Úloha III.5 ... Šemík

6 bodů; (chybí statistiky)

Při záchraně neumětelského vladyky Horymíra před trestem smrti se jeho věrný kůň Šemík v rámci roubených hradeb Vyšehradu mohl rozbíhat na délce až 300 m, poté ale skočil z výšky 65 metrů do Vltavy (uvažujte vodorovný vrh).

1. *Za jak dlouhou dobu od počátku skoku Šemík dopadl do Vltavy?*
2. *Jakou rychlostí Šemík opouštěl hradby Vyšehradu, pokud víme, že do vody dopadl 60 m od místa skoku?*
3. *S jak velkým zrychlením se musel Šemík rozbíhat, aby dosáhl potřebné rychlosti? Je možné, aby se kůň takhle rychle rozběhl? Porovnejte například se zrychlením auta.*
4. *Pod jakým úhlem dopadl Šemík do vody?*

1. Pro začátek si musíme uvědomit, že vodorovný vrh se skládá ze dvou současně prováděných pohybů (odpor vzduchu zanedbáváme), a to z volného pádu, a z pohybu rovnoměrného přímočarého. Proto dobu pádu Šemíka vypočítáme ze vzorce pro volný pád:

   $$s = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

   Ten si upravíme na:

   $$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}\,.$$

   Po dosazení tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a uražené vzdálenosti rovné výšce pádu $s = 65\,\mathrm{m}$ nám vyjde čas $t = 3{,}64\,\mathrm{s}$.

2. Teď, když už známe čas vrhu a ze zadání víme, že vzdálenost místa dopadu od místa, kde Šemík začal skok, je 60 m, můžeme hravě spočítat Šemíkovu rychlost. Jak jsme si již řekli, vodorovný vrh je složen z volného pádu a pohybu rovnoměrného, a proto můžeme rychlost vypočítat ze vzorce pro výpočet rychlosti

   $$v = \frac{s}{t}\,.$$

   Dosadíme-li do vzorce minule vypočítaný čas t a Šemíkem uraženou vodorovnou vzdálenost $s = 60\,\mathrm{m}$, vyjde nám hledaná rychlost $v = 16{,}48\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

3. Abychom mohli spočítat Šemíkovo zrychlení, musíme nejprve určit, jak dlouho se rozbíhal. Víme, že pro výpočet rychlosti ze zrychlení platí vztah

   $$v = at_a\,.$$

   Dále budeme počítat i s dráhou, na které se Šemík rozbíhal a jejíž délka je 300 metrů. Pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu z nulové rychlosti platí vzorec

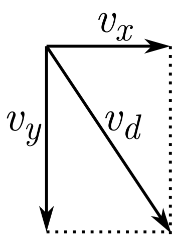
   $$s_a = \frac{1}{2}at_a^2\,.$$

Získali jsme 2 rovnice o dvou neznámých. Určíme tedy Šemíkovo zrychlení tak, že si vyjádříme čas t_a a rovnice upravíme.

$$t_a = \frac{v}{a}$$
$$s_a = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2$$
$$s_a = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$
$$a = \frac{v^2}{2s_a} \doteq 0{,}45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

Aby Šemík dosáhl potřebné rychlosti, musel by se rozbíhat se zrychlením $a \doteq 0{,}45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Tohoto zrychlení může kůň běžně dosáhnout, a dokonce může běžet i s větším zrychlením. Šemík měl v porovnání třeba s Mercedesem dvacetkrát menší zrychlení a průměrné auto má zrychlení přibližně $3{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což je zhruba sedmkrát větší než zrychlení Horymírova zachránce.

4. Pro výpočet úhlu, pod jakým Šemík dopadl do vody, musíme rozložit jeho rychlost v okamžiku dopadu v_d na vodorovnou a svislou složku. Vodorovnou složku známe – tato



Obr. 1: Rozklad rychlosti na složky

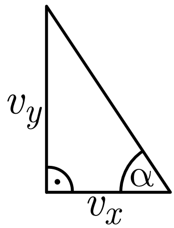
rychlost bude stejná jako rychlost, se kterou opouštěl hradby Vyšehradu, protože odporové síly působící na Šemíka můžeme zanedbat. Tedy:

$$v_\mathrm{x} = 16{,}48\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Svislou rychlost ve chvíli dopadu do Vltavy spočítáme jako rychlost volného pádu z úrovně hradeb. Víme, že Šemíkův skok trval před pádem do řeky $t = 3{,}64\,\mathrm{s}$ a po tuto dobu na něj působilo tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Spočítáme tedy svislou rychlost:

$$v_\mathrm{y} = gt = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 3{,}64\,\mathrm{s} \doteq 35{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Nyní známe obě složky výsledné rychlosti, které jsou na sebe kolmé, a tvoří tedy pravoúhlý trojúhelník. K určení úhlu v pravoúhlém trojúhelníku použijeme goniometrické funkce, v tomto případě konkrétně funkci tangens, která je v pravoúhlém trojúhelníku podílem protilehlé odvěsny ku přilehlé. S její pomocí můžeme dopočítat úhel dopadu α.



Obr. 2: Pravoúhlý trojúhelník pro výpočet úhlu dopadu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\mathrm{y}}{v_\mathrm{x}}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_\mathrm{y}}{v_\mathrm{x}}$$
$$\alpha \doteq 65^\circ$$

Šemík dopadl do Vltavy pod úhlem $\alpha \doteq 65^\circ$.

Marek Božoň
marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Lubor Čech
cech@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.