Úloha II.5 ... Fotbalová

7 bodů; (chybí statistiky)

Adam je vášnivý fotbalista a rád by se naučil kopat věhlasnou Carlosovu zatáčku[1], *pro ni se však musí nejdříve naučit pracovat s tzv. Magnusovou silou, která způsobuje zatáčení rotujícího míče za letu do směru kolmého na jeho pohyb a zároveň kolmo od jeho osy rotace. Existuje více jejích definic, my využijeme tu nejjednodušší:*

$$F_{\mathrm{M}} = \frac{1}{8}\varrho v d^3 \omega \,,$$

kde F_{M} je síla působící na míč, ϱ je hustota vzduchu, v a d jsou rychlost a průměr míče, a ω je úhlová rychlost jeho rotace. Ze dvou možných směrů působí na tu stranu, na které se povrch rotujícího míče pohybuje spolu s obtékajícím vzduchem. *V celé úloze zanedbejme odpor vzduchu.*

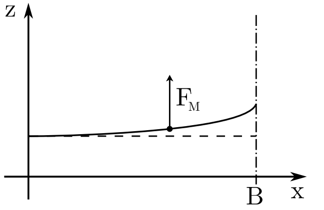
1. *V projekci na rovinu hřiště a na rovinu kolmou k povrchu hřiště načrtněte typickou trajektorii volně vykopnutého rychle rotujícího míče, který má osu rotace kolmou k zemi. Vyznačte správně osu, směr rychlosti i působící síly na míč odpovídající směru otáčení, který si zvolíte.*
2. *Adam stojí na středové čáře v* 90 m *dlouhém fotbalovém hřišti tak, že přímo před sebou vidí brankovou tyčku. Míč vykopne bez roztočení horizontální rychlostí* $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *s mírným stoupáním tak, aby dopadl na brankovou čáru. Do jaké největší výšky míč při tomto kopu vystoupá? Může jej v tom momentu nějaký hráč zastavit bez použití rukou? Potřebné údaje, vzdálenosti a konstanty si vyhledávejte*[2].
3. *Je-li osa rotace kolmá k zemi, jak velkou faleš (úhlovou rychlost nebo frekvenci rotace) musí míči udělit, aby dopadl doprostřed brankové čáry? Pootáčení směru působení M. síly během letu zanedbejte.*

1. Když si půjdeme zahrát fotbal, vykopnutý míč se v ideálních podmínkách bude řídit pravidly šikmého vrhu. Při něm je těleso s nenulovou počáteční rychlostí přitahováno k povrchu planety. Trajektorie takového letu (pomyslná křivka, kterou míč „nakreslí“ při svém letu) je *parabola*[3]. Po promítnutí do roviny hřiště (jako bychom se na let dívali z ptačí perspektivy) a do roviny kolmé na hřiště (jako bychom seděli na tribuně) se nám objeví grafy na obrázcích 1 a 2.

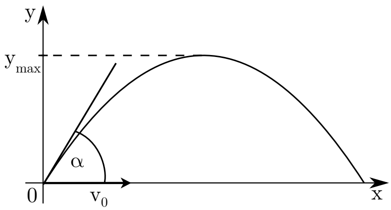
   U prvního obrázku vidíme dvě křivky. První – úsečka vyznačená čárkovaně – ukazuje dráhu letu bez rotace míče; ten se tedy pohybuje jen po ose x díky setrvačnosti. Druhá plná čára vyznačuje pohyb s přidanou rotací a působením Magnusovy síly F_{M}; tato síla hýbe s tělesem jen ve směru osy z, a uděluje mu konstantní zrychlení, tedy křivka je opět parabola, jak je znázorněno. Bod B a kolmice znázorňuje brankovou čáru.

   Druhý graf, z pohledu diváka na stadionu, se skládá jen z jedné křivky. To proto, že odsud „nevidí“ osu z, a tak se obě trajektorie překrývají[4]. Vidíme zde samotný začátek výkopu – počáteční horizontální rychlost v_0 a tzv. elevační úhel α, pod kterým Adam míč uvedl do

[1] `http://youtu.be/3ECoR__tJNQ`
[2] Může pomoci `https://bit.ly/2QLVHHs`
[3] Pokud navíc uvažujeme odpor vzduchu, křivku nazýváme *balistickou.*
[4] Je sice pravda, že míč musí v jednom případě překonat větší vzdálenost, ale na druhou stranu má i vyšší rychlost (kvůli Magnusově síle). Proto se obě dráhy překrývají.



Obr. 1: Pohled ze shora



Obr. 2: Pohled z boku

pohybu. Také si můžeme všimnout, že maximální výška $y_{\max}$ se nachází přímo uprostřed letu, jelikož zanedbáváme odpor vzduchu.

2. Při výpočtu maximální výšky si můžeme problém převést na dvojici vodorovných vrhů za sebou. První vrh je pozpátku od Adama do výšky $y_{\max}$ a druhý je stejný, ale zase z této výšky až na br. čáru. Vodorovná doletová vzdálenost šikmého vrhu je $s_x = 45\,\mathrm{m}$. Dále použijeme vzorec pro výpočet výšky, ze které je těleso vrženo. V něm ale musíme znát čas letu $t/2$, jenž odpovídá době letu po dráze $s/2$ rychlostí v_0. Důvodem pro použití polovin je, že do maximální výšky se dostane míč, jak už bylo zmíněno, v polovině letu. Po dosazení tedy získáme:

$$y_{\max} = \frac{g(t/2)^2}{2} = \frac{gs^2}{8v_0^2}\,,$$
$$= \frac{9,81 \cdot 45^2}{8 \cdot 27,78^2}\,\mathrm{m} \doteq 3{,}22\,\mathrm{m}\,.$$

To je výška, do které průměrně vysoký fotbalista nemůže dosáhnout hlavou ani s výskokem. Rukama si pomoci nemůže, protože ty jsou ve fotbale zakázané. V nejvyšším bodě tedy protihráč nemá šanci gól zastavit.

3. Na internetu můžeme dohledat standardní šířku branky $b_\mathrm{c} = 7{,}32\,\mathrm{m}$, hustotu vzduchu $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a parametry fotbalového míče; $m = 0{,}43\,\mathrm{kg}$ a $d = 0{,}22\,\mathrm{m}$. Ovšem, k výpočtu potřebujeme jen polovinu šířky branky, tedy $s_z = 3{,}66\,\mathrm{m}$. Dále si vyjádříme ze vztahu uvedeného v zadání hledanou úhlovou rychlost:

$$\omega = \frac{8F_\mathrm{M}}{\varrho v d^3}\,.$$

Jediná neznámá, která se nám zde vyskytuje, je Magnusova síla F_M. Její velikost odpovídá síle, která by dodala míči takové zrychlení ve směru z, aby urazil dráhu s_z. Jelikož zrychlení je úměrné síle podle druhého Newtonova zákona, můžeme k výpočtu použít vzorec pro výpočet rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$s_z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_\mathrm{M}}{m} t^2 \,,$$

kde t je celkový čas letu míče, vyjádřený jako $t = s_x / v$. Z toho nyní vyjádříme Magnusovu sílu

$$F_\mathrm{M} = \frac{2 s_z m v^2}{s_x^2}$$

a dosadíme do vzorce pro úhlovou rychlost.

$$\omega = \frac{16 s_z m v}{\varrho s_x^2 d^3}$$

Po dosazení tedy dostáváme úhlovou rychlost,[5] přibližně $\omega \doteq 27\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, což odpovídá realisticky více než 4 otáčkám za sekundu.

Miroslav Jarý
Jason@vyfuk.mff.cuni.cz

[5] Jednotka *radián* se používá k vyjádření velikosti úhlu pomocí délky oblouku, 1 rad odpovídá oblouku o délce r, plný úhel pak má 2π rad.