Úloha II.C ... Tady je Planckovo

7 bodů; (chybí statistiky)

Mějme kovovou kouli o poloměru 10 cm *a o teplotě* 2000 K.

1. *Na jaké vlnové délce najdeme maximum jejího vyzařování, a ve kterém oboru elektromagnetického záření se tak nachází?*

2. *Jaký je celkový zářivý výkon kovové koule? Mějme zdroj záření, který vysílá světlo pouze o té vlnové délce, jako je maximum záření koule z předešlé části úlohy. Tento zdroj záření vyzařuje do všech směrů stejně a má stejný výkon jako zmiňovaná koule. Ve vzdálenosti* 10 m *od tohoto zdroje umístíme čtvercovou hliníkovou desku s odrazivostí* 90 % *a straně* 10 cm.

3. *Jaká je energie jednoho fotonu ze zářiče? Jaká je jeho hybnost?*

4. *Jakou silou působí záření na hliníkovou desku?*

1. Abychom našli maximum vyzařování, vyjdeme z Wienova posunovacího zákona, který nám říká, že maximum vyzařování je nepřímo úměrné teplotě absolutně černého tělesa. Konstantu této nepřímé úměrnosti nazýváme Wienovou konstantou b a její hodnota je přibližně $b \doteq 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}$.
$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$
Po dosazení dostáváme výsledek $\lambda_{\max} \doteq 1{,}449 \cdot 10^{-6}$ metrů, což je 1 449 nanometrů. Toto záření spadá za hranici viditelnosti lidského oka a podle Výfučtení jej nazýváme zářením infračerveným. To je totiž právě záření sousedící s viditelným ve smyslu větší vlnové délky.

2. Abychom spočítali celkový výkon vydávaný tělesem, vyjdeme ze Stefanova-Boltzmannova zákona. Ten nám říká, že hustota zářivého toku (neboli plošného výkonu) je úměrná čtvrté mocnině teploty (jedná se o jeden z mála příkladů, kdy ve fyzice narazíte na čtvrtou mocninu). Konstantu této úměrnosti nazýváme Stefanovou-Boltzmannovou konstantou. Abychom ale dostali celkový výkon, musíme tuto hustotu zářivého toku přenásobit plochou tělesa, které vyzařuje. Známe vztah pro povrch koule o poloměru r:
$$S = 4\pi r^2\,.$$
Dosadíme do Stefanova-Boltzmannova zákona:
$$P = 4\pi r^2 \sigma T^4\,,$$
což číselně vyjde kolem 114 kilowattů.

3. Nyní už se zabýváme monochromatickým zářičem[1] o stejném výkonu jako koule z předešlé úlohy. Vztah pro výpočet energie fotonu je
$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}\,,$$

[1] Tedy takovým, který září jen na jedné vlnové délce.

protože $f = c/\lambda$ (jedná se o světlo, jež pochopitelně putuje rychlostí světla). Vlnovou délku λ jsme si určili v první části příkladu. Dosadíme:

$$E_f = \frac{hcT}{b}\,.$$

Po dosazení získáváme hodnotu $E \doteq 1{,}37 \cdot 10^{-19}$ J. Vyjádříme-li tuto hodnotu v elektronvoltech [eV], dostaneme hezkých 0,86 eV. Jeden elektronvolt je jednotka energie používaná často v kvantové fyzice, odpovídající energii jednoho elektronu po urychlení napětím 1 V. Jeho hodnota v joulech je $e \cdot U = (1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1\,\mathrm{V}) = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Hybnost fotonu spočteme jako

$$p_f = E/c$$

a po dosazení předešlého výsledku:

$$p_f = \frac{hT}{b}\,,$$

kde po dalším dosazení dostáváme hodnotu $p_f \doteq 4{,}573 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$.

4. Vyvolanou sílu na hliníkovou desku si spočteme z druhého Newtonova zákona jako

$$F = \frac{\Delta p_\mathrm{d}}{\Delta t}\,,$$

kde Δp_d je celková změna hybnosti desky za časový úsek Δt. Dále víme, že celková hybnost soustavy se zachovává.

S fotony se mohou stát dvě věci. Jednak je může deska pohltit, jednak je může odrazit. Podívejme se na situaci z hlediska zákonu zachování hybnosti v obou případech, jestliže hybnost fotonu letícího na desku je p.

Pohlcení: na začátku máme foton s hybností p, po pohlcení má foton hybnost $0p$. Tedy změna hybnosti činí p.

Odražení: na začátku máme foton s hybností p, poté se odrazí a letí opačným směrem s hybností $-p$. Změna hybnosti tentokrát činí $2p$.

My se zabýváme kombinací obou výše zmíněných situací. Sto procent fotonů do desky narazí, ale pouze devadesát procent fotonů se od ní odrazí. Tedy $\Delta p_\mathrm{d} = 1{,}9 p_f$, kde p_f je celková hybnost fotonů, Δp_d je celková změna hybnosti. K jejímu výpočtu musíme určit p_f. Bude se jednat o součin celkového počtu fotonů a hybnosti jednoho fotonu. Hybnost jednoho fotonu jsme již určili, a to $p = hf$. Celkový počet fotonů n spočteme jako celkovou energii dopadlou na destičku podělenou energií jednoho fotonu, a tedy

$$F = 1{,}9 n \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1{,}9 \Delta n \frac{hf/c}{\Delta t}\,.$$

Víme, že zářič má výkon $P = S\sigma T^4$. Ve vzdálenosti $d = 10\,\mathrm{m}$ si můžeme spočíst intenzitu zářivého toku:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}\,,$$

a celkovou energii dopadlou na destičku za čas Δt:

$$E_\mathrm{C} = a^2 \frac{P}{4\pi d^2} \Delta t\,,$$

kde a je délka strany desky. Počet fotonů n je tedy

$$n = \frac{E_\mathrm{C}}{E} = a^2 \frac{P}{4\pi d^2 hf} \Delta t\,.$$

Nakonec dosadíme-li n do vztahu pro sílu, dostáváme:

$$F = 1{,}9 \frac{a^2 P}{4\pi d^2 c} = 5{,}75 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{N} = 5{,}75\,\mathrm{nN}\,,$$

což je obtížně měřitelná hodnota, avšak při výrazně větších výkonech (např. ze Slunce) a plochách milionkrát větších (řádově hektary až kilometry čtvereční) je možno znásobit výkon natolik, aby byla větší verze naší desky (resp. lehké fólie se stejnou odrazivostí) reálně použitelná jako solární plachetnice, a to např. pro pohon ve vesmíru.

Marco Souza de Joode
`joode@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.