Úloha III.3 ... Emila Zátopka

6 bodů; (chybí statistiky)

Emil Zátopek jednou před olympiádou trénoval na atletickém okruhu. První kolečko uběhl rychlostí v. Jeho trenér po něm chtěl, aby další kolečko uběhl tak, aby jeho průměrná rychlost za oba okruhy byla $(3/2)v$. Jakou rychlostí musí Emil oběhnout druhé kolečko?

Jednou si jeho trenér řekl, že si z něj udělá legraci a řekl mu, ať oběhne druhé kolečko tak, aby jeho průměrná rychlost[1] byla $2v$. Jakou rychlostí by musel běžet tentokrát?

Před řešením úlohy si udělejme přehled v terminologii. Průměrná rychlost neznamená prostý průměr rychlostí, nýbrž podíl celkové uražené dráhy za celkový čas. Kdyby to byl prostý průměr hodnot rychlostí, nezapočítávali bychom do něj, jak dlouho se člověk danou rychlostí pohyboval, proto je potřeba počítat celkovou dráhu za celkový čas. K samotnému řešení využijme jednoduchého faktu, že celkový čas uběhnutí dvou koleček je roven součtu časů oběhnutí jednotlivých koleček. Proto platí rovnice $\tau = t+T$, kde τ je celkový čas, t doba potřebná na uběhnutí prvního kolečka a T doba potřebná na uběhnutí druhého kolečka. Při dosazení základního vztahu času, rychlosti a vzdálenosti $t = s/v$ můžeme v této rovnici vyjádřit čas a dostaneme nový tvar, ve kterém s značí délku jednoho kolečka, ν značí průměrnou rychlost,[2] v rychlost v prvním kolečku a u rychlost v druhém. Rovnice poté vypadá takto:

$$\frac{2s}{\nu} = \frac{s}{v} + \frac{s}{u}\,.$$

Tato rovnice tedy vyjadřuje celkový čas na uběhnutí dvou kol dvěma způsoby.

V tomto vztahu známe průměrnou rychlost ν a rychlost v, kterou Emil uběhl první okruh. Chceme vypočítat rychlost u pro zadanou průměrnou rychlost ν. K tomu stačí rovnici jen upravit:

$$\begin{aligned}
\frac{2s}{\nu} &= \frac{s}{v} + \frac{s}{u}\\
\frac{1}{u} &= \frac{2}{\nu} - \frac{1}{v}\\
\frac{1}{u} &= \frac{2v-\nu}{\nu v}\\
u &= \frac{\nu v}{2v-\nu}
\end{aligned}$$

Nyní jsme dostali rovnici, která nám říká, jak moc si Zátopek v druhém kolečku musí pospíšit, aby dosáhl požadované průměrné rychlosti ν. Tím dostáváme obecnou rovnici, do které můžeme jednotlivé případy $\nu = (3/2)v$ a $\nu = 2v$ dosadit.

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\nu v}{2v-\nu}\\
u &= \frac{(3/2)v^2}{2v-(3/2)v}\\
u &= \frac{(3/2)v}{2-3/2}\\
u &= 3v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\nu v}{2v-\nu}\\
u &= \frac{2v^2}{2v-2v}\\
u &= \frac{1}{0}
\end{aligned}$$

[1] Pozor, průměrná rychlost není průměr rychlostí!

[2] Pozn. ν je řecké písmeno ný a τ řecké písmeno tau. Volíme je, jelikož vypadají jako písmena naší abecedy.

V prvním případě musí Emil uběhnout druhé kolečko rychlostí $3v$. Druhý případ nás však dostává do kuriózní situace, kde musíme dělit nulou. Dělení nulou však v matematice není definované![3] Důvodem pro tento výsledek je, že když Emil uběhne první kolečko, tak už mu nezbývá žádný čas na to druhé. Aby mohl mít průměrnou rychlost $2v$, musí celou dráhu uběhnout za nějaký čas, ten už ale spotřeboval na první kolečko, a proto to nemůže stihnout.

Pokud bychom podobně chtěli, aby průměrná rychlost byla ještě větší, musel by být čas při druhém kole záporný, protože by Emil v tom prvním prostě běžel moc pomalu (což ale není jeho chyba, když mu zadáváme průměrnou rychlost podle jeho rychlosti v prvním kole). Trenér se jistě dobře pobavil.

Adam Krška

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[3] Přesněji řečeno: operace dělení je v matematice definována jako nalezení takového čísla (podílu), které po vynásobení s dělitelem dá dělence. Protože je však nula jediné číslo, které dá po násobení s jakýmkoli číslem nulu, není tato operace jednoznačná. Neexistuje totiž podíl, který by po vynásobení s dělitelem (nulou) dal původní, obvykle nenulový dělenec, a ani není jednoznačný, kdyby byl dělenec také nula. Všechny operace mají dávat jednoznačné výsledky.