Úloha V.5 ... Galileův teploměr

7 bodů; (chybí statistiky)

Všichni známe klasický teploměr, který měří teplotu pomocí rtuti stoupající díky teplotní roztažnosti do trubičky se stupnicí. Existují však i jiné teploměry, například bimetalový nebo vyzařovací. My si zde představíme takzvaný Galileův teploměr, který se skládá z válce s vodou, ve kterém plovou kuličky o různé hustotě. Díky teplotní roztažnosti se s teplotou mění hustota vody, a tak při různých teplotách se ve vodě volně vznáší různé kuličky.

1. *Předpokládejme, že pro objem vody v závislosti na teplotě platí vztah $V(t) = V_{20}(1 + \beta(t - 20\,°\mathrm{C}))$, kde V_{20} je objem za teploty $20\,°\mathrm{C}$ a $\beta = 0{,}21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ je koeficient objemové roztažnosti.[1] Nalezněte vztah pro hustotu vody v závislosti na teplotě.*

2. *Předpokládejme, že jako ukazatele používáme skleněné kuličky o vnějším průměru $1{,}5\,\mathrm{cm}$ a tloušťce stěny $0{,}5\,\mathrm{mm}$. Jakou hmotnost vody musíme do kuličky dodat, aby se volně vznášela ve vodě o teplotě $35\,°\mathrm{C}$? Hustota vody za teploty $20\,°\mathrm{C}$ je $\varrho_{20} = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a hustota skla $2\,400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Teplotní roztažnost skla a hustotu zbylého obsahu kuličky zanedbejte.*

3. *Pro ukazatel na $20\,°\mathrm{C}$ chceme použít stejnou kuličku se stejným množstvím kapaliny uvnitř, a tak místo vody použijeme roztok soli. Jaký hmotnostní zlomek musí tento roztok mít? Hmotnostní zlomek je podíl hmotnosti rozpuštěné látky ku hmotnosti roztoku.*

1. Hustotu vody vypočítáme jako podíl její hmotnosti ku objemu. Představme si tedy nějakou nádobu s vodou o hmotnosti m. Nyní předpokládejme, že hmotnost vody v nádobě se změnou teploty nemění, neboli voda se nevypařuje ani na ní nekondenzuje vodní pára z okolního vzduchu. Tento předpoklad je v běžných podmínkách poměrně dobře splněn, pokud se nedostaneme k extrémně vysokým teplotám. Vztah pro objem kapaliny v závislosti na teplotě máme, můžeme proto vyjádřit závislost hustoty.

   $$\varrho(t) = \frac{m(t)}{V(t)} = \frac{m}{V_{20}\,(1 + \beta(t - 20\,°\mathrm{C}))} = \frac{\varrho_{20}}{(1 + \beta(t - 20\,°\mathrm{C}))}$$

   Jak jsme již zmiňovali, tento vztah platí jen pokud teplota není příliš vysoká a my můžeme odpařování vody zanedbat. Stejně tak má své omezení platnosti i směrem k nižším teplotám, protože voda se chová poněkud rozdílně od jiných kapalin a nejvyšší hustotu má při $4\,°\mathrm{C}$, pro nižší teploty pak již hustota opět klesá. Tento jev se nazývá *anomálie vody* a má veliký význam v přírodě, kdy v zimě může být hladina zamrzlá, zatímco u dna je voda teplejší (o teplotě právě $4\,°\mathrm{C}$), a můžou v ní tak přežívat ryby.

   Poznámka: Možná jste se v učebnicích či na internetu setkali i s jinou podobou vztahu pro hustotu, a to $\varrho(t) = \varrho_{20}(1 - \beta(t - 20°\mathrm{C}))$. To je dáno tím, že k odvození této linearizované podoby byl použit přibližný vztah

   $$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x\,,$$

   který platí pro velmi malá x blízká nule. S takovýmito přibližnými vztahy se ve fyzice setkáváme často a mohou nám velmi zjednodušit výpočty, my se však pro další úkoly budeme držet prvního přesného vztahu.

[1] Koeficient máme vztažený k základní jednotce SI, což je pro teplotu kelvin, protože nás ale zajímá rozdíl teplot, můžeme klidně počítat se stupni Celsia.

2. Kulička se bude ve vodě volně vznášet, pokud bude v rovnováze sil, tedy tíhová síla kuličky bude stejná jako její vztlaková síla. Tuto rovnost můžeme zapsat rovnicí, kde na levé straně vystupuje tíhová síla a na pravé vztlaková síla z Archimédova zákona.

$$(m_{\mathrm{kul}} + m_{\mathrm{vody}})\, g = V_{\mathrm{kul}} \varrho_{35} g$$

Tuto rovnici můžeme nyní vydělit tíhovým zrychlením a vyjádřit veličiny, které v ní vystupují. Hmotnost skleněné kuličky vypočítáme jako součin jejího objemu a hustoty skla. Objem skla vypočítáme jako rozdíl objemu celé kuličky a jejího vnitřního objemu, přičemž využíváme vztah pro objem koule $V = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{skla}} \varrho_{\mathrm{skla}} + m_{\mathrm{vody}} &= V_{\mathrm{kul}} \frac{\varrho_{20}}{(1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C}))} \\ \frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} + m_{\mathrm{vody}} &= \frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{out}}^3 \frac{\varrho_{20}}{(1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C}))} \\ m_{\mathrm{vody}} &= \frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 \frac{\varrho_{20}}{(1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C}))} - \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} \right) \end{aligned}$$

Nyní už zbývá jen dosadit číselně. Vnější poloměr r_{out} bude polovina průměru, tedy 0,75 cm, a vnitřní průměr bude menší o tloušťku skla, tedy $r_{\mathrm{in}} = 0{,}70\,\mathrm{cm}$.

$$m_{\mathrm{vody}} \doteq 0{,}965\,\mathrm{g}$$

Do kuličky musíme dolít přibližně 0,965 g vody.

3. Když jsme v předchozím případě počítali hmotnost vody, nikde jsme během výpočtu nepoužili předpoklad, že se jedná právě o vodu, takže můžeme obdobný vzorec použít i k výpočtu potřebné hmotnosti roztoku, kde rozdíl teplot je nulový, takže potřebná hmotnost roztoku je

$$m_{\mathrm{roztoku}} = \frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} - \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} \right) \doteq 0{,}971\,\mathrm{g}\,.$$

Abychom zjistili hmotnost soli, kterou musíme do vody přimíchat, odečteme od této hmotnosti roztoku hmotnost vody z předchozího úkolu (protože v kuličkách má být stejně vody).

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{soli}} &= \frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} - \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} \right) - \frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 \frac{\varrho_{20}}{(1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C}))} - \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} \right) \\ m_{\mathrm{soli}} &= \frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} \frac{\beta(t - 20^\circ\mathrm{C})}{(1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C}))}\,. \end{aligned}$$

Hmotnostní koncentraci proto vypočítáme jako podíl hmotnosti soli a hmotnosti roztoku.

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} \frac{\beta(t - 20^\circ\mathrm{C})}{1 + \beta(t - 20\,^\circ\mathrm{C})} \right) : \left(\frac{4}{3}\pi \left(r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} - \left(r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3\right) \varrho_{\mathrm{skla}} \right) \right) = \\ &= \frac{r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} \beta(t - 20^\circ\mathrm{C})}{(1 + \beta(t - 20^\circ\mathrm{C}))\left(r_{\mathrm{out}}^3 \varrho_{20} - (r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3)\, \varrho_{\mathrm{skla}}\right)} \doteq 0{,}57\,\%\,. \end{aligned}$$

Roztok soli tak musí mít hmotnostní koncentraci přibližně 0,57 %. Jak jsme si mohli všimnout, hmotnostní koncentrace je velmi malá, a pokud bychom zaokrouhlovali a dosazovali číselně příliš brzy, vyšel by nám výsledek příliš špatně. Zároveň vidíme, že hmotnostní rozdíly jsou tak malé, že vyrábět takto přesné kuličky je technicky velmi složité, což je hlavním důvodem, proč se tento typ teploměrů nerozšířil.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.