

Úloha III.4 ... Ktož jsou boží bojovníci

6 bodů; (chybí statistiky)

Bitvy u Domažlic v roce 1431, která byla součástí čtvrté křížové výpravy proti husitům, se účastnilo přes 120 000 kališníků. Všichni zpívali chorál „Ktož jsou boží bojovníci“ s intenzitou zvuku, kterou odhadneme na 80 dB ve vzdálenosti jednoho metru od každého pěvce.

Pro připomenutí, decibely fungují tak, že 0 dB odpovídá výkonu 10^{-12} W (což znamená $1/1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ W), 10 dB odpovídá výkonu 10^{-11} ($1/100\,000\,000\,000$) W, 20 dB odpovídá 10^{-10} W a tak dál. Kališníci zazpívali husitský chorál, který trvá 5 minut, čímž zahrli křížácká vojska.

1. Srovnajte práci vykonanou zpěvem s výstřelem z kuše (energie šípu z kuše je maximálně 150 J), abyste se přesvědčili o tom, jak efektivní neobvyklá husitská strategie byla.
2. Kolik z této „zpěvné“ práce fyzicky zasáhlo křížácké vojsko, které se nacházelo ve vzdálenosti jednoho tisíce metrů, pokud uvažujeme, že uchem přijatý výkon klesá – jako obvykle – s druhou mocninou vzdálenosti?

Před tím, než zde uvedeme řešení, se blíže podíváme na vhodný způsob, jak si lze vyžít poskytnuté číselné údaje v zadání. Zvuk je jev, který se šíří prostorem a má smysl u něj uvažovat veličiny jako intenzitu I , kterou měříme ve wattech na jednotku plochy, na kterou dopadá ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), anebo třeba celkový akustický výkon, který je měřen v prostých wattech (W) a může nám zase dát představu o celkové práci, kterou vykonaly hlasivky pěvců při šíření svého poselství do prostoru. Změny hodnot libovolné veličiny měříme obecně ve fyzice decibelovou stupnicí pro její praktičnost a všeobecnost. V akustice – nauce o zvuku – se dB ujalý k popisu hlasitosti, protože ta je přímo spjata s tím, jak hodně se vychyluje například tlak vzduchu, když jím prochází zvuková vlna. Tyto změny jsou větší právě, když je větší i přenos energie prostorem – zmíněný výkon. V zadání se můžeme dočíst o základním bodu stupnice, ve kterém 0 dB odpovídá výkonu 10^{-12} W. Nyní si probereme řešení za té úvahy, že jde o výkon na jednotku plochy, který je vyslán každým pěvcem do okolí. Okomentujeme však i případ, kdy zmíněný výkon považujeme za přijatý tělem křížáka a zanedbáme, že v každé vzdálenosti je podíl povrchu těla na celkovém povrchu kulové zvukové vlny výrazně odlišný. Jádrem této úlohy spočívalo především ve správném použití nezvyklých jednotek.

V první části úlohy není podstatné, zda považujeme husitské vojsko za bodový zdroj, či nikoliv. Počítání akustického výkonu P_0 pro každého kališníka zvláště nám výpočet naopak usnadní. Ze zadání můžeme lehce odvodit, že jeden kališník zpívá s intenzitou $I_0 = 10^{-4} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ve vzdálenosti jednoho metru od sebe. Tato intenzita je stejná na celém povrchu koule o poloměru $r_0 = 1$ m. S pomocí poloměru sféry pak můžeme povrch sféry vyjádřit jako $S_0 = 4\pi r_0^2$. Pro celkový akustický výkon jednoho kališníka tedy platí, že $P_0 = I_0 S_0$.

Kališníků je 120 000, proto budou zpívat s celkovým akustickým výkonem $P_1 = 120\,000 \cdot P_0$. Celkovou zpěvnou práci W nakonec spočítáme jako součin výkonu P_1 a času t , po který zpívali.

$$W = P_1 t$$

$$W = 120\,000 P_0 t$$

$$W = 120\,000 I_0 S_0 t$$

$$W = 120\,000 I_0 4\pi r_0^2 t$$

Do tohoto obecného vzorce už stačí jen dosadit hodnoty ze zadání.

$$W = 120\,000 \cdot 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 4\pi \text{ m}^2 \cdot 300 \text{ s}$$

$$W \doteq 45\,239 \text{ J}$$

Po vydělení energií jednoho výstřelu z kuše dostáváme, že neobvyklá husitská strategie je srovnatelná jen s asi 300 výstřely z kuše.

Při druhém zmiňovaném postupu, kdy zmíněné výkony považujeme za již přijaté tělem křížáka a nepočítáme s povrchy, je výsledek nutně 4π -krát menší, a dává nám 3600 J, což odpovídá přesně 24 výstřelům.

Za dostačující považujeme i aproximaci armád za body. V tomto případě křížácké vojsko, které je tisíckrát dál, zasáhne miliontina práce, která by jej zasáhla ve vzdálenosti 1 m, tedy 0,045 J (0,036 J), což je méně než jeden výstřel z kuše.

Rozvíňme však pro zajímavost i úvahy nad alternativními složitějšími možnostmi řešení druhé části úlohy. Předchozí aproximace nám neřekne nic o tom, kolik J zpěvné práce křížácké vojsko skutečně zasáhne. Vojska totiž považujeme za body, což je ale skutečně neodpustitelné přiblížení. Armáda čítající 120 000 vojáků má rozměry řádově srovnatelné se vzdáleností, která armády dělí. Přesto nám nezbyvá ani v této části řešení úlohy nic jiného, než považovat alespoň armádu kališníků za bodový zdroj. Jinak by se stal problém natolik obtížným, že bychom se patrně nevyhnuli počítačovým simulacím.

Ze všeho nejdříve si označíme plochu křížáka jako S a odhadneme ji¹ jako $S = 1 \text{ m}^2$. Nezbytné bude zjistit si rovněž počet křížáků. Na kališníky se jich chystalo zaútočit asi 120 000. Následně si pomůžeme jednoduchou úvahou. Ve vzdálenosti tisíce metrů od bodového zdroje nemáme šanci takové množství vojáků rozmístit bez toho, aby se zakrývali. I kdyby se jim podařilo kališníky obklíčit, stále budou stát v několika řadách. Díky tomuto poznatku nakonec můžeme zpěvnou práci W' , která zasáhne křížácké vojsko, odhadnout jako součin W a podílu plochy S_2 pásu s poloměrem $R = 1000 \text{ m}$ a výškou $h = 2 \text{ m}$ a plochy sféry S_1 se stejným poloměrem R .

$$W' = \frac{W S_2}{S_1} = \frac{W 2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{W h}{2R}$$

Nakonec dosadíme za všechny neznámé a dopočítáme W' .

$$W' = \frac{45\,239 \text{ J} \cdot 2 \text{ m}}{2000 \text{ m}}$$

$$W' \doteq 45 \text{ J}$$

Celou obrovskou křížáckou armádu tedy pravděpodobně dohromady nezasáhne ani zpěvná práce ekvivalentní jedinému výstřelu z kuše. Příliš si nepomůžeme ani při započítání odrazů od země, které dále zvyšují nepřesnost výsledku. Zvukový výkon, který křížáka zasáhne po odrazu o zem, by jinak při nepřítomnosti půdy cestoval do plochy sféry odpovídající přibližně ještě jednou té samé řadě křížáků, avšak pod úrovní země, což by celkovou hodnotu maximálně zdvojnásobilo. Ve skutečnosti však půda není ani dobrým zvukovým zrcadlem a drtivou většinu zvuku absorbuje.

Tato úloha v sobě tedy obsahuje více ponaučení. Dává lepší představu o tom, jak malé jsou zvukové výkony, které dopadají na tělesa v okolí pěvců, a jak mohutná musí být jejich armáda, aby se dostaly na výkonovou úroveň našich ostatních smyslů, jako například hmatu,

¹Povrch kůže člověka je maximálně 2 m^2 , nás však zajímá jen ta část obrácená ke kališníkům

kterým můžeme výstřel z kuše pocítit při držení zbraně. Nakonec je jasné, že skutečný zpěv nemá největší účinek na energetickou bilanci posluchačů, ale na jejich pocity.

Viktor Materna

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.