Úloha V.2 ... Hindenburg

6 bodů; (chybí statistiky)

Ve třicátých letech minulého století Němci vyráběli vzducholodě. Největší a nejslavnější z nich byla vzducholoď Hindenburg – 245 m dlouhá a 45 m v průměru. Měla být plněna heliem, ale kvůli ekonomické blokádě USA byla naplněna vodíkem. Uvažujme, že měla tvar elipsoidu, ve kterém podobně jako u koule namísto $V = (4/3)\pi r^3$ platí $V = (4/3)\pi abc$, kde a, b a c jsou rozměry elipsy ve třech hlavních osách. Jakou hmotnost nákladu (včetně samotné konstrukce) by unesla tato vzducholoď naplněná vodíkem a jakou při naplnění heliem? Potřebné údaje si vyhledejte v tabulkách.

Jak jsme si už ujasnili v zadání úlohy, jako tvar vzducholodě budeme uvažovat elipsoid. Ale co to vlastně je? Představme si kouli v prostoru. Tu začneme natahovat (nebo stlačovat) ve směru některé z os – deformujeme ji. Můžeme si všimnout, že naše vzducholoď je „roztažená" („protažená") pouze v jednom směru. Takovému tělesu říkáme rotační elipsoid, jelikož může vzniknout rotací elipsy kolem jedné ze svých os.[1] Dále musíme dávat pozor, abychom dosadili správné rozměry. V zadání sice máme délku a průměr objektu, do rovnice ale musíme dosadit poloviční hodnoty (stejně jako si nesmíme plést průměr a poloměr). Po této úvaze už víme, že $a = 122{,}5\,\mathrm{m}$, $b = 22{,}5\,\mathrm{m}$ a $c = 22{,}5\,\mathrm{m}$.

Nyní ale zpět k fyzice. Pokud chceme spočítat maximální nosnost Hindenburgu (často nazývaná jako kritická nosnost), musíme si uvědomit, co by se dělo, kdyby byla vzducholoď naložena na maximální možnou hmotnost. Vztlaková síla F_{vz} bude tehdy rovna součtu tíhové síly plynu ve vzducholodi F_{p} a tíhové síly nákladu F_{x} podle druhého Newtonova zákona. Z této úvahy si můžeme složit jednoduchou rovnici, ve které vztlakovou sílu vyjádříme z Archimédova zákona:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{vz}} &= F_{\mathrm{p}} + F_{\mathrm{x}}\,, \\ \varrho_{\mathrm{v}} g V &= m_{\mathrm{p}} g + m_{\mathrm{x}} g\,, \\ \varrho_{\mathrm{v}} g V &= g(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{x}})\,, \\ \varrho_{\mathrm{v}} V &= m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{x}}\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho_{\mathrm{v}} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu,[2] $V = (4/3)\pi abc$ je objem Hindenburgu a $m_{\mathrm{p}} = V\varrho_{\mathrm{p}}$, resp. m_{x} je hmotnost plynu, resp. nákladu. Můžeme si také povšimnout, že se nám v průběhu upravování rovnice vykrátilo tíhové zrychlení g. To je velice zajímavý fakt, se kterým se při porovnávání sil setkáváme velice často.

Nyní můžeme dosadit výpočet hmotnosti plynu a vyjádřit z rovnice požadované m_{x}:

$$\varrho_{\mathrm{v}} V = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{x}} \quad\Rightarrow\quad m_{\mathrm{x}} = V\varrho_{\mathrm{v}} - V\varrho_{\mathrm{p}} = V(\varrho_{\mathrm{v}} - \varrho_{\mathrm{p}}) = \frac{4}{3}\pi abc(\varrho_{\mathrm{v}} - \varrho_{\mathrm{p}})\,.$$

Jediné, co nám zbývá, je dosadit hodnoty pro oba případy. V případě vodíku, pro nějž platí $\varrho_{\mathrm{p}} = \varrho_{\mathrm{H_2}} = 8{,}99 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, nám vyjde:

$$m_{\mathrm{x}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 122{,}5\,\mathrm{m} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m} \cdot (1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - 8{,}99 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}) \doteq 288{,}4\,\mathrm{t}\,.$$

U helia činí hustota $\varrho_p = \varrho_{\mathrm{He}} = 0{,}179\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a výsledek vypadá takto:

$$m_{\mathrm{x}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 122{,}5\,\mathrm{m} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m} \cdot (1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - 0{,}179\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}) \doteq 265{,}2\,\mathrm{t}\,.$$

[1] Definici elipsy přesnější než „protažený kruh" se sice dozvíte na střední škole, ale už teď si o nich můžete přečíst více ve Výfučtení z 3. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_6.pdf`.

[2] Hustota vzduchu je závislá na mnoha faktorech, především teplotě a tlaku; uvedená teplota platí pro normální tlak $p_{\mathrm{n}} = 1\,013{,}25\,\mathrm{hPa}$ a teplotu $t = 21\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Nyní víme, že Hindenburg unesl o asi 23 tun více nákladu díky vodíku. Tento vysoce vznětlivý prvek se mu ale dne 6. 5. 1937 stal osudným, když se celý kolos snesl v ohnivém oblaku na zem.

Miroslav Jarý
Jason@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.