, proto se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb dolů (volný pád).

Když se zamyslíme nad jednotlivými veličinami, které jsou pro popis pohybu hmotného bodu důležité, uvědomíme si, že průběh vrhu bude nejvíce ovlivňovat právě takzvaný elevační úhel α, který svírá směr počáteční rychlosti v_0 s vodorovnou rovinou. V závislosti na tomto úhlu rozlišujeme celkem 5 základních typů vrhů.

- Vrh svislý vzhůru ($\alpha = 90^\circ$)
- Vrh šikmý vzhůru ($90^\circ > \alpha > 0^\circ$)
- Vrh vodorovný ($\alpha = 0^\circ$)
- Vrh šikmý dolů ($0^\circ > \alpha > -90^\circ$)
- Vrh svislý dolů ($\alpha = -90^\circ$)

Díky symetrii se dokážeme vypořádat se situací pro úhel od 0 do 360 stupňů. Vrhy se snažíme obvykle popsat za účelem zjištění konkrétních parametrů. Nad rámec základních charakterizujících veličin nás může zajímat například okamžitá výška h nad zemí, maximální výška h_max nad zemí a horizontální vzdálenost d, kam bod doletí. Nesmíme zapomínat na čas t, který těleso letí a ke kterému danou situaci obvykle vztahujeme. Vyzbrojeni základní teorií se můžeme podívat na jednotlivé typy vrhů.

Svislý vrh vzhůru a dolů

U svislého vrhu je elevační úhel $\alpha = 90°$ a odpovídá např. případu, kdy něco vyhodíme nad hlavu a snažíme se, aby předmět dopadl zpátky do nijak nepřesunuté ruky, tudíž se hmotný bod pohybuje v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ kolmo k vodorovné rovině. Hmotný bod při svislém vrhu bude mít také trajektorii kolmou k vodorovné rovině, protože takový hmotný bod bude mít pouze vertikální rychlost. U tohoto typu vrhu nás mohou zajímat tyto veličiny:

- Doba výstupu $t_\mathrm{v} = \dfrac{v_0}{g}$.

  Tento matematický vztah snadno odvodíme ze vztahu mezi zrychlením a rychlostí pro rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0, za který můžeme v tomto případě pohyb hmotného bodu až do jeho zastavení považovat.

- Doba letu $t_\mathrm{d} = 2t_\mathrm{v}$.

  Po zastavení hmotného bodu ve výšce h_max začne hmotný bod opět okamžitě zrychlovat v opačném směru. Výstup a sestup jsou zaměnitelné pohyby. Kdybychom si záznam sestupu nahráli a pustili pozpátku, bude se nám zdát, že sledujeme výstup. Než se bude opět nacházet v počáteční poloze, uplyne dvojnásobek doby výstupu.

- Maximální výška $h_\mathrm{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

  Poslední matematický vztah nejsnadněji odvodíme ze zákona zachování energie, protože víme, že kinetická energie na počátku vrhu se bude rovnat potenciální energii ve výšce h_max, neboť tam bod kinetickou energii nemá. Rovnice zákona zachování energie pak vypadá takto:

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_\mathrm{max}$$

Na závěr se krátce zamyslíme nad velmi podobným svislým vrhem dolů. Koncept doby letu, doby výstupu a maximální výšky ztrácí smysl. V čase t se bude hmotný bod nacházet ve vzdálenosti

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}mv^2$$

pod místem hodu, kde rychlost musí mít hodnotu $v = v_0 + gt$. Pohyb probíhá v souladu se zákony rovnoměrně zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí (dokud bod případně nenarazí na zem).

Vodorovný vrh

Při vodorovném vrhu je úhel $\alpha = 0°$. Aby měly naše úvahy smysl, je zřejmé, že hmotný bod musí svůj pohyb začínat v nějaké počáteční výšce h. Pro tento typ vrhů si odvodíme několik dalších matematických vztahů, pomocí kterých je budeme společně s již dříve odvozenými popisovat:

- Doba letu $t_\mathrm{d} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Dobu letu určíme jednoduše, protože víme, že výška h se rovná dráze letu, kterou těleso urazí volným pádem za čas letu t_d. Ve svislém směru má těleso z definice svislého vrhu nulovou počáteční rychlost.

$$h = \frac{1}{2}gt_\mathrm{d}^2 \implies t_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Horizontální vzdálenost místa dopadu od místa udělení počáteční rychlosti. $d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

  Tentokrát si vzpomeneme na nezávislost jednotlivých pohybů. Předtím, než hmotný bod spadne na zem, může se pohybovat v horizontálním směru po čas t_d. Celou dobu se také v tomto směru pohybuje rychlostí v_0 (i když ve svislém směru stále zrychluje), proto bude celková uražená vzdálenost v horizontálním směru před okamžikem dopadu právě $d = v_0 t_\mathrm{d}$.

- Dále nás může zajímat rychlost v okamžiku dopadu $v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

  Uvedený vzorec lze odvodit několika způsoby, my si ukážeme dva nejjednodušší.

  Pomocí Pythagorovy věty a horizontální a vertikální rychlosti za použití dříve odvozených vztahů:

  $$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_\mathrm{x}^2 + v_\mathrm{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt_\mathrm{d})^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

  Pomocí zákona zachování energie:

  $$\frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

Šikmý vrh vzhůru

Než přistoupíme k závěru tohoto Výfučtení, podíváme se na obecnější situaci, ve které nebude platit, že by byl směr počáteční rychlosti ve vztahu k vodorovné rovině v nějaké speciální poloze. Hmotnému bodu je udělena počáteční rychlost v_0 svírající s vodorovnou rovinou úhel $90^\circ > \alpha > 0^\circ$. Šikmému vrhu dolů se v tomto textu podrobněji věnovat nebudeme, zájemcům o hlubší pochopení problematiky vrhů doporučujeme studijní text pro řešitele Fyzikální olympiády a další zájemce o fyziku.[1]

Trajektorií vodorovného i šikmého vrhu je parabola, protože polohu hmotného bodu popisujeme v obou případech vztahem, který je ve skutečnosti předpisem kvadratické funkce. K tomu, abychom mohli se šikmými vrhy dále pracovat, si budeme muset odvodit, jak se počítají horizontální a vertikální polohy a rychlosti. Začneme s horizontální rychlostí.

Horizontální rychlost se za celou dobu letu nemění a my ji můžeme spočítat z počáteční rychlosti a úhlu α, který svírá vektor počáteční rychlosti tvořící přeponu pravoúhlého trojúhelníku s vektorem horizontální rychlosti. Vektor horizontální rychlosti je v tomto pravoúhlém trojúhelníku odvěsnou. Díky tomu je možné spočítat velikost horizontální rychlosti také pomocí goniometrických funkcí v trojúhelníku tvořeném rychlostí a její vodorovnou a svislou složkou. Pro ty, kteří s nimi ještě nejsou zvyklí pracovat, můžeme uvést i rozpis jejich hodnot do složek.

$$v_\mathrm{x} = v_0 \cos\alpha = v_0 \left(\frac{v_{0\mathrm{x}}}{v_0}\right)$$

[1] `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/vrhy.pdf`

Nalézt vztah pro horizontální vzdálenost už pak není obtížné.

$$d = v_{\mathrm{x}} t = v_0 t \cos \alpha$$

Při odvozování vztahu pro výpočet vertikální rychlosti budeme používat ten stejný pravoúhlý trojúhelník, jen vektor této rychlosti bude protilehlá odvěsna (tudíž použijeme sinus) a nesmíme zapomenout odečíst rostoucí rychlost v důsledku působení tíhové síly. Výsledný vztah není nic jiného než běžný vztah pro výpočet rychlosti rovnoměrně zpomaleného pohybu.

$$v_{\mathrm{y}} = v_0 \sin \alpha - gt$$

Analogicky jako v horizontálním směru nalezneme vztah pro vertikální vzdálenost. Dostáváme opět povědomý vztah pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu.

$$h = v_0 t \left(\frac{v_{0\mathrm{y}}}{v_0} \right) - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Podobně jako v předchozích případech si na závěr odvodíme vztahy pro výpočet charakteristických parametrů.

- Souřadnice vrcholu paraboly.

  Když si uvědomíme, že těleso bude na vrcholu v ten moment, kdy jeho vertikální rychlost bude nulová, můžeme lehce spočítat čas, za který těleso vystoupá na vrchol.

  $$v_{\mathrm{y}} = v_0 \sin \alpha - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{v}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

  Odvození souřadnic vrcholu by na základě předchozího textu nemělo být složité, a tedy snadno zvládnutelné, proto jej pro tentokrát necháváme na každém jednotlivém čtenáři a vrhneme se na odvození souřadnic dalšího důležitého bodu.

- Souřadnice bodu dopadu.

  Vše, co nám k odvození hledaného vztahu stačí, je vědět, že při šikmém vrhu vzhůru s nulovou počáteční výškou bude čas letu t_{d} opět dvakrát větší než čas potřebný k dosažení vrcholu trajektorie. Víme, že v okamžiku dopadu bude výška nulová. Na závěr dosadíme vztah pro čas výstupu.

  $$d = 2 v_0 t_{\mathrm{v}} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{v}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

  Vidíme, že nejdále při šikmém vrhu vzhůru dohodíme, když budeme házet pod úhlem 45°, protože pro tuto hodnotu úhlu je součin $\sin \alpha \cos \alpha$ největší ($= 1$). Pro zajímavost uvádíme, že při započítání odporu vzduchu by byl tento úhel o něco menší, totiž přibližně 42°.

A co realistický případ?

Vrhy tak, jak jsme se jimi doteď zabývali, byly všechny modelovány bez odporové síly prostředí a v homogenním gravitačním poli. Není bez zajímavosti si říct také širší kontext teorie vrhů, pokud některý z předpokladů nedodržíme.

Vrhy v nehomogenním gravitačním poli jsou doménou *orbitální mechaniky*, tedy nauky o pohybu kosmických plavidel v gravitačním působení nebeských těles. Naopak u nebeských těles samotných (například teorie oběhu Země kolem Slunce) mluvíme o *nebeské mechanice*. Jejich spojitost s vrhy se stane zřejmější, když si uvědomíme, že raketa, která zaujala stálou uzavřenou oběžnou dráhu nad povrchem planety, musela být vlastně vržena svými motory do kosmického prostoru takovou rychlostí, že by se její bod dopadu měl díky kulatosti planety s jejím povrchem minout. Gravitační působení planety raketu neustále stahuje do jejího těžiště, čímž může její trajektorii uzavřít například do kruhu.

Pokud vedeme vrh v prostředí, u kterého nemůžeme zanedbat jeho odpor (např. hod ping-pongového míčku na velkou vzdálenost ve vzduchu), pak se každé těleso pohybuje trochu jinak. Zpravidla je bod dopadu blíže, než je tomu u bezodporového případu, protože je těleso po celou dobu pohybu zpomalováno, a to tím více, čím rychleji se pohybuje. Důležitým pojmem k zapamatování, je *balistická křivka*, což je trajektorie každého tělesa vrženého odporujícím prostředím, která mimochodem neodpovídá parabole, ani žádné jiné pojmenované funkci.

Jako zajímavost můžeme uvést, že i když jsou vrhy těles v odporujícím prostředí velmi aplikovanou disciplínou, napsat přesné řešení rovnic pro jejich pohyb je v tomto případě velmi složité, i když tyto výsledky jsou již nějakou dobu známy. V mnoha případech je stále jednodušší a šířeji aplikovatelné používat počítačových simulací.[2]

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Martin Kysela
`martink@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] První počítače byly vyvíjeny právě pro rychlý výpočet potřebných parametrů pro přesnou střelbu z lodních kanónů, což je ukázkový případ šikmého vrhu.