

Úloha III.C ... Viktor s Pascalinou

7 bodů; (chybí statistiky)

1. Viktor si postavil hydraulický lis. Průřez válce prvního pístu je $S_1 = 50 \text{ cm}^2$, průřez válce druhého pístu $S_2 = 0,003 \text{ m}^2$. Na druhý píst Viktor umístil závaží o hmotnosti $m_2 = 200 \text{ g}$.
- Spočítejte, o kolik narostl po položení závaží na píst tlak v kapalině, pokud je první píst ukotvený (nemůže se pohybovat).
 - Jakou silou musí Viktor působit na první píst, aby závaží začalo stoupat?
 - Jakou práci Viktor vykoná, pokud chce závaží zvednout o 10 cm ?
2. Představte si, že jste Pascal a musíte umocnit výraz $(2a + b + 2)$ na pátou. Máte pouze kalkulačku schopnou sčítat, odčítat a násobit a papír s tužkou. Nemusíte sice použít svoji nejsilnější zbraň, svůj trojúhelník, ale bude se vám skutečně hodit. Dokážete to?

1. Vždy předtím, než začneme řešit nějaký problém, je dobré si převést veličiny na základní jednotky – $S_1 = 0,005 \text{ m}^2$, $S_2 = 0,003 \text{ m}^2$, $m = 0,2 \text{ kg}$ a $h = 0,1 \text{ m}$.

- (a) Zvýšení tlaku bude způsobeno položením závaží na druhý píst, tlak tedy bude roven

$$p_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{m_2 g}{S_2} = \frac{0,2 \cdot 9,81}{0,003} \text{ Pa} = 654 \text{ Pa}.$$

- (b) Jestli Viktor chce začít zvedat závaží pomocí prvního pístu, tak bude muset nejdříve vyrovnat tlak na druhém pístu:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ \frac{F_1}{S_1} &= \frac{F_2}{S_2}, \\ F_1 &= \frac{m_2 g}{S_2} S_1 = \frac{0,2 \cdot 9,81}{0,003} \cdot 0,005 \text{ N} = 3,27 \text{ N}. \end{aligned}$$

- (c) Pro vykonanou práci platí, že se jedná o součin síly, kterou bylo těleso zvedané, a výšky, o kterou se zvedlo, tedy

$$W = F_2 h = m_2 g h = 0,2 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \text{ J} = 0,1962 \text{ J}.$$

2. Z Výfučtení víme, že pokud potřebujeme něco umocnit, tak se vždy díváme na $(n + 1)$ -ní řádek Pascalova trojúhelníku, jelikož chceme závorku umocnit na pátou, tak se podíváme na 6. řádek:

$$1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$$

Při umocnění závorky $(2a + b + 2)$ můžeme použít trik, ve kterém budeme brát $b + 2$ jako jeden člen a potom ho následně znovu roznásobíme. Označíme si je tedy: $2a \rightarrow c$, $b + 2 \rightarrow d$ a rovnou dosadíme jednotlivé členy v trojúhelníku.

$$(2a + b + 2)^5 = (c + d)^5 = 1 \cdot c^5 + 5 \cdot c^4 d + 10 \cdot c^3 d^2 + 10 \cdot c^2 d^3 + 5 \cdot c d^4 + 1 \cdot d^5$$

Následně za proměnné dosadíme

$$1 \cdot 32a^5 + 5 \cdot 16a^4(b+2) + 10 \cdot 8a^3(b+2)^2 + 10 \cdot 4a^2(b+2)^3 + 5 \cdot 2a(b+2)^4 + 1 \cdot (b+2)^5$$

Vynásobíme členy a zároveň roznásobíme člen $b+2$ podle stejného pravidla

$$\begin{aligned} &32a^5 + 80a^4(b+2) + 80a^3(b^2 + 4b+4) + 40a^2(b^3 + 6b^2 + 12b + 8) + \\ &+ 10a(b^4 + 8b^3 + 24b^2 + 32b+16) + b^5 + 10b^4 + 40b^3 + \\ &+ 80b^2 + 80b + 32 \end{aligned}$$

a jako finální krok roznásobíme závorky a získáme mnohočlen o 21 členech

$$\begin{aligned} &32a^5 + 80a^4b + 160a^4 + 80a^3b^2 + 320a^3b + 320a^3 + 40a^2b^3 + 240a^2b^2 + \\ &+ 480a^2b + 320a^2 + 10ab^4 + 80ab^3 + 240ab^2 + 320ba + 160a + b^5 + 10b^4 + 40b^3 + \\ &+ 80b^2 + 80b + 32. \end{aligned}$$

Je vidět, že počítání takového příkladu rukou je velmi zdlouhavé a delší členy by zabraly mnoho času, protože zde není rychlý způsob zjistit, jestli jste došli ke správnému výsledku; proto je někdy výhodné použít výpočetní stránky např. <https://www.wolframalpha.com>, kde si můžete výsledek rychle zkontrolovat, ale pamatujte, že nejdůležitější část tohoto příkladu nebyl výsledek, nýbrž jeho postupné počítání.

Patrik Kašpárek

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.