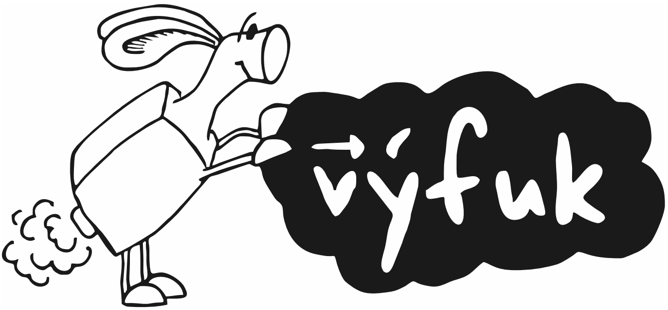


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

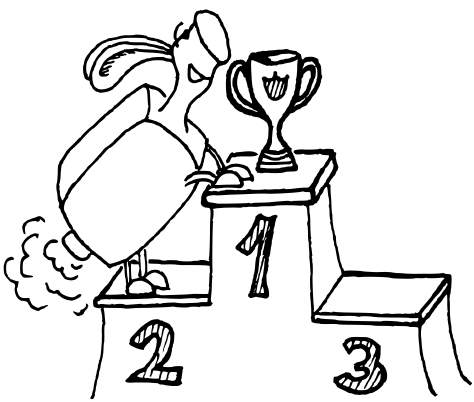
vítáme vás u brožurky obsahující poslední sérii Výfuku v tomto školním roce, řešení 4. série a také poslední Výfučtení o Williamu Thomsonovi, častěji známému pod titulem lord Kelvin.

Tentokrát jsme se v úlohách vrátili k tématům, která byla v tomto ročníku zatím upozaděná: elektřina, Newtonův odpor vzduchu, a hned ve dvou úlohách si můžete procvičit své znalosti z šíření tepla. Celkem je možno do konečného pořadí získat ještě nejvýše 44 bodů.

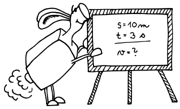
Ani o prázdninách netřeba lkát nad nedostatkem úloh, přihlaste se na náš *letní tábor*. Tam na vás také čeká dvoutýdenní program se spoustou zábavy, her, poutavých přednášek a kamarádů. Přihlášku i další informace naleznete na našem webu.[1]

Hodně zábavy při řešení našich úloh přejí

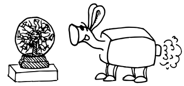
Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/tabor/tabor2019`

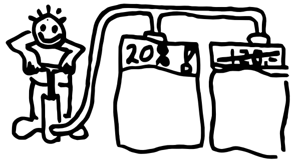


Zadání VI. série



Termín odeslání: 10. 6. 2019 20.00

Úloha VI.1 ... Money, Money, Money ❻ ❼ 5 bodů



Bětka ráda nakupuje ve slevě, ale ty jsou jen vzácně. Pravidelně do kanceláře přikupuje 20 g spon do sešívačky za 15 Kč, 100 listů papíru za 70 Kč, a 200 g kávy za 150 Kč. Dnes má šťastný den, protože papír má slevu 10 % a káva 15 %. Kolikrát může zvětšit svůj nákup při zachování poměru mezi množstvím jednotlivých věcí, aby se vešla do stále stejně střídmého rozpočtu? Kolik kusů pak bude od každé položky?

Úloha VI.2 ... Na zahradě krtek vrtá... ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Ve městě Glasgow mají jako dopravní systém metro, které jezdí po kruhové trase a říkají mu poeticky Clockwork Orange. Dříve, než se vůbec postavilo, bylo potřeba propočítat pár údajů, aby bylo jasné, zda by se tato investice vyplatila. Ve zjednodušené verzi vyřešíme obdobný problém.

Metro by jezdilo jedním směrem po kruhové trase, kde by po každém kilometru byla umístěna jedna zastávka, kterých by bylo celkem 15. Jedna souprava by projela celý okruh za 30 minut a její kapacita by byla 50 lidí. V dopravní špičce na každou zastávku by přišel jeden člověk každých třicet sekund a dá se předpokládat, že na každé zastávce, kterou by souprava projela, by do ní nastoupili všichni lidé, kteří by se tam vešli, a pouze čtyři by vystoupili. Klasicky, jak je v metru zvykem, se nejdříve vystupuje, poté nastupuje. Čas na výstup a nástup lidí můžeme zanedbat.[2] Vedení města se ptá na tyto otázky:

1. Kolik nejméně souprav by muselo ve špičce jezdit, aby se na zastávkách nehromadili lidé (tj. aby celkový počet lidí na všech zastávkách neustále nerostl)?

2. Pokud bychom neměli dostatek souprav, po jak dlouhé trase by se jedna zaplnila, jezdíli na okruhu sama a z první zastávky na začátku provozní doby by vyjížděla prázdná (tj. i všechny ostatní zastávky by ještě byly prázdné)?

Úloha VI.3 ... Highway to Hell ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Dříve, než bude skrz Kuželový vrch, který má s dostatečnou přesností tvar kuželu, postaven nový tunel, má Jirka na výběr. Musí si vybrat, jestli jej při cestě z jedné strany na druhou objede po silnici obkružující jeho úpatí, nebo to vezme přímo do kopce a z kopce přes jeho vrchol. Vrch má výšku h a poloměr podstavy r. Palivo může Jirka ušetřit tím, že za vrcholem, který je v polovině cesty, vypne motor a sjede z kopce samospádem.

Jirkovi je jasné, že se mu přímá cesta vyplatí jen do určité maximální výšky h. Pomozte mu ji najít, když víte, že na ujetý kilometr spotřebuje zapnutý motor C mililitrů paliva a jeden mililitr poskytne H joulů energie Jirkově vozu o hmotnosti m. Zajímá nás tedy, jakou výšku h

[2] I když v reálném životě jej rozhodně při plánování zanedbávat nemůžeme.

by kužel o poloměru podstavy r musel mít, aby Jirka spotřeboval stejné množství paliva na jeho objetí, a na jeho vyjetí nahoru a poté sjetí dolů?

Návod: práci výjezdu na kopec můžete uvažovat jako součet příspěvků jízdy po rovince pomyslné podstavy pod cestou + vytažení auta do odpovídající výšky.

Bonus pro velmi náročné: započítejte do výsledku přesné prodloužení trasy závislé na h.

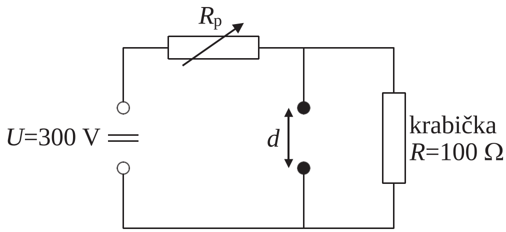
Úloha VI.4 ... Byl to ten slavný den... ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Z toho slavného dne, kdy byl do Julčiny vesnice zaveden elektrický proud, našla Julča ve sklepě záhadnou černou bakelitovou krabičku. Ta měla dva vývody na připojení ke zdroji a na sobě upozornění „$I_{\max} = 1\,\mathrm{A}$, $R = 100\,\Omega$“. I když byla Julča moc zvědavá, co zařízení umí, chtěla si dát velký pozor, aby ho nepoškodila příliš velkým proudem. Neměla k dispozici mnoho kvalitních součástek, a proto musela improvizovat.

Aby mohla přímo regulovat proud procházející krabičkou, zapojila mezi ní a zdroj ($U = 300\,\mathrm{V}$) sériově reostat, což je zařízení, kterému lze měnit elektrický odpor. Jeho odpor si označme R_p.[3] Jak jsme ale již řekli – reostat je nekvalitní a kdyby se vše pokazilo, chtěla Julča omezit proud i shora, jenže žádnou funkční pojistku po ruce neměla, než dostala nápad!

K vyrobení pojistky jí stačí, když paralelně s krabičkou připojí přerušený drát s úzkou mezerou o délce d. Vzduch má průrazné napětí $V \approx 20\,\mathrm{kV \cdot cm^{-1}}$, což znamená, že pokud by bylo na 1 cm dlouhé mezeře napětí $V \cdot d = 20\,\mathrm{kV}$, zapálil by se elektrický oblouk a mezerou by začal procházet proud. Pokud tedy tuto „bleskojistku“ zapojí paralelně s krabičkou, může její zapálení snížit (svést) nadměrný proud od krabičky.[4]

Jaký musí Julča na reostatu nastavit odpor, aby proud snížila na $I_{\max}$? Jakou podmínku[5] musí splňovat délka d, pokud chceme, aby za těchto podmínek, tedy pokud reostat dobře funguje, procházel krabičkou jistě proud a pojistka se nespustila? Na obr. 1 je zapojení vyobrazeno.



Obr. 1: Julči zapojení.

Úloha VI.5 ... Prší, prší, jen se leje ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

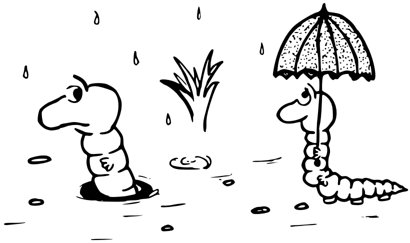
Jednoho dne se housenky zeptaly starého houseňáka, proč na ně občas tak nepříjemně prší. Ten jim o tom uspořádal podrobnou přednášku a jako správný učitel se je rozhodl nakonec otestovat...

[3] Index p od slova „předřazený“, které se v elektrotechnice často používá.

[4] Samozřejmě má oblouk samotný také daný odpor, ale u něj můžeme jen předpokládat, že je dostatečně malý, aby jistojistě snížil I pod $I_{\max}$.

[5] vyjádřenou nerovnicí

Představte si, že stejně jako naše housenky žijete v lese, který má rozlohu $3\,\mathrm{km}^2$. Jednoho dne v celém lese naprší $10\,\mathrm{mm}$ srážek při teplotě $15\,°\mathrm{C}$. Objemem mraku označujme ostře ohraničený objem homogenní směsi vodní páry a vzduchu, se kterým budeme počítat.



1. Aby $15\,°\mathrm{C}$ bylo za atmosférického tlaku tzv. rosným bodem, tj. maximální teplotou, při které vodní pára o dané koncentraci (absolutní vlhkosti Φ v $\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$) kondenzuje, musí jí být ve vzduchu alespoň $\Phi = 12{,}83\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$. Jaký musel být maximální objem mraku, který při místní teplotě zkondezoval, a tedy se vypršel?

2. Kondenzace vodní páry uvolňuje do vzduchu obrovské množství skupenského tepla, proto je před bouřkou teplo. O kolik by se ohřál kondenzací výše vzduch v mraku, pokud bychom mu nedovolili se ochlazovat do okolí?[6]

3. Jaká by musela být boční rychlost unášivého větru, aby kapky, padající rovnoměrně ze střední výšky $300\,\mathrm{m}$, minuly náš les o šířce $1\,\mathrm{km}$? Pro odpor pohybu ve vzduchu je možno použít Newtonova vzorce $F_\mathrm{o} = (1/2) \cdot C \cdot \varrho \cdot S \cdot v^2$, kde v je svislá pádová rychlost, ϱ je hustota vzduchu a $C = 0{,}5$ je odporový koeficient kulových kapek o poloměru $1\,\mathrm{mm}$ a kruhovém průřezu S.

Potřebné hustoty a skupenská tepla si vyhledejte.

Úloha VI.E ... Jumpin′ Jack ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Snad každý si někdy hrál se skákacím míčkem, kterému říkáme hopík. Hopík se dokáže odrazit nepředstavitelným způsobem a odskočit do neznáma, musí ale skákat na vhodném povrchu. Možnou míru toho, jak moc se hopík odráží, je tzv. koeficient restituce, který si označíme k. Ten vyjadřuje, kolik energie si míček zachová při jednom odrazu. Jelikož je potenciální energie přímo úměrná výšce, lze koeficient restituce spočítat jako $k = h_{n+1}/h_n$, kde h_n je maximální výška, do které míček vyskočí po jednom odrazu. Změřte, jaký je koeficient restituce hopíku, který si obstaráte, na alespoň třech různých (různě tvrdých) površích.[7]

[6] V reálném světě by se pak samozřejmě nemohl vypršet, protože by teplota byla zase vysoko nad rosným bodem.

[7] Jedna z efektivních metod je pomocí natočení skákajícího hopíku na video a jeho následná analýza. Na tu existují pokročilé volně dostupné softwary jako Tracker (`https://physlets.org/tracker/`), ale lze si vystačit i s přehrávačem videa jako VLC (`https://www.videolan.org/index.cs.html`).

Úloha VI.C ... Daddy Cool ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Pepa si v pokoji nedopatřením položil zmrzlinu na zapnuté ústřední topení. Jednalo se o Ruskou zmrzlinu ve tvaru kvádru s hranami $2 \times 4 \times 6$ cm obloženého oplatkami, každou o dodatečné tloušťce 0,25 cm.

1. Jestliže voda v topení má teplotu 50 °C a zmrzlina 0 °C, popište nerovnostmi vztahy mezi teplotami ve všech zmíněných oblastech vody v topení, ocelové stěny topení, zmrzliny, oplatek, a k tomu i okolního vzduchu před a po roztečení zmrzliny.

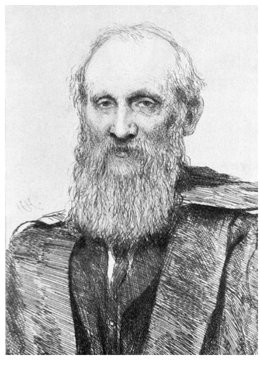
2. Jaké je skupenské teplo tání L zmrzliny?[8] Zmrzlina je našlehaná, a tak ji můžeme uvažovat jako 60 % směs ledu se vzduchem (tepelnou kapacitu vzduchu v celé úloze zanedbáváme).

3. Výsledek tohoto fyzikálního děje si jistě umíte představit. Zkusme ale nyní spočítat, za jak dlouho ke katastrofě dojde. Topení má ocelovou stěnu tlustou 0,3 cm. Všechen led, který roztaje, ihned odteče. Děj se stane tak rychle, že vliv okolí je možno zanedbat. Oplatky slabě izolují, a tak je mezi stěnami té, na které zmrzlina leží, poloviční rozdíl teplot, než kdyby zmrzlina ležela přímo na topení.

Skupenské teplo tání vody je $334\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, hustota ledu $900\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, součinitel tepelné vodivosti pro ocel je $46\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ a pro oplatku $0{,}2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ (skutečně změřená hodnota!).

Poznámka: Níže najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.

Výfučtení: William Thomson



Jméno William Thomson vám možná připadá neznámé a nepovědomé. Přesto jméno tohoto vědce slýcháváme během výpočtů v několika oborech fyziky. Pan Thomson je totiž více známý pod jménem baron Kelvin, a ještě známější je po něm pojmenovaná jednotka termodynamické teploty, kelvin. Baron Kelvin však nebyl pouze jednostranně nadaný vědec, vynikal i ve sportu, hudbě a celý život byl hluboce věřící.[9]

Stručný životopis

William Thomson se narodil roku 1824 v Belfastu (Severní Irsko). Pocházel z početné rodiny učitele matematiky Jamese Thomsona. Měl 3 bratry a 2 sestry. Thomson přišel o matku, když mu bylo pouhých 6 let. Základní vzdělání se mu dostalo od otce, který děti vyučoval doma. Zásadní změna nastala, když rodina odešla v roce 1833 do Glasgow (Skotsko), kde bylo Thomsonově otci nabídnuto místo. Mladý William se poté sám vydal na studia ve Francii, Německu a Nizozemsku. Již na škole byl velmi úspěšný a získal několik ocenění v překladatelské či literární soutěži. Od roku 1841 studoval v Anglii na univerzitě v Cambridgi. Zde pravidelně publikoval v časopise

[8] Měřeno v prostých $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

[9] Obrázek Williama Thomsona převzat z Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:William_Thomson_1st_Baron_Kelvin.jpg`.

Cambridge Mathematical Journal. Thomson byl renesanční člověk, a kromě výše zmíněné literatury, jazyků a samozřejmě fyziky se zajímal i o hudbu – pomohl založit Cambridge University Musical Society a vynikal též jako veslař.

Během své profesní kariéry se věnoval především termodynamice, k té se ale dostaneme později. Stal se profesorem přírodních věd na Univerzitě v Glasgow, kde působil přes 50 let. Po odchodu do penze v roce 1900 se věnoval především svým vynálezům, které mu zajistily nemalé jmění. Profesor Thomson zemřel v roce 1907 ve Skotsku ve věku 83 let. Je pochován ve Westminsterském opatství vedle sira Isaaca Newtona. Lord Kelvin po sobě zanechal 70 patentů a přes 660 článků a publikací.

Za zmínku stojí určitě i Kelvinovy zásluhy v oblasti telekomunikace. V roce 1858 se mu po mnoha problémech na druhý pokus podařilo položit transatlantický telekomunikační kabel, kterým poprvé v historii propojil Americký a Evropský kontinent (konkrétně kanadský Newfoundland a irskou Valencii). Kabel ovšem vydržel jen několik měsíců a brzy byl poškozen. Po konci americké občanské války v roce 1866 byl kabel obnoven a tím zjednodušil a zrychlil celosvětovou komunikaci.

Termodynamika

Jak název napovídá, termodynamika se zabývá jakožto odvětví fyziky teplem a teplotou. Teplotou se myslí vlastnost látek, kterou měříme např. teploměrem; udává, jak chladná nebo horká látka je (pro nás je zatím důležité, že teplota popisuje stav látky, na její přesnou definici zde bohužel nezbývá místo). Teplo je na druhou stranu forma energie. Čím více tepla těleso přijme, tím může (ale nemusí) být teplejší (například tuhé, chemicky nereagující těleso se obvykle ohřeje, zatímco třeba plyn v pístu se může i roztáhnout bez výrazného zvýšení teploty – teplo se přemění na mechanickou práci). Na termodynamice je důležité si povšimnout, že se obvykle nezabývá pevnými tělesy, jako to činí např. Newtonova mechanika, nýbrž všemi skupenstvími látek. Protože ty se však skládají z obrovského množství molekul (v případě vzácných plynů dokonce jednotlivých atomů), nelze popsat vlastnosti všech částic najednou – popisujeme tedy jen úhrnné vlastnosti systému, kterými jsou např. u plynů často tlak, objem a teplota. Pro úplný popis se často používá trojice: objem, teplota, počet částic, přičemž tlak je možné dopočítat, ale o tom více na střední škole.

Jak už bylo výše zmíněno, po baronu Kelvinovi je pojmenována jedna ze základních jednotek SI, a to jednotka termodynamické teploty. William Thomson je totiž autorem absolutní teplotní stupnice, tj. stupnice s počátkem v absolutní nule, jejíž jednotkou je právě kelvin (značíme K bez kroužku!). Absolutní nulou rozumíme takovou teplotu, při které již je fyzikálně nemožné těleso více ochladit.

Kelvinova stupnice má dílky stejně velké jako nám známější stupnice Celsiova, proto je mezi nimi jednoduchý přepočet: $0\,\mathrm{K}$ odpovídá zhruba $-273{,}15\,°\mathrm{C}$, takže $T/[\mathrm{K}] = t/[°\mathrm{C}] - 273{,}15$. Abychom ve vzorcích snáze odlišili termodynamickou teplotu (v kelvinech) od teploty ve stupních Celsia, bývá zvykem termodynamickou teplotu značit velkým písmenem T, zatímco Celsiovu teplotu značíme malým písmenem t.

V další části Výfučtení si představíme jednotlivé termodynamické zákony. U každého z nich se můžeme setkat s několika různými formulacemi, ale všechny jsou ve výsledku ekvivalentní, tedy platí všechny a žádná formulace není fyzikálně lepší než jiná (ačkoli některé mohou být snáze pochopitelné). Tyto zákony tvoří základní postuláty termodynamiky, tedy všechny další výpočty a závěry v rámci termodynamiky z nich vychází. Postulát (obecně) je fyzikální tvrzení, které přijímáme za pravdivé ze zkušenosti a nedokazujeme jej. V rámci termodynamiky tedy termodynamické zákony vycházejí z našeho pozorování a není známé žádné jejich porušení. Nicméně za hranicemi termodynamiky, například v mikrosvětě, již platné být nemusejí a známe jevy, které se jimi neřídí.

1. termodynamický zákon

První termodynamický zákon nám říká, že celková energie izolované soustavy je stálá (její množství se nemění), nemůže libovolně vznikat a zanikat, ale může se přeměňovat z jednoho druhu na jiný. Jinými slovy se jedná o zákon zachování energie (ZZE). Z prvního termodynamického zákona proto plyne, že teplo je pouze jedním z druhů energie a jeho mechanickou obdobou je práce. Práce i teplo jsou tedy druhy energie, ale zatímco práce je energie potřebná k provedení makroskopického pohybu, teplo je změna energie jednotlivých částic, která ale nemusí být makroskopicky viditelná. Tento zákon rovněž vyvrací funkčnost takzvaného perpetua mobile prvního druhu (stroje, který může donekonečna konat práci, aniž by mu byla dodávána energie).

2. termodynamický zákon

Z prvního termodynamického zákona již víme, že energie se může přeměňovat z jednoho druhu na jiný. Podle druhého termodynamického zákona nemohou tyto změny probíhat libovolně v obou směrech. Například pokud jedeme z kopce na kole, naše potenciální energie se přeměňuje na kinetickou, ale protože nechceme jet příliš rychle, začneme brzdit. Místo toho, aby se zvyšovala naše kinetická energie, třou brzdné kotouče o ráfky a tím se zahřívají. Potenciální energie, kterou jsme měli nahoře na kopci, se nyní dole pod kopcem přeměnila v teplo uložené v zahřátých brzdách a ráfku. Ovšem již není možné, abychom pomocí zchlazení ráfků bez námi vložené energie (šlapání) vyjeli zpět na kopec. Tato přeměna energie tedy funguje pouze v jednom směru a jedná se o změnu nevratnou.

Druhý termodynamický zákon tak vyjadřuje přesně tuto situaci. Tvrdí, že některé přenosy energie se nedějí samovolně. Konkrétně že pokud jsou dvě tělesa v kontaktu, tak bez vykonání práce vždy předává energii teplejší těleso chladnějšímu. Pokud nevynaložíme žádnou práci (např. použitím ledničky), přenos neproběhne v opačném směru. Opět si uvedeme příklad z praxe. Pokud hodíme do teplé limonády kostku ledu, teplá tekutina začne předávat energii ledu a ten se rozpustí. Teplota ve sklenici se ustálí tak, aby nastal rovnovážný stav a obě látky měly stejnou teplotu. Tento proces popisuje kalorimetrická rovnice. Není možné, aby děj samovolně nastal obráceně – led se ochladil a limonáda ještě zteplala.

Druhá věta termodynamická vznikla řešením otázky, jak přeměnit teplo na práci. Baron Kelvin se podílel na dvou formulacích této věty. Společně s Maxem Planckem ji definoval takto: *„Nelze sestrojit periodicky pracující tepelný stroj, který by trvale konal práci pouze tím, že by ochlazoval jedno těleso, a k žádné další změně v okolí by nedocházelo.“* … a s Wilhelmem Ostwaldem jako: *„Nelze sestrojit perpetuum mobile druhého druhu.“* (tj. perpetuum mobile pracující díky porušení druhého termodynamického zákona)

3. termodynamický zákon

Třetí termodynamický zákon popisuje chování látek blízko absolutní nuly (0 K, −273,15 °C). Říká, že konečným procesem nelze ochladit čistou pevnou látku na absolutní nulu. Tělesa tedy můžeme libovolně zahřívat, ale nelze je libovolně ochlazovat. Rovněž z ní pro určité fyzikální veličiny vyplývá, že blízko absolutní nuly jsou téměř nulové. Příkladem jedné z těchto veličin je tepelná kapacita, o níž se budeme bavit za chvilku.

Kalorimetrická rovnice

V této sekci se ještě vrátíme ke kalorimetrické rovnici, která vyplývá z 2. termodynamického zákona. Jak jsme si již řekli, při styku dvou nestejně teplých těles dojde k přenosu tepla, a to z teplejšího tělesa na chladnější. Přitom platí, že teplo (zn. Q), které chladnější těleso přijme, je rovno teplu, které teplejší těleso odevzdá. Můžeme to zapsat rovnicí takto:

$$Q_1 - Q_2 = 0\,.$$

Teplo obsažené v tělese při dané teplotě závisí na hmotnosti tělesa m. Dalším důležitým parametrem je měrná tepelná kapacita daného materiálu, kterou značíme c a její jednotka je $\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Její hodnota je pro různé látky uvedena v tabulkách.[10] Posledním parametrem je teplota tělesa T. S touto rovnicí můžeme pracovat v mnoha výpočtech. Běžně nás zajímá teplo, které těleso přijalo či vydalo při změně své teploty, pro tento případ platí vztah:

$$Q = mc\Delta T\,,$$

kde ΔT je rozdíl výchozí a konečné teploty tělesa, tedy při ohřátí tělesa z teploty T_1 na teplotu T_2 je $\Delta T = T_2 - T_1$. Za povšimnutí jistě stojí, že ať už dosadíme do vzorce teplotu v Kelvinech či ve stupních Celsia, vyjde hodnota ΔT číselně shodná, což vyplývá z převodního vztahu.

Kalorimetrickou rovnici můžeme ve tvaru, v jakém je výše, používat bez problémů při jakémkoli ohřívání či ochlazování těles, dokud nedojde ke změně jejich skupenství. Pokud se má totiž například z ledu stát voda nebo z vody pára, musí být dodáno navíc takzvané skupenské teplo, aby byla změna uskutečněna. Skupenská tepla pojmenováváme podle procesu, kterého se týkají, tedy skupenské teplo tání, tuhnutí, vypařování, kondenzace, sublimace či desublimace. Skupenské teplo běžně značíme L s dolním indexem dle procesu, kterého se týká, tedy například skupenské teplo tání značíme L_t. Jedná se o druh tepla, proto jeho jednotkou je joule (J).

Ze skupenského tepla můžeme samozřejmě také definovat i skupenské teplo měrné, tj. vztažené k jednotce hmotnosti látky. Podobně jako tomu bylo u měrné tepelné kapacity, značíme ji také malým písmenem, a tedy pomocí l s jednotkou $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ (J/kg). Indexuje se stejným způsobem jako skupenské teplo a jeho hodnoty nalezneme pro různé látky v tabulkách.

Představme si nyní proces ledu vhozeného do limonády: nejdříve se led ohřeje na 0 °C dle kalorimetrické rovnice, poté se začne rozpouštět a během této části přijme skupenské teplo tání, díky kterému se z něho stane voda, jejíž teplota je také 0 °C, voda se smísí s limonádou a dále se ohřeje opět dle kalorimetrické rovnice na takovou teplotu, kterou bude zchlazená limonáda mít. Chceme-li spočítat celkové teplo, které led změněný na vodu během tohoto procesu přijal, jednoduše sečteme tato tři tepla – z ohřátí na 0 °C, skupenské teplo tání, a ohřátí na výslednou teplotu.

Skupenské teplo závisí pouze na látce, o níž se zajímáme, a na její hmotnosti dle vzorce

$$L = l \cdot m\,,$$

kde l značí měrné skupenské teplo. Toto teplo je pro danou látku a daný přechod mezi skupenstvími stejné, tedy měrné skupenské teplo tání ledu je stejné jako měrné skupenské teplo

[10] Tepelná kapacita závisí na teplotě, nicméně změna její hodnoty se výrazněji projevuje až při extrémních změnách teplot nebo v blízkosti absolutní nuly. Pro běžné výpočty na ni proto postačí nahlížet jako na konstantu.

tuhnutí vody (tento fakt odstraňuje problém s volbou indexu skupenského tepla způsobeného stejným počátečním písmenem tání a tuhnutí). Rovněž platí, že sublimační teplo je součtem tepel tání a vypařování. Pokud se tedy setkáme s úlohou sublimace ledu ve vodní páru, můžeme potřebné měrné skupenské teplo získat sečtením měrného skupenského tepla tání ledu a vypařování vody.

Přenos tepla

Již jsme se seznámili s tím, jak se počítá množství tepla, které nějaké těleso vydá či přijme, ale jak jej může vydat či přijmout? Zaměřme se nyní na to, jak se teplo přenáší. Jedná se o poměrně složitý proces, který lze zjednodušit do tří základních modelů: tepelná výměna vedením (neboli kondukcí), prouděním (konvekcí) a sáláním (nebo též zářením či radiací). V mnoha reálných situacích pak dochází k přenosu tepla více modely zároveň, ale jeden z nich často bývá dominantní a tím se budeme zabývat (zbytek zanedbáme).

Pro popis přenosu tepla používáme veličinu tepelný tok, jež vyjadřuje množství tepla, které projde zkoumanou oblastí za určitý čas ve směru od teplejšího místa k chladnějšímu. Tepelný tok značíme $\dot{Q}$ (Q s tečkou), jeho základní jednotka je watt (W), neboli $\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$ a vypočte se z předaného tepla Q (v joulech) za čas τ (v sekundách) takto:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\tau}\,.$$

Zcela stejně je možné značit a počítat tepelný výkon, tedy veličinu, která udává, kolik tepla za určitý čas dodá zkoumaný zdroj tepla.

V tomto textu se nakonec zaměříme na dva ze tří zmíněných způsobů přenosu tepla: vedení a proudění. Záření se od nich liší tím, že nepotřebuje žádné hmotné prostředí a děje se skrze elektromagnetické vlnění, které vydávají všechna teplá tělesa. Tento přenos tepla (nebo obecně energie) jsme důkladně prozkoumali již ve druhém Výfučtení o Maxu Planckovi.[11]

K přenosu tepla vedením dochází nejtypičtěji v pevných látkách. V části tělesa, kde je vyšší teplota, mají částice vyšší energii, kterou předávají částicím o nižší energii v chladnější části tělesa pomocí vzájemných srážek. Pokud při tomto předávání kmitají částice kolem jedné stálé polohy, tedy nepohybují se volně v prostoru, a narážejí pouze do sousedních částic, jedná se o přenos tepla vedením. Je-li teplo vedeno skrz homogenní desku ve směru kolmém na její plochu, je možné tepelný tok spočítat pomocí vztahu:

$$\dot{Q} = \lambda \frac{S}{d} \Delta T,$$

kde λ značí součinitel tepelné vodivosti (konstanta pro daný materiál), S je plocha průřezu desky, kolmo ke kterému se teplo šíří, d je šířka desky (dráha, kterou v desce teplo urazí) a ΔT je rozdíl teplot konců desky. Jednotkou λ je $\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a hodnoty najdeme v tabulkách.

Přenáší-li se teplo z pevného tělesa (stěny) do kapaliny nebo plynu, či naopak, dochází k přenosu tepla prouděním. Můžeme si to představit například tak, že teplá kapalina je „přitahována“ chladnou stěnou, proto se jí dotýká, nicméně dotykem předá tenká vrstva kapaliny své teplo stěně, čímž se ochladí. Další vrstva kapaliny se chce ale také dostat ke stěně, a tak tu již ochlazenou „odsune“ a sama předává teplo stěně atd. Proudění tedy vzniká samo od sebe, bez lidského zásahu. Při sdílení tepla prouděním platí pro tepelný tok rovnice:

$$\dot{Q} = \alpha S \Delta T\,,$$

[11] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`

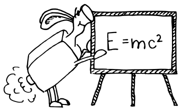
kde S je velikost plochy, na které k výměně dochází, ΔT je opět rozdíl teplot a α značí součinitel přestupu tepla mezi kapalinou/plynem a pevnou látkou v jednotkách $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$. Součinitel přestupu tepla nelze jednoduše matematicky předpovědět, je třeba jej změřit pro každou situaci zvlášť.

Pokud se teplo šíří různými prostředími, musí se tepelný tok ve všech prostředích rovnat. Představme si tedy, že se nám šíří teplo ven z budovy skrz stěnu. Nejdříve se šíří ze vzduchu v budově na stěnu prouděním, čímž získáme rovnici pro tepelný tok $\dot{Q}_1$. Poté se přenáší stěnou vedením, z toho získáme rovnici pro tepelný tok $\dot{Q}_2$. Nakonec se šíří ze stěny do venkovního vzduchu opět prouděním s tepelným tokem $\dot{Q}_3$. Uvažujeme pouze ustálený přenos tepla, proto musí platit $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3$ a rovnice poté můžeme sečíst, čímž získáme $3\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$, kde $\dot{Q}$ je výsledný tepelný tok a za $\dot{Q}_{1-3}$ dosadíme z původních rovnic.

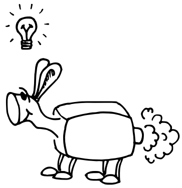
Závěr

Povídání o Williamu Thomsonovi a termodynamice uzavřeme jeho vlastním citátem: „Často říkám, že jestliže můžete cokoliv, o čem hovoříte, změřit nebo vyjádřit čísly, pak o tom vždy víte víc…“

Martina Daňková ***Simona Gabrielová***
simca@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení IV. série



Úloha IV.1 … Lijavec

5 bodů; průměr 4,83; řešilo 12 studentů

Pepu na výletě zaskočila bouřka. Chtěl vědět, jak daleko je a jako časomíru použil svůj vlastní tep. Změřil, že od zablesknutí se hrom ozve za 21 tepů. Pepův tep je 70 tepů/min. Počítáte-li s rychlostí zvuku $v = 333{,}3\,\mathrm{m/s}$, jak daleko je bouřka (resp. blesk, který slyšel) od Pepy?

Určitě jste si všimli, že při bouřce nejprve vidíme blesk a až po nějaké době zaslechneme i samotný hrom. Tento rozdíl má příčinu v odlišné rychlosti světla ($c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) a zvuku ($v = 333{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) – na první pohled vidíme, že rychlost světla je mnohonásobně větší. Na základě její hodnoty také můžeme tvrdit, že Pepa viděl blesk přímo v okamžiku jeho vzniku. Na zvuk si ale musel ještě chvíli počkat. Základní vzorec pro výpočet dráhy je

$$s = v \cdot t\,,$$

kde v je rychlost zvuku ze zadání, s odpovídá dráze, kterou musel zvuk hromu překonat (vzdálenost Pepy a bouřky), a t je čas, za který se zvuk hromu dostal k Pepovi. Na tento čas přijdeme pomocí Pepovy tepové frekvence. Víme, že za 60 sekund uběhne 70 tepů a naším úkolem je zjistit, kolik času je potřeba pro 21 tepů, k čemuž nám pomůže obyčejná trojčlenka

$$t = \frac{21 \cdot 60\,\mathrm{s}}{70} = 18\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní známe rychlost ($v = 333{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) i čas ($t = 18\,\mathrm{s}$), a můžeme tak z našeho vzorečku dopočítat dráhu. Vynásobením obou hodnot tak zjistíme, že Pepa je od bouřky vzdálen přibližně 6 kilometrů.

Karolína Letochová

Úloha IV.2 … V závějích se bude špatně sklízet

6 bodů; průměr 5,68; řešilo 25 studentů

Během vánočních prázdnin napadalo velké množství sněhu, které bylo třeba odklidit ze dvou sousedních luk. První louka má dvojnásobnou plochu oproti té druhé. Skupinka organizátorů se *ráno vrhne na první, větší louku, a začne ji odhrabávat. V polovině pracovní doby se pak skupinka rozdělí na poloviny – první polovina zůstane na velké louce a druhá začne práci na menší. Na konci pracovní doby je velká louka uklizená a na malé louce zbude tolik sněhu, že jej dokáže uklidit jeden organizátor za jeden den. Kolik organizátorů odklízelo sníh první den?*

Ač se úloha může na první pohled zdát složitá, lze ji zvládnout, pokud si ji rozebereme po krocích, zapíšeme si vše, co zjistíme a nebudeme vyvozovat a tipovat věci, které si nezdůvodníme.

Na začátku víme, že na louce pracovalo několik organizátorů, jejichž počet je pro nás neznámá, na kterou budeme muset přijít. Označme si ji x.

Dále víme, že první louka je dvakrát větší než druhá. To můžeme zapsat pomocí rovnosti $l_1 = 2l_2$, kde l_1 je obsah první louky a l_2 je obsah druhé louky.[12]

Dále víme, že organizátoři pracují nějak dlouhou dobu, označme si ji t. Víme, že první půlku pracovní doby pracuje x organizátorů na louce číslo jedna (té větší). V polovině pracovní doby (tj. po uplynutí času $t/2$) se skupinka rozdělí na poloviny a za zbylý čas, tedy také za $t/2$, odklidí polovina organizátorů část druhé, menší louky. Tím pádem víme, že za $t/2$ zvládne x organizátorů uklidit větší část první větší louky a za další $t/2$ ji $x/2$ organizátorů douklidí.

Zaměřme se nyní na větší louku s obsahem $l_1 = 2l_2$. Vzhledem k tomu, že jim tyto dvě části práce při počtu x a $x/2$ organizátorů trvaly stejně dlouho a podruhé bylo organizátorů dvakrát méně, odklidili dvakrát méně sněhu, než když na odklízení velké první louky pracovali všichni. Vyjádřeme si to o trochu více matematicky. Nechť je w efektivita práce jednoho organizátora, tedy jak velkou plochu zvládne uklidit za nějaký čas, kterou budeme měřit v počtu menších luk sklizených za den, podle čehož budeme také nazývat jednotku „za den“ (den^{-1}). První část pracovní doby tedy organizátoři uklidili plochu o obsahu $S_1 = xwt/2$. Za druhou polovinu pracovní doby uklidili plochu s $S_2 = xwt/4$. Dohromady platí:

$$S_1 + S_2 = l_1 \quad \Rightarrow \quad 2S_2 + S_2 = l_1 \quad \Rightarrow \quad S_2 = l_1/3\,.$$

Vidíme tedy, že za první polovinu uklidili organizátoři 2/3 louky a za druhou polovinu uklidili zbylou třetinu.

Stejně velkou plochu $l_1/3$ odklidila ve druhé polovině pracovního času i druhá půlka organizátorů na menší louce o výměře l_2. Vzhledem k tomu, že $l_1 = 2l_2$, což je to samé jako $l_2 = l_1/2$, můžeme říci, že po uplynutí pracovní doby na menší louce zbylo $l_1/2 - l_1/3 = l_1/6$ plochy pokryté sněhem. (Všimněme si, že tento zbylý sníh na malé louce je vyjádřen pomocí plochy velké louky.) Ze zadání víme, že tento zbylý sníh zvládne odklidit 1 organizátor za 1 den. Tedy jsme zjistili, že $w = l_1/6\ \mathrm{den}^{-1}$.

Ze zadání můžeme vyčíst, že organizátoři pracovali celkem jeden den, tedy $t = 1\,\mathrm{den}$. Nyní se však můžeme vrátit k předchozím výpočtům a zaměřit se na plochu S_2. Víme, že pro ni platí

$$S_2 = \frac{xwt}{4}\,, S_2 = \frac{l_1}{3}\,.$$

[12] Ze školy asi víte, že obsah, nebo v případě luk také „výměra“, se značí S, my si jej však můžeme označit, jak chceme. Použité značení nemá na správnost vliv.

Toto můžeme spojit v jednu rovnici, všimneme si totiž, že pak dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé x, kterou dokážeme vyřešit. Rovnice vypadá takto

$$\begin{aligned} xw\frac{t}{4} &= \frac{1}{3}l_1\,, \\ x\frac{1}{6}l_1\frac{1}{\text{den}}\frac{t}{4} &= \frac{1}{3}l_1\,, \\ x\frac{1}{\text{den}}\frac{\text{den}}{8} &= 1\,, \\ x &= 8\,. \end{aligned}$$

Na celé práci se tedy podílelo celkem 8 organizátorů.

Pavla Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Na železnici dějou se věci 6 bodů; průměr 3,52; řešilo 21 studentů

Mišo jedoucí ve své lokomotivě původní rychlostí v_0 začal rovnoměrně brzdit tak, aby do zastavení ujel pouze další dráhu s. Vzápětí (tj. na začátku brzdné dráhy) si však všiml, že v polovině zbývající dráhy leží spadlý kmen stromu. Protože rychleji brzdit nemohl, nezbylo Mišovi než rychle počítat. Kolik z celkového brzdného času t uběhne až do chvíle kontaktu s překážkou na trati? Při řešení vám pomůže znázornění pohybu pomocí grafu.

Uvědomme si nejprve, co vyjadřuje zrychlení. Zrychlení a vyjadřuje rychlost, kterou těleso přidá ke své původní rychlosti za jednotku času a obvykle bývá vyjádřeno v jednotkách $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu zároveň platí vztah

$$s = \frac{1}{2}at^2\,,$$

ze kterého budeme vycházet. Tento vztah je odvozen z obecné rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = v_0t + at^2/2$, kde v_0 je počáteční rychlost před zrychlováním.[13]

V úloze chceme zjistit, kolik z celkového času t (označme tuto část jako T) uběhne do momentu, kdy se dostaneme do poloviny dráhy. Vyjádřeme si čas z předešlého vztahu pro dráhu, neboli vynásobíme strany rovnice 2, vydělíme je a a nakonec obě strany rovnice odmocníme (nemusíme se zabývat tím, že druhá odmocnina může být i záporná, protože čas bereme jako vždy kladný). Těmito úpravami jsme dostali obecnou rovnici pro čas rovnoměrně zrychleného pohybu

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}\,.$$

Tím získáváme vztah pro čas, za který ovšem ujedeme druhou polovinu dráhy. Proto ho musíme odečíst od celkového času t, čímž získáme rovnici pro T:

$$T = t - \sqrt{s/a}\,.$$

[13] V případě zpomalení by pro dráhu platilo $s = v_0t - at^2/2$.

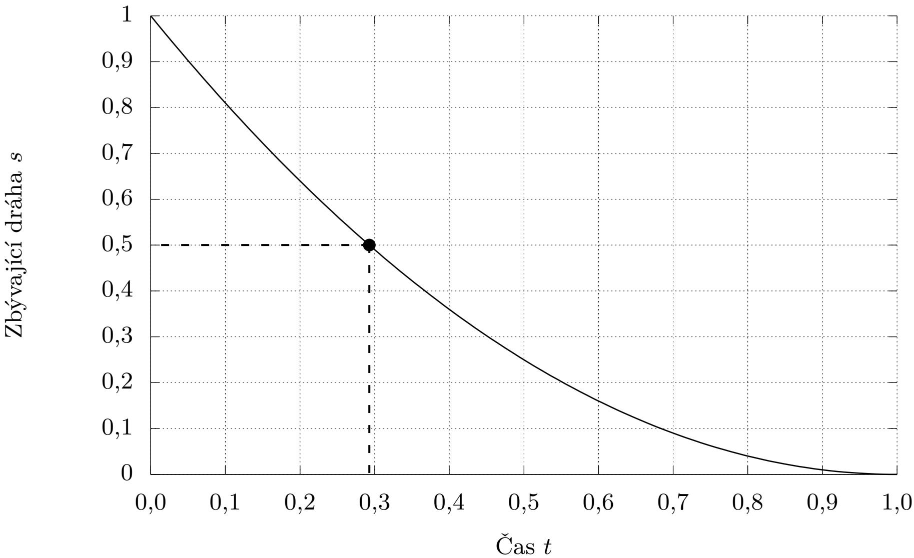
Tady ovšem nalézáme problém: neznáme zrychlení a. Toto zrychlení (zpomalení) je vždy stejné, čehož můžeme využít a vypočítat ho z celkového času t opět ze vztahu pro dráhu.

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad 2s = at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{t^2}\,.$$

Zrychlení a můžeme dosadit zpět do naší rovnice pro T, čímž dostáváme

$$T = t - \sqrt{\frac{s}{2s/t^2}} = t - \sqrt{\frac{st^2}{2s}} = t - \sqrt{\frac{t^2}{2}} = t - \frac{t}{\sqrt{2}} = t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Vzhledem k tomu, že chceme vědět, jak velká část je T z t, vydělíme výsledek t (nebo si můžete říct, že uděláte poměr $T{:}t$). Výsledek tohoto dělení je $1 - 1/\sqrt{2} \approx 0{,}293$. Jinak řečeno: Z celkového času t uběhne zhruba $0{,}293t$, než se vlak dostane do poloviny své dráhy.



Obr. 2: Graf závislosti dráhy na čase s vyznačeným bodem poloviny dráhy.

Toto tvrzení si můžeme i vizuálně prokázat. Při sestrojení grafu závislosti dráhy na čase můžeme vyčíst, v jakém čase vlaku zbývá jaká část dráhy. Jestliže se tedy podíváme na hodnotu $s = 0{,}5$, můžeme vidět, že x-ová souřadnice bodu na této křivce je jemně před značkou $t = 0{,}3$, což zhruba odpovídá našemu výsledku $T = 0{,}293t$.

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 . . . Krátkozraký

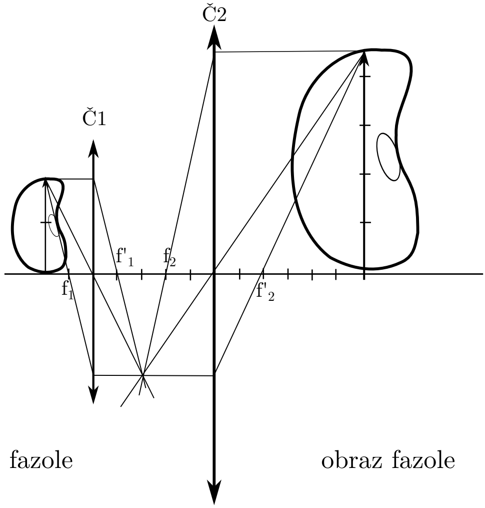
6 bodů; průměr 5,08; řešilo 13 studentů

Marcovi velmi chutná čočka. Jednoho dne si pořídil spojnou, která má ohniskovou vzdálenost 1 cm *z obou stran, a k tomu druhou, také spojnou o dvojnásobné ohniskové vzdálenosti.*

Nejdříve se podíval na fazoli o výšce 2 cm *první čočkou, kterou umístil do vzdálenosti také* 2 cm *od fazole. Poté o* 5 cm *blíže ke svým očím umístil druhou, takže se na fazoli díval skrz obě čočky. Protože má ale Marco dvě oči, může rozpoznat, kde v prostoru leží výsledný obraz fazole po průchodu světla oběma čočkami a jakou má vzdálenost od druhé čočky. Kde leží výsledný obraz fazole a jak je vysoký?*

Pro řešení této úlohy je vyžadována základní znalost optické terminologie a postupů používaných ve všech úlohách o světelných paprscích (z geometrické optiky). Pokud jste se náhodou k tomuto tématu ve škole ještě nedostali nebo si jej jen potřebujete zopakovat, doporučujeme prostudovat jedno z našich starších Výfučtení.[14]

Důležité je správné porozumění významu pojmu optického obrazu a jak jej obvykle zakreslujeme do geometrických nákresů optických soustav. Každý bod *předmětu*, na který se skrze čočky díváme, můžeme chápat jako zdroj z něj se rozbíhajících paprsků. Část z těchto paprsků se potom může po průchodu čočkami opět setkat v jednom bodě, a vytvořit tak jeden z bodů tzv. *obrazu*. Pokud by se však směr světelných paprsků otočil, mohly by projít přesně tu samou cestu i pozpátku. Obraz i předmět tedy charakterizujeme jako místa, kde se protínají světelné paprsky, ať už do dotyčného vstupují, nebo z něj vystupují. Pro vyřešení úlohy je ale nutné si uvědomit, že vzniklý obraz po průchodu světla první čočkou může také fungovat jako předmět pro další čočku, protože z každého bodu, ve kterém se paprsky sbíhají, se následně i rozbíhají.



Obr. 3: Na tomto obrázku jsou zakresleny dráhy všech tří zmíněných paprsků pro každou z čoček. $Č_1$ a $Č_2$ jsou označení pro obě čočky a f_1 a f_2, resp. f_1' a f_2' jsou jejich odpovídající ohniska. Rysky představují 1 cm.

Zmínili jsme se o protínajících se paprscích, ale které to jsou? U každé tenké čočky je užitečné sledovat 3 význačné paprsky: 1) vycházející z předmětu a kolmo dopadající na čočku, který se láme do ohniska na druhé straně, 2) vycházející z předmětu skrz střed čočky, který se

[14] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r6/vyfucteni/vyfucteni_5.pdf`

neláme, a nakonec 3) procházející ohniskem z té strany čočky, na které je předmět, a lámající se zase tak, aby na druhé straně vycházel kolmo na rovinu lomu. Na základě úvahy výše je jasné, že k nalezení obrazu stačí pouze libovolné dva z těchto paprsků. Ilustrujme si však vše na obrázku 3, který je kompletním grafickým řešením této úlohy.

Úlohu můžeme vyřešit geometricky nebo výpočtem – nejdříve se podívejme na to první. Pro geometrickou konstrukci je užitečný čtverečkovaný nebo milimetrový papír, na kterém můžeme snadno vyznačit optickou osu soustavy (na obrázku vodorovná čára) a také roviny čoček. Začneme zanesením bodu, který bude hrát roli nejvyššího bodu předmětu, na souřadnicích $[-2\,\mathrm{cm}, 2\,\mathrm{cm}]$, a z něho pak zkonstruujeme výše zmíněné 3 čáry. V jejich průsečíku se nachází obraz vytvářený 1. čočkou. Prostou geometrickou konstrukcí dalších lomených čar ve směru horizontálním, prodloužením přes ohnisko f_2 a nakonec případně konstrukcí přímky skrze střed čočky, dostaneme druhý průsečík, který představuje finální obraz.

Můžete namítat, že paprsky se neumí ve volném prostoru zalomit bezdůvodně, a ptát se, odkud vlastně pochází např. ten paprsek, který po vzniku prvního obrazu prochází středem $\check{\mathrm{C}}_2$. Tento paprsek je pouze pomocný, a pokud bychom jej prodloužili nazpět na čočku $\check{\mathrm{C}}_1$, nezalomil by se zpět na fazoli. Pokud ale část paprsků ztrácíme, jak je možné, že je obraz ve skleněné čočce stejně jasný jako původní předmět? Tajemství se skrývá v ostatních paprscích, které na tomto obrázku nebyly zakresleny. Pokud část světla ztrácíme po lomu první čočkou na spodní části nákresu, existuje ještě stejné množství paprsků v horní části obrázku, které sice nekreslíme, ale světlo z nich doplní jinak tmavnoucí obraz.

Ve výsledku si můžeme přeměřit, že se obraz nachází 6 cm po druhé čočce s výškou 4 cm. Ověřme si tento výsledek výpočtem. Někteří z vás jistě znají zobrazovací rovnici tenké čočky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{af}{a-f}\,,$$

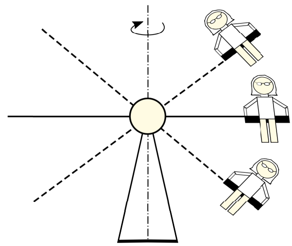
kde a je předmětová vzdálenost a a' je obrazová vzdálenost. Vzdálenost f je ohnisková. Pro první čočku $a = 2\,\mathrm{cm}$ a $f = 1\,\mathrm{cm}$. Obraz tak vyjde jako vzdálený 2 cm od roviny první čočky. V zadání se píše, že druhá čočka je k očím blíže o 5 cm, to znamená, že zmíněný obraz, který je nyní předmětem, má $a = 3\,\mathrm{cm}$. Je snadné si dosadit a vidět, že výsledné a' je 6 cm. Paprsek procházející středem čočky nám také pomáhá určit výšku výsledného obrazu z podobnosti trojúhelníků. Pokud je předmět druhé čočky vysoký 2 cm a vzdálený 3 cm, pak pokud se obraz nachází zmíněných 6 cm od čočky, musí být druhá odvěsna trojúhelníku (výška obrazu) odpovídajícím způsobem dvojnásobná (aby byl zachován poměr vzdálenosti od čočky a výšky). Dvojnásobná výška k původním 2 cm dává ony 4 cm.

Nakonec se můžeme ještě pozastavit nad tím, co to vlastně znamená, že je obraz předmětu před čočkou nějak vzdálený a nějak vysoký. Takový nákres, jako je na obrázku 3, totiž můžeme vytvářet i bezmyšlenkovitě a neporozumět tomu, co vlastně znamená poloha a výška obrazu. Může se nám totiž zdát zvláštní, že se v optice učíme kreslit obrazy někde mimo rovinu čočky, když nikdo nikdy žádný obraz jinde než v čočce neviděl. Fazoli (její obraz) pravděpodobně uvidíme jen tehdy, budou-li naše oči blízko k optické ose a ne pokud se na soustavu budeme dívat ze strany, jako to děláme na obrázku, kde je vše nakresleno z profilu. Na co se to tedy oči skutečně dívají? Odpovědí je, že se dívají doopravdy na obraz, což můžeme snadno rozmyslet. Vzpomeňme si, že obraz slouží jako předmět pro další čočku. V tomto případě můžeme do soustavy přidat ještě třetí čočku, a tou je naše oko – svýma očima nevidíme skrze čočky nikdy předmět, ale pouze jeho obraz, protože nám o něm nepodává informaci nic lepšího než dvakrát lomené paprsky původně z předmětu vycházející. Pokud by čočky byly dostatečné velké a sklo dokonale čisté a matné, nedokázali bychom odhadnout skutečnou vzdálenost předmětu od našich očí, ale pouze jeho obrazu, a ten v tomto případě skutečně uvidíme jako očím ještě bližší, než je $\check{C}_2$. Nezapomínejme také na fakt, že polohu obrazu můžeme vidět jen díky tomu, že jsme vybaveni párem očí – prostorovým viděním. Díky tomu je možné zachytit alespoň dva paprsky vycházející ze společného průsečíku.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.5 ... Už se to točí?

8 bodů; průměr 5,00; řešilo 11 studentů



Některé kolotoče na poutích se dokáží sklápět tak, že návštěvníci sedí nakloněni na stranu pod úhlem 45° vůči zemi jednou nad a jindy pod původní vodorovnou hladinou, přičemž je osa otáčení stále kolmá k zemi tak jako na obrázku. Jednou si Bětka do takového kolotoče s koeficientem smykového tření μ sedla[15] (pohledem ve směru otáčení), byla připoutaná a nedržela se. Při dostatečně rychlých otáčkách však tření přestalo stačit a Bětka se musela chytit, aby zůstala na místě. Tíhové zrychlení g považujeme jako obvykle za známé.

1. *Určete maximální otáčky kolotoče, kdy se Bětka ještě nemusí držet, pokud je mezi Bětkou a osou kolotoče známá vzdálenost r a kolotoč je zpočátku nastaven do vodorovné polohy.*
2. *Jak velká je maximální možná na Bětku působící třecí síla při hmotnosti m, pokud ji kolotoč naklopí o 45° k zemi, avšak při stejné délce ramene[16] a dané rychlosti otáčení ω kolem stále svislé osy?*
3. *Jaké jsou v takovém případě opět maximální otáčky bez držení? Jaké podmínky by měl z toho splňovat koeficient tření, aby se návštěva poutě odehrála postupně tak, jak je popsáno v prvním odstavci?*
4. *Pokud naopak rameno zvedneme o 45° nad původní polohu, jak se obě podmínky změní?*

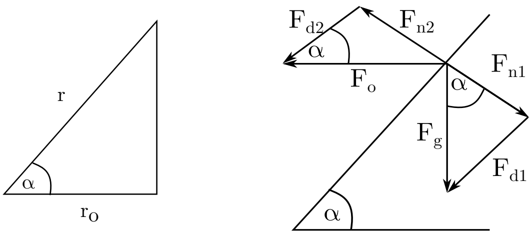
Své výsledky můžete uvést v úhlové rychlosti (ω) i frekvenci (f).

Tuto úlohu je možno řešit obecně za použití goniometrických funkcí, ale také výhradně pro toto zadání uvážením rozkladu síly, která tvoří úhlopříčku čtverce, jehož strany jsou svislými a vodorovnými složkami síly, s pouhým převodem pomocí $\sqrt{2}$. Oba způsoby jsou zde popsány. Pokud tedy ještě neumíte goniometrické funkce používat, čtěte toto vzorové řešení klidně dál, dokud se výklad nestane pochopitelným.

Na úvod se zamyslíme, jak vždy určíme, jestli Bětka klouže z kolotoče, nebo ne. Bětka se obecně nachází na nějaké nakloněné rovině svírající se zemí úhel α (nakloněná rovina je sedačka kolotoče, kterou považujeme za rovnou). Pokud je kolotoč rovnoběžný se zemí, znamená to jen, že $\alpha = 0°$.

Udělámé si tedy náčrtek Bětky na kolotoči, ve kterém znázorníme síly na ni působící (viz obrázek 4).

[15] Řecké písmeno μ [mí] je dalším z často používaných symbolů pro koeficient smykového tření kromě f.
[16] Poloměr otáčení bude tedy nutně menší než délka ramene.



Obr. 4: Rozklad sil působících na Bětku.

Jak vidíme, poloměr otáčení r_o je na náčrtku jiný, než je délka ramena r (ostatně to nám napovídá už i zadání). Pro výpočet odstředivé síly nutně potřebujeme znát poloměr otáčení, který vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku

$$r_\mathrm{o} = r\cos\alpha\,.$$

Bětčinu tíhovou sílu o velikosti $F_\mathrm{G} = mg$ směřující kolmo k zemi jsme rozložili na složky F_n1, která směřuje kolmo k podložce (sedačce kolotoče) a na F_d1, která pomáhá Bětce sklouznout dolů. Jejich velikosti odvodíme pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus

$$F_\mathrm{n1} = F_\mathrm{G}\cos\alpha\,,$$
$$F_\mathrm{d1} = F_\mathrm{G}\sin\alpha\,.$$

Odstředivou sílu o velikosti $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$ jsme rozložili taktéž do dvou složek: F_n2, která „nadzvedává" Bětku ze sedačky (dle našeho náčrtku má opačný směr než F_n1) a F_d2, která pomáhá Bětce sklouznout ze sedačky (tedy má stejný směr jako F_d1). Jejich velikosti jsou

$$F_\mathrm{n2} = F_\mathrm{o}\sin\alpha\,,$$
$$F_\mathrm{d2} = F_\mathrm{o}\cos\alpha\,.$$

Nesmíme ale zapomenout, že pokud bude kolotoč nadzvednutý (místo poklesnutý), bude mít F_n2 stejný směr jako F_n1 a naopak F_d2 bude mít opačný směr než F_d1.

Hraniční podmínka pro to, jestli Bětka sklouzne, nebo ne, je vyjádřena rovnováhou sil tečných s nakloněnou rovinou. Konkrétně jde o rovnost třecí síly $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n}$ a pohybové, která ji stahuje dolů:

$$\mu(F_\mathrm{n1} \pm F_\mathrm{n2}) = F_\mathrm{d1} \pm F_\mathrm{d2}\,.$$

Znaky $\pm$ na obou stranách rovnice vyjadřují směr dané síly – pokud má druhá síla stejný směr jako první, tak ji přičteme, pokud opačný směr, tak ji odečteme. Vzpomeňme si totiž na to, že třecí síla působí vždy proti směru pohybu.

Hodně z nás ale není zběhlých v počítání se siny a kosiny. V zadání příkladu máme vždy buď úhel $\alpha = 0^\circ$ (v prvním podúkolu), nebo úhel $\alpha = 45^\circ$ (v ostatních podúkolech). Řešení nebudeme provádět úplně obecně, ale trošku si pomůžeme tím, že hned budeme dosazovat za siny a kosiny.

Hodnota 45° je zvláštní v tom, že pro ni platí

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

což lze odvodit geometricky (úhel 45° se vyskytuje například v jednotkovém čtverci, jehož uhlopříčka má délku $\sqrt{2}$). Budeme tedy vždy za hodnoty $\sin 45°$ a $\cos 45°$ dosazovat hodnotu $1/\sqrt{2}$ (ačkoliv matematikům se to možná nebude líbit, neboť máme odmocninu ve jmenovateli).

1. Zopakujeme si, k čemu jsme dospěli v prvním odstavci.

   Na Bětku působí směrem ven z kolotoče odstředivá síla F_o o velikosti $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$. Proti této síle, pokud se Bětka nedrží, působí pouze třecí síla F_t, kterou spočteme z normálové síly $F_\mathrm{n} = mg$ jako $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n} = mg\mu$. Bětka se může nedržet právě do té chvíle, dokud je $F_\mathrm{t} \geq F_\mathrm{o}$. V hraničním případě tedy platí $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{o}$, tedy

   $$m\omega^2 r = mg\mu\,.$$

   Z čehož vyjádříme maximální úhlovou rychlost kolotoče[17]

   $$\omega = \sqrt{\frac{g\mu}{r}}\,.$$

   Pokud bychom chtěli zjistit počet otáček f za sekundu (frekvenci otáčení), přepočteme podle vzorce $\omega = 2\pi f$.

2. Bětčinu tíhovou sílu musíme rozložit do směru, který je kolmý k podložce (k sedačce) a do směru, který naopak pomáhá tomu, aby Bětka ze sedačky sklouzla. Velikost síly kolmé k podložce je $F_\mathrm{n1} = mg\cos\alpha$ a velikost síly, která pomáhá Bětce sklouznout je $F_\mathrm{d1} = mg\sin\alpha$ (jak víme z úvodu). Dosadíme za siny a kosiny

   $$F_\mathrm{n1} = \frac{mg}{\sqrt{2}}\,,$$
   $$F_\mathrm{d1} = \frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

   Nyní musíme zjistit poloměr otáčení r_o, neboť je jiný než délka ramene. Z úvodu víme, že $r_\mathrm{o} = r\cos\alpha = r/\sqrt{2}$.

   Odstředivá síla o velikosti $F_\mathrm{o2} = m\omega^2 r_\mathrm{o}$ směřuje vodorovně ven z kolotoče. My ji ale musíme rozložit na sílu, která má stejný směr jako F_d1, abychom mohli zjistit celkovou na Bětku působící pohybovou sílu, a na sílu, která Bětku „nadzvedává“ – má opačný směr než F_n1 (a bude tedy snižovat tření). Obdobně jako při rozkládání tíhové síly nám vychází $F_\mathrm{d2} = F_\mathrm{o2}\cos\alpha = F_\mathrm{o2}/\sqrt{2}$ a $F_\mathrm{n2} = F_\mathrm{o}\sin\alpha = F_\mathrm{o2}/\sqrt{2}$. Mohlo by nás zmást, že se prohodily funkce sinus a kosinus, ale to je proto, že odstředivá síla směřuje vodorovně na rozdíl od tíhové síly, která směřuje svisle dolů.

   Zjistíme celkovou normálovou sílu F_n jako rozdíl F_n1 a F_n2, neboť působí opačným směrem

   $$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{n1} - F_\mathrm{n2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{F_\mathrm{o2}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$

   Z normálové síly zjistíme třecí sílu F_t působící proti tomu, aby Bětka sklouzla:

   $$F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n} = \mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\right)\,.$$

[17] Zde jen malá matematická vložka. Rovnici odmocňujeme, což není ekvivalentní matematická úprava. Správné řešení není tedy jen to, ke kterému jsme došli, nýbrž i to, kde ω má opačnou hodnotu. V běžných situacích nemá takové řešení fyzikální smysl, tady však smysl má – kolotoč se točí na opačnou stranu.

Maximální možná třecí síla, která může na Bětku působit při úhlové frekvenci ω, je vyjádřená výše. Především si musíme uvědomit, že se jedná o maximální možnou velikost, tedy že pokud k udržení Bětky na sedačce stačí menší síla, bude tato třecí síla menší.

3. Dále zjistíme celkovou sílu F_d působící tak, aby Bětka sklouzla

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{d1} + F_\mathrm{d2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{F_\mathrm{o2}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$

Pokud se Bětka nemá držet, musí být třecí síla větší nebo rovna síle, která způsobuje pohyb dolů. V hraničním případě se rovnají, tedy

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{d}\,.$$

Dosadíme:

$$\mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\right) = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$

Z této rovnice vyjádříme maximální úhlovou rychlost ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}(\mu-1)}{r(\mu+1)}}\,.$$

Vidíme, že v čitateli od koeficientu tření μ odečítáme jedničku. Co to znamená? Jen to, že aby se Bětka mohla na začátku nedržet (i kdyby se kolotoč vůbec netočil), musí platit $\mu \geq 1$, protože pod odmocninou nesmí být záporné číslo. Jinak by složka tíhové síly, která způsobuje pohyb dolů, byla větší než třecí síla a Bětka by ihned klouzala dolů. Pro zájemce dodáme, že kdybychom postupovali v čiré obecnosti, vyšlo by nám

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{r(f\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}}\,.$$

4. Rozklad tíhové síly působící na Bětku už máme hotov, kolmo k podložce působí $F_\mathrm{n1} = mg/\sqrt{2}$ a směrem k ose otáčení kolotoče po podložce působí síla $F_\mathrm{d1} = mg/\sqrt{2}$. Poloměr otáčení r_o taky známe $r_\mathrm{o} = r/\sqrt{2}$.

   Jediné, co se změní, je rozklad odstředivé síly $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r_\mathrm{o}$. Tu nyní rozložíme do směru kolmého k podložce (stejný směr jako F_n1) a do směru, který by způsoboval pohyb Bětky nahoru po podložce (tedy opačný směr než F_d1). Velikosti těchto sil máme určené z úvodu

$$F_\mathrm{n2} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}}\,,$$

$$F_\mathrm{d2} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}}\,.$$

   Nyní vypočítáme celkovou sílu F_n působící kolmo k podložce

$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{n1} + F_\mathrm{n2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,,$$

a celkovou sílu F_d působící ve směru ven z kolotoče po podložce (jako rozdíl $F_\mathrm{d2} - F_\mathrm{d1}$, neboť tyto síly působí opačným směrem) za předpokladu, že $F_\mathrm{d2} \geq F_\mathrm{d1}$ (tedy že by se Bětka pohybovala směrem ven od kolotoče po podložce)

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{d2} - F_\mathrm{d1} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{m\omega^2 r}{2} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

Hraniční podmínka nastane, rovná-li se třecí síla $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n}$ celkové síle, která Bětku posunuje

$$\mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\right) = \frac{m\omega^2 r}{2} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

Můžeme si všimnout, že oproti minulému případu jsou znaménka na obou stranách rovnice prohozená: tření je zesíleno přitlačením Bětky do sedačky, a pohybovou sílu umenšuje tíhová, tedy Bětka je gravitací „stahována“ dovnitř kolotoče. Vyjádříme ω jako

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}(1+\mu)}{r(1-\mu)}}\,.$$

Ve jmenovateli od 1 odečítáme μ, což znamená, že $\mu \leq 1$. Co znamená podmínka, že koeficient smykového tření musí být menší než jedna? To znamená jenom to, že pro větší tření je třecí síla větší než síla působící nahoru při libovolně velké ω, tedy nemá smysl určovat její maximum.

Pro zájemce opět přidáme obecné řešení

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{r(\cos^2\alpha - f\sin\alpha\cos\alpha)}}\,.$$

Výše jsme předpokládali, že $F_\mathrm{d2} \geq F_\mathrm{d1}$. Co kdyby to bylo naopak? Bětka by klouzala směrem dolů ke středu kolotoče, protože by odstředivá síla, a tedy i rychlost otáčení byla moc malá. V tomto případě vypočítáme minimální potřebnou ω a to tak, že jednoduše odečteme obráceně. To se promítne do výsledku takto (úpravy necháme na poctivém čtenáři)

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}(1-\mu)}{r(1+\mu)}}\,.$$

Což opět vede k podmínce $\mu \leq 1$, která ale znamená náš známý fakt, že pro větší μ se Bětka nezačne pohybovat bez ohledu na úhlové rychlosti.

Robert Gemrot

Úloha IV.E . . . Vy nečetli, a přesto rozmrazili? 7 bodů; průměr 6,72; řešilo 18 studentů

Obyčejná voda tuhne zhruba při 0 °C za pokojového tlaku, avšak vodné roztoky mohou tuhnout i při nižších teplotách. Nemrznoucí kapaliny používané pro provoz dopravních prostředků za *třeskutých mrazů využívají tohoto principu a ve směsi s vodou posouvají bod tuhnutí o více než 30 °C níže. Obvykle jde však o jedovaté látky s dalšími zvláštními vlastnostmi. My si vyrobíme vlastní nemrznoucí kapalinu z netoxické jedlé soli NaCl a vody. Určete teplotu ve vašem*[18] *mrazáku, a pokud je vyšší než −20 °C (v opačném případě mu můžete snížit výkon), najděte, jaký je minimální obsah soli ve vašem roztoku, při kterém za této teploty roztok nezmrzne. Vyhodnoťte také přesnost vašeho měření.*

Úvod

Důležitost vyšetřovaného jevu spočívá ve více směrech. Nejen, že se nemrznoucí směsi používají do strojů jako chladicí kapaliny, ale také po takových směsích například chodíme, když nám semišovou obuv znečišťuje posypová sůl na zimní chodníky, a dokonce kolem nás ovlivňují podnebí, když jsou tepelné vlastnosti moří a oceánů pozměněny tajícími ledovci, které zase naopak koncentrace nemrznoucích přísad snižují, protože fungují jako přírodní úložiště sladké vody.

Důvodem pro zmínění teploty −20 °C v zadání je fakt, že přidáváním soli do vody není možno snižovat teplotu tání roztoku neomezeně. Existuje nejvyšší hraniční množství soli, které je možno v daném množství vody rozpustit (tj. mícháním zmizí viditelné krystalky, ale po přisypání další soli už můžete míchat, jak chcete, ale krystalky nikdy nezmizí), které pro čistou vodu činní zhruba 36 g na 100 ml (ověřte si sami!),[19] a to v širokém rozsahu teplot od 0 °C až po zhruba 40 °C. Pokud se dostaneme na tuto hodnotu, roztok je tzv. *nasycený*. Ten má nejnižší teplotu tání: −21,1 °C. Pokud započítáme vliv nečistot a možnou nízkou přesnost měření teplot, bylo by racionální uvažovat −20 °C jako spodní omezení na teplotu vaší mrazničky.

Základní úvaha pro vypracování úlohy spočívá v nalezení nejmenší potřebné koncentrace soli ve vodě, pro kterou daný roztok neztuhne při teplotě vaší mrazničky. Teplota mrazničky může být víceméně jakákoli mezi 0 °C až −20 °C, avšak bylo by rozumné tuto teplotu fixovat a zmínit ji v řešení.

Největším úkolem v této úloze je nalézt jednu dostatečně přesnou hodnotu, a proto ověřuje přemýšlení nad tím, jak lze experiment zefektivnit. Protože pravděpodobně nemáme spoustu zkumavek nebo tolik času pro hrubé otestování velkého množství různých koncentrací, můžeme si pomoci chytrou úvahou. Mám-li k dispozici N nádob a čas třeba jen na $n = 3$ zopakování měření (tj. 3krát připravit roztoky a čekat na jejich úplné ztuhnutí), mohu využít metodu *dělení intervalu.*

Na základě znalosti nasyceného roztoku mohu například zmíněných 36 g/100 ml rozdělit na N-tiny a pro 1. kolo chlazení nechat zchladit na danou teplotu všech N nádob vedle sebe, ve kterých bude postupně $1 \times (1/N)$ až $N \times (1/N)$-koncentrovaný roztok (např. 60 g/ℓ, 120 g/ℓ atd. až po maximálních 360 g/ℓ). Část roztoků na straně méně koncentrovaných ztuhne, a jistě zbudou některé koncentrovanější, které „vydrží“. Pak se stačí jen podívat na koncentraci sousedícího ztuhlého roztoku a vedle něj stále kapalného roztoku, a zúžit rozmezí koncentrací, ve kterých hledáme, na vymezené těmito dvěma. Připravíme tedy roztoky jemněji naměřené (krok v koncentraci mezi nimi činí už N^2-tiny z nejvyšší koncentrace), opakujeme proces chlazení. Celkem opakujeme n-krát. Tímto procesem dokážeme již získat velmi přesné výsledky.

[18] či v jakémkoliv jiném nebo jinak dostupném

[19] SÝKORA, Václav. *Chemickoanalytické tabulky.* Praha: SNTL, 1976.

Experiment a jeho výsledky

V našem případě zkoumáme chování roztoku NaCl a H_2O při nízké teplotě. Zajímavých výsledků však jistě dosáhneme i použitím doma běžně dostupné kohoutkové vody, která by měla mít obsah předem rozpuštěných látek výrazně méně než 1 g na 100 ml. Stejně tak sůl může být běžná „jodidovaná“, protože množství přísad v ní obsažených je prakticky stopové. V našem případě jsme použili široce prodávanou kuchyňskou sůl Castello, v níž údajně obsah jodu ve formě KJO_3 nepřesahuje tisícinu hmotnostního procenta, a to samé lze tvrdit i o protispékavé látce („éčko“ E536 – hexakyanoželezitan draselný aneb $K_4[Fe(CN)_6]$).

Elektronickým multimetrem jsme změřili teplotu v mrazničce 9krát v průběhu 10 hodin, přičemž teplota vzduchu pomalu kolísala (i 2 °C za hodinu) mezi −10 a −17 °C. Protože však má voda velmi vysokou tepelnou kapacitu oproti vzduchu, je možné, že její teplota bude výrazně stálejší. Vytvořili jsme proto prakticky nasycený roztok soli, kdy jsme do mrazničky na zkoušku umístili zhruba 100 ml vody s více než 40 g co nejvíce rozpuštěné soli (bylo jisté, že jde o nasycený roztok, který neztuhne). Poté jsme teplotu měřili obdobně, ale se sondou teploměru ponořenou v roztoku. Po 7 hodinách se v mezích přesnosti multimetru ukázala být teplota roztoku jako stálých −12 °C, bez ohledu na okamžitou teplotu vzduchu, a tu můžeme také považovat za pro tento experiment efektivní teplotu v mrazničce.

Metodu dělení intervalu jsme provedli pomocí šesti shodných sklenic, které jsme v kuchyni našli. Chlazení jsme opakovali dvakrát, tudíž jsme se mohli dostat na přesnost $1/6^2 = 1/36$ intervalu, pro nějž maximální obsah soli na 100 ml vody činil 35,08 g (vizte tabulku 1) – to znamená přesnost zhruba 10 g/ℓ. Ke všem úkonům byla využita digitální váha DS-22, umožňující měřit nejméně setiny gramu.

Každou sklenici zvlášť bylo nutno zvážit (mezi sebou se lišily řádově o gram), váhu vynulovat, přidat požadované množství soli, váhu opět vynulovat a nato přidat 100 g vody. Tato hmotnost odpovídá přibližně 100 ml vody, avšak vyjadřovat koncentrace jako hmotnostní podíl je také užitečné a v úloze u toho zůstaneme.[20]

V tabulce 1 je přehled všech výsledků. Nejistoty je v tomto případě na místě odhadnout jako odpovídající průměrné míře odchylek od střední hodnoty na displeji váhy při každém pokusu. Tyto odchylky byly vždy vyšší než systematická nejistota váhy samotné. Položme je bez újmy na přesnosti jako 0,05 g.[21]

Dalším faktem, zdokumentovaným v tabulce 1, je velikost nejistoty konečné koncentrace pro každé měření. Dva zvýrazněné řádky dole vymezují interval, ve kterém by se měla nacházet pravděpodobná hodnota pro daných −12 °C, a tento interval je o poznání větší než spočtená nejistota: 22,12 °C − 20,89 °C = 1,23 °C. To také znamená, že měření bylo možno opakovat ještě vícekrát, než by se přesnost výsledku a velikost nejistoty začaly vyrovnávat.

Závěr

Výsledkem je pravděpodobná hodnota 21,51 g soli (v polovině pravděpodobného intervalu) na 100 g vody s maximální chybou 0,62 g/100 g pro −12 °C. Pro určení požadované koncentrace na řádově desetiny gramu bychom museli provést ještě alespoň jedno kolo chlazení ($36/6^3 \doteq 0{,}2$).

[20] Mezi tímto podílem a známým *hmotnostním zlomkem* je zásadní rozdíl. Hmotnostní zlomek vyjadřuje obsah jako podíl k hmotnosti celého roztoku (voda+sůl), zatímco my zde uvažujeme veličinu rozpustnosti, která je pouze podílem k hmotnosti rozpouštědla samotného.

[21] V našem textu k experimentálním úlohám jste se mohli dočíst, že procentuální nejistota podílu dvou veličin – jako v tomto případě hmotnosti soli a hmotnosti vody pro výpočet koncentrace – je součtem jejich procentuálních nejistot. Tento výsledek je v tabulce přepočítán zpět na absolutní hodnotu nejistoty, aby mohl být napsán k ±. Po zaokrouhlení však všude vychází stejně jako velmi malý.

Tab. 1: Naměřené hodnoty spolu s dopočtenými koncentracemi. Hmotnosti soli nejsou takové hezké násobky zejména kvůli vysoké obtížnosti přesnějšího dávkování pomocí použité lžičky. Čára v polovině odlišuje první a druhé chlazení.

Sklenice	Hm. vody [g]	Hm. soli [g]	Obsah v roztoku [g/100 g]	Zmrzl?
1	100,00	5,91	$5{,}91 \pm 0{,}01$	ano
2	100,00	11,69	$11{,}69 \pm 0{,}01$	ano
3	100,00	17,53	$17{,}53 \pm 0{,}01$	ano
4	100,00	23,46	$23{,}46 \pm 0{,}01$	ne
5	100,00	29,53	$29{,}53 \pm 0{,}01$	ne
6	100,00	35,08	$35{,}08 \pm 0{,}01$	ne
1	100,00	17,50	$17{,}50 \pm 0{,}01$	ano
2	100,00	18,70	$18{,}70 \pm 0{,}01$	ano
3	100,00	19,90	$19{,}90 \pm 0{,}01$	ano
4	101,00	21,10	$20{,}89 \pm 0{,}01$	**ano**
5	100,80	22,30	$22{,}12 \pm 0{,}01$	**ne**
6	100,90	23,50	$23{,}29 \pm 0{,}01$	ne

Největší obtíží pro srovnání získané hodnoty s jakoukoli tabulkou je fakt, že naše mraznička neudržovala stálou teplotu, kterýžto vliv jsme neověřili častým měřením teplot. V tomto smyslu byla práce ztížena také výkyvy teploty, ke kterým došlo po každém otevření dveří. Dosahovaly i 10 °C a mraznička je posléze odstraňovala vždy alespoň půl hodiny.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.C ... Toto je světlo a toto je tma 7 bodů; průměr 5,40; řešilo 10 studentů

Pan Ashkin byl velice laskav, a tak nám zapůjčil jeden ze svých experimentálních zelených laserů[22] *s výkonem* 1 W. *My ho ovšem budeme používat pro poněkud jiné účely.*

1. *Vypočítejte, kolik tento laser uvolní fotonů za čas* 193,2 ms, *které vyžaduje náš pomyslený experiment.*

2. *Jaká je průměrná intenzita v ohnisku tohoto laseru, pokud jej zaostříme do kruhu o průměru* 1 μm*?*

3. *Nedopatřením jsme při experimentu vedle laseru kýchli, když mířil ke stropu, a zjistili, že některé nejmenší kapénky vzduch zvolna donesl až na ohnisko, kde se udržely proti tíhové síle. Odhadněte jejich hmotnost, pokud jste mikroskopem určili* 0,5 μm *jako jejich nejmenší průměr (uvažujte, že i když se mohou opticky chovat jako voda (pro danou barvu světla), jejich hustota může být vyšší kvůli různým příměsím – laser může unést větší hmotnost při opticky stejném materiálu).*[23]

[22] Vlnová délka byla uvedena v textu.
[23] Většina skutečných kapek, které kýcháme, je mnohem větší, řádově v jednotkách až desítkách mikrometrů.

Řešení této úlohy můžete odevzdávat poštou nebo emailem (ne přes `db.fykos.cz`*!) do 5. dubna.*

1. Jistě víte, že práce je součin výkonu a času. Práce laseru je zároveň rovna vydané energii (protože práce je rovna změně energie). Tuto skutečnost zapíšeme matematicky
$$W = E_\mathrm{C} = Pt\,.$$
Pokud za výkon dosazujeme ve wattech a za čas v sekundách, obdržíme energii v joulech. Pokud čas dosadíte v milisekundách, vypočtete energii v milijoulech. Protože propůjčený laser má výkon 1 W a délka světelného pulzu je 193,2 ms, je energie pulzu 193,2 mJ.

   Abychom spočetli, kolik se při experimentu z laseru uvolnilo fotonů, musíme využít skutečnosti, že mají všechny stejnou vlnovou délku 514,5 nm zeleného světla, která byla uvedena ve Výfučtení. Pro energii fotonu platí
$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}\,,$$
kde h je Planckova konstanta, c je rychlost světla, f je frekvence světla a λ je jeho vlnová délka. Abychom tedy zjistili počet fotonů, stačí celkovou energii pulzu vydělit energií jednoho fotonu.
$$N = \frac{E_\mathrm{C}}{E_f} = \frac{\lambda Pt}{hc} \doteq 5{,}0 \cdot 10^{17}$$
V jednom pulsu tedy náš laser uvolní $5{,}0 \cdot 10^{17}$ fotonů, což je méně než počet atomů v mililitru vzduchu.

2. Rozumějme intenzitu jako veličinu popisující výkon dopadající na danou plochu. Ostříme-li laser do kruhu o průměru jednoho mikrometru, plocha tohoto kruhu je
$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$
a hledanou intenzitu spočteme jako
$$I = \frac{P}{S} = \frac{4P}{\pi d^2}\,.$$
Tady si bylo potřeba dát pozor na jednotky, protože nebyl zadán poloměr, ale průměr, a to navíc v mikrometrech. Dosadíme-li, dostáváme číselný výsledek $I \doteq 1{,}27 \cdot 10^{12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$, což je 10^9krát víc než intenzita záření ze Slunce na povrchu Země.

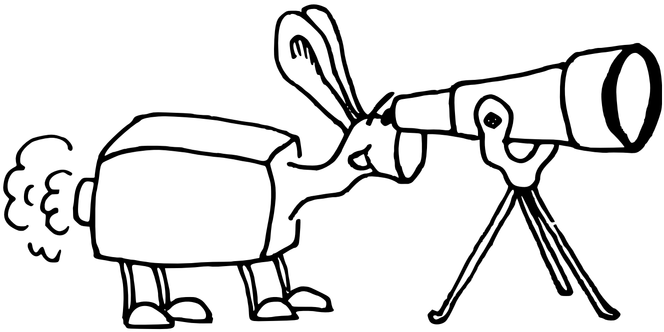
3. Z Výfučtení jsme si zjistili vzorec, ke kterému došel pan Ashkin
$$F_x = \frac{I_0 r^6}{\lambda^4} K\,,$$
kde K pro kapičku vody ve vzduchu je $1{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s{\cdot}m^{-1}}$. O původu této síly jsme již hovořili ve Výfučtení. Nyní ji jednoduše dáme do rovnosti se sílou tíhovou využívaje první Newtonův zákon
$$mg = \frac{I_0 r^6}{\lambda^4} K\,.$$

Z toho si vyjádříme m tím, že obě strany vydělíme g

$$m = \frac{I_0 r^6}{g\lambda^4} K\,.$$

Po dosazení za I_0 a r (pozor na to, že v zadání byl uveden *průměr*, který je dvojnásobný oproti r) pak dostáváme výslednou hmotnost zhruba $8 \cdot 10^{-10}$ kg.

Marco Souza de Joode
joode@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	8	7	7	**45**	**173**
1.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	5	6	–	–	–	6	–	**17**	**54**
2.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	5	–	–	–	–	7	–	**12**	**22**
3.	*Eliška Urbanová*	ZŠ Divišov	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**14**
4.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**10**
5.	*Evelyna Anežka Semrádová*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	8	7	7	**45**	**173**
1.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	5	6	5	6	3	7	–	**32**	**115**
2.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	6	2	6	–	7	7	**33**	**112**
3.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	5	6	4	6	–	–	7	**28**	**89**
4.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	5	6	–	–	–	7	–	**18**	**75**
5.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	5	6	4	–	–	7	–	**22**	**64**
6.	*Václav Verner*	PORG, Praha	5	3	1	–	–	–	–	**9**	**53**
7.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**23**
8.	*Patrik Rosenberg*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
9.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	–	4	–	–	–	–	**7**	**15**
10.	*Šimon Lopour*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
11.	*Marie Hebertová*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
12.	*Jiří Cepník*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	8	7	7	**40**	**153**
1.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	6	6	6	3	7	6	**34**	**122**
2.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	1	3	3	3	7	4	**21**	**111**
3.	*Šimon Genčur*	Biskupské G, Brno	–	6	2	6	5	5	4	**28**	**83**
4.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	6	–	–	–	6	–	**12**	**72**
5.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	0	–	–	–	–	**6**	**40**
6.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
7.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**
8.–9.	*Bernard Czaban*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
8.–9.	*Tereza Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	8	7	7	**40**	**153**
1.	*Tomáš Patsch*	Slovanské G, Olomouc	–	6	6	3	8	7	5	**35**	**142**
2.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	–	6	6	0	6	7	5	**30**	**139**
3.	*Tomáš Veselý*	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	6	5	6	3	7	5	**32**	**138**
4.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	6	6	6	6	7	–	**31**	**132**
5.	*Anna Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	3	6	5	7	7	**34**	**122**
6.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	6	3	6	5	7	4	**31**	**116**
7.	*Šimon Bláha*	Slovanské G, Olomouc	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**114**
8.	*Jiří Antoňů*	G, Špitálská, Praha	–	6	–	–	–	–	–	**6**	**96**
9.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	6	3	6	8	–	–	**23**	**94**
10.	*Veronika Nečadová*	ZŠ Jemnice	–	6	1	–	–	–	–	**7**	**52**
11.	*Adam Jerhot*	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košíře	–	6	1	–	–	6	–	**13**	**49**
12.	*Tadeáš Ďurčanský*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	**40**
13.–14.	*Anna Gryčová*	ZŠ Husova, Liberec 5	–	6	–	–	–	7	–	**13**	**29**
13.–14.	*Matěj Ságl*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
15.–16.	*Nikola Kášková*	G, Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
15.–16.	*Jakub Švojgr*	G, Česká, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
17.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	6	–	–	–	–	–	**6**	**26**
18.	*Štěpán Tomek*	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
19.	*Amálie Jirotková*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
20.–21.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
20.–21.	*Marek Hlava*	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
22.	*Lukáš Ludvík*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
23.	*Anna Jílková*	ZŠ a MŠ Hliníky, Olešnice	–	6	3	–	–	–	–	**9**	**14**
24.	*Jan Krčmář*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
25.–26.	*František Račický*	ZŠ Jemnice	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
25.–26.	*Jolana Štraitová*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
27.	*Pavel Jandejsek*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
28.	*Kateřina Šemíková*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://vyfuk.mff.cuni.cz
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.