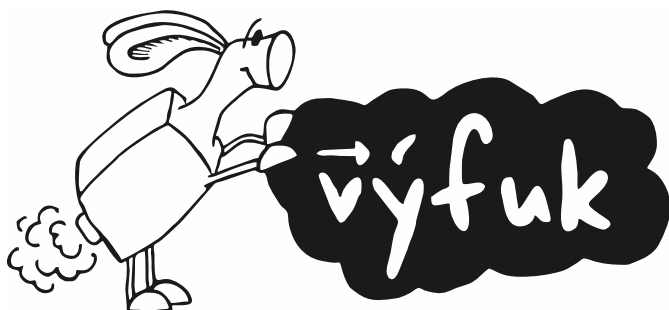




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

jaro se pomalu blíží a s ním i další úlohy Výfuku. V páté sérii se můžete dozvědět něco o Faradayovi nebo také spočítat, jak moc vyroste Výfuček.

V obálkách však na vás také čeká pozvánka na Jarní setkání, které se bude konat v Brně od 26. do 28. dubna a opět se můžete těšit na poutavé přednášky, zajímavé exkurze, nové i staré kamarády a mnoho dalšího.

Poslední listina v obálce vás zve na letní tábor Výfuku. Ten se uskuteční od 4. do 17. srpna v Dobré vodě. Na tábor se již můžete přihlásit v naší databázi. V případě velkého zájmu bude o vaši účasti rozhodovat pořadí po prvních třech sériích.

Dobrou náladu a hodně zdaru při řešení příkladů vám přeji

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



matfyz



Zadání V. série



Termín odeslání: 30. 4. 2019 20.00

Úloha V.1 ... Výfuček roste ⑥ ⑦

5 bodů

Většina historiků se shoduje, že Výfuček se narodil kolem 6. září 2010, protože zhruba v toto datum vyšel nultý ročník Výfuku. Když se narodil, měl výšku π dm. Každý rok poté vyrostl o dalších $\pi/6$ dm. V průběhu kterého ročníku a série byl stejně vysoký v decimetrech jako starý v letech?¹

Úloha V.2 ... Hindenburg ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

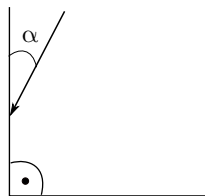
6 bodů

Ve třicátých letech minulého století Němci vyráběli vzducholodě. Největší a nejslavnější z nich byla vzducholod Hindenburg – 245 m dlouhá a 45 m v průměru. Měla být plněna heliem, ale kvůli ekonomické blokadě USA byla naplněna vodíkem. Uvažujme, že měla tvar elipsoidu, ve kterém podobně jako u koule namísto $V = (4/3)\pi r^3$ platí $V = (4/3)\pi abc$, kde a , b a c jsou rozměry elipsy ve třech hlavních osách. Jakou hmotnost nákladu (včetně samotné konstrukce) by unesla tato vzducholod naplněná vodíkem a jakou při naplnění heliem? Potřebné údaje si vyhledejte v tabulkách.

Úloha V.3 ... Přihraj do rohu ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Mějme dvě dostatečně rozlehlé zrcadlové roviny svírající mezi sebou pravý úhel tak jako na obrázku. Na jedno ze zrcadel dopadne pod obecným ostrým úhlem α světelný paprsek. Ten se od těchto zrcadel nějakým způsobem nakonec odrazí zpět do prostoru. Jaký úhel spolu svírá odchozí a zobrazený příchozí paprsek a proč? Ukažte geometrickou konstrukci se všemi náležitostmi, tedy s odůvodněním pro vámi popsané chování paprsku a zápisem postupu geometrické konstrukce.²



Úloha V.4 ... A tak plynul čas ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

V dnešní době využívá mnoho strojů a zařízení elektrickou energii, nástěnné hodiny nevyjímaje. Ovšem vedení elektrické energie pomocí kabelů není v tomto případě dvakrát praktické, proto v hodinách využíváme baterie. Jak dlouho nám dokáží baterie napájet hodiny, jestliže minutová ručička má příkon 1,5 mW a hodinová ručička spotřebuje na otočení $2/3$ energie oproti energii využívané minutovou ručičkou na jedno otočení? K napájení používáme dvě sériově zapojené baterie, každá o napětí 1,5 V a kapacitou 740 mAh.

Úloha V.5 ... Galileův teploměr ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Všichni známe klasický teploměr, který měří teplotu pomocí rtuti stoupající díky teplotní roztažnosti do trubičky se stupnicí. Existují však i jiné teploměry, například bimetalový nebo vyzařovací. My si zde představíme takzvaný Galileův teploměr, který se skládá z válce s vodou,

¹ Uvažujte, že ročník lze zjednodušeně rozdělit na sedminy odpovídající 6 sériím + prázdninám.

² Ve vzorovém řešení se budete moci také dozvědět, k čemu je tato úloha užitečná.

ve kterém plovou kuličky o různé hustotě. Díky teplotní roztažnosti se s teplotou mění hustota vody, a tak při různých teplotách se ve vodě volně vznáší různé kuličky.

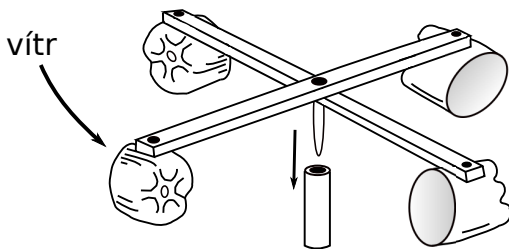
1. Předpokládejme, že pro objem vody v závislosti na teplotě platí vztah $V(t) = V_{20}(1 + \beta(t - 20^\circ\text{C}))$, kde V_{20} je objem za teploty 20°C a $\beta = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ je koeficient objemové roztažnosti.³ Nalezněte vztah pro hustotu vody v závislosti na teplotě.
2. Předpokládejme, že jako ukazatele používáme skleněné kuličky o vnějším průměru 1,5 cm a tloušťce stěny 0,5 mm. Jakou hmotnost vody musíme do kuličky dodat, aby se volně vznášela ve vodě o teplotě 35°C ? Hustota vody za teploty 20°C je $\rho_{20} = 998 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a hustota skla $2400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Teplotní roztažnost skla a hustotu zbylého obsahu kuličky zanedbejte.
3. Pro ukazatel na 20°C chceme použít stejnou kuličku se stejným množstvím kapaliny uvnitř, a tak místo vody použijeme roztok soli. Jaký hmotnostní zlomek musí tento roztok mít? Hmotnostní zlomek je podíl hmotnosti rozpuštěné látky ku hmotnosti roztoku.

Úloha V.E ... Amatérská anemometrie ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Kačka si chtěla usušit vlasy fénem. Když ho zapojila do zásuvky, tak si uvědomila, že vlastně neví, jak rychlý je vzduch foukaný fénem na její vlasy. Napadlo ji, že by si to mohla změřit. Vyrobita si jednoduchý anemometr pomocí kříže ze špejlí s lopatkami, do kterých se může opírat vzduch. Anemometr poté umístila před zapnutý fén. Pomocí počtu otáček přístroje za jednotku času a poloměru lopatky zjistila, jak rychle fouká fén teplý vzduch na její vlasy.

Sestavte si i vy takový anemometr a změřte rychlost vzduchu vycházející z vašeho fénu.⁴ K měření můžete použít i jinak tvarovaný přístroj, než jaký vidíte zde v zadání (v takovém případě nám zašlete jeho fotografii a stručný popis jeho výroby).



³Koeficient máme vztažený k základní jednotce SI, což je pro teplotu kelvin, protože nás ale zajímá rozdíl teplot, můžeme klidně počítat se stupni Celsia.

⁴V řešení uveďte jeho výkon.

Úloha V.C ... Jako nový ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Julča si koupila prstýnek stříbrné barvy, ovšem po čase se svrchní vrstva kovu oloupala a zbyl jen měděný kroužek. Rozhodla se proto pomocí elektrolýzy pokrýt prstýnek vrstvičkou niklu. Anodu tedy tvoří kovový nikl, katodu samotný prstýnek a jako elektrolyt byl použit síran nikelnatý. Zkoumáme tedy rozklad: $\text{NiSO}_4 \longrightarrow \text{Ni}^{2+} + (\text{SO}_4)^{2-}$.

1. Vypočítejte elektrochemický ekvivalent A niklu a určete, za jak dlouho se prstýnek pokryje 3 g niklu, pokud elektrolytem probíhá proud 4 A.
2. Prstýnek byl vyroben stočením kovového válečku 6 cm vysokého a ve svém průměru 2 mm širokého. Za jak dlouho se na prstýnku vytvoří niklová vrstva silná 2 mm při proudu 1,5 A?



Výfučtení: Michael Faraday

Úvod

Michael Faraday byl muž mnoha profesí, chemik, fyzik, technik, filozof a pedagog. Během své kariéry se stal jedním z největších přírodovědců. Jeho práce s elektřinou odstartovala skutečný rozvoj moderní technologie. V oblasti chemie došel k obrovskému pokroku ve znalosti hmoty, zavedl totiž pojmy jako anoda, katoda, elektron nebo ion. Působil jako charismatický řečník, proto měl na přednáškách plno.⁵



Faradayův život

Narodil se 22. září 1791 na anglickém venkově. Pocházel z chudé rodiny, a tak kvůli existenčním problémům nemohl mladý Michael dokončit ani základní vzdělání. Jelikož byl šikovný, dostal se do učení ke knihvazači. Během práce v knihařské dílně četl knihy a spisy nejen s vědeckou tematikou a mohl si chybějící vzdělání doplnit a rozvíjet ho.

Když Michael začal v roce 1812 navštěvovat veřejné přednášky chemika sira Humphry Davyho, jeho talent neunikl ani samotnému profesorovi. Tak se stal jeho žákem a později byl zaměstnán i jako asistent v chemické laboratoři londýnského Královského institutu. Jeho náplň práce tvořily jednoduché pomocné práce, jako mytí laboratorního skla. Profesor Davy pověřil Michaela také vymýšlením zábavných pokusů pro pobavení jeho studentů. Při těchto experimentech Faraday objevil nové chemické sloučeniny, například benzen v ropě. Zabýval se zkapařováním plynů (povedlo se mu zkapařit chlor) a získal si pověst zručného chemika. Neměl žádné matematické vzdělání, a proto ve svých přednáškách i odborných pracích nikdy nepoužil jediný vzorec. Stal se z něj jeden z nejlepších experimentátorů a své posluchače okouzloval schopností vyložit i složité problémy dokonale názorným způsobem.

V roce 1824 byl zvolen členem britské Akademie věd a o rok později jmenován ředitelem jejich laboratoří. V té době byl už dobře finančně zajištěn a mohl se oženit. Vzal si o několik let mladší Sarahu Barnard, kterou potkal právě na institutu.

Úspěch mu nikdy nestoupl do hlavy, celý život zůstal skromný. Odmítl různé nabídky výnosných míst, stejně tak neměl zájem o povýšení do šlechtického stavu. Zakladatel moderní éry elektřiny zemřel 24. srpna 1867 v Hampton Court.

⁵Obrázek převzat z <http://resource.nlm.nih.gov/101414830>.

Elektromagnetická indukce

Faraday díky experimentům s cívkami zjistil, že když se magnetické pole přiblíží k uzavřenému elektrickému obvodu (jako je například cívka), vzniká v tomto obvodu elektrické pole, které reaguje na pohyby pole magnetického. Napětí, které zde vzniká, označujeme jako indukované elektromotorické napětí. Elektromotorické znamená, že bylo vytvořeno jiným zdrojem energie, v tomto případě třeba pohybujícím se magnetem. Výpočet elektromotorického napětí:

$$U_e = \frac{W}{Q},$$

kde W představuje práci neelektrických sil při přemístování elektrického náboje Q uvnitř zdroje. Stejně tak vznikající proud nazýváme indukovaný. Samotné slovo indukce lze přeložit jako vyvození, nebo závěr. Elektromagnetická indukce je tedy jev, který charakterizuje změny probíhající v elektrickém, magnetickém, či elektromagnetickém poli. Elektromagnetická indukce nastává pouze, je-li magnetické pole *nestacionární*, tedy nestálé, měnící se s časem. Když je stacionární, tak neelektrické síly nekonají práci.

Umístíme-li uzavřený elektrický obvod (naši cívku) do magnetického pole, pak elektrickým obvodem nebude procházet žádný elektrický proud, pokud bude magnetické pole stacionární (nemění se s časem). Elektrickým obvodem ovšem může začít procházet elektrický proud, pokud se smyčka, nebo zdroj magnetického pole začne pohybovat. Když se magnetické pole začne měnit, v cívce se indukuje el. napětí a v uzavřeném obvodu prochází indukovaný proud. Směr proudu je závislý na směru změny magnetického pole a/nebo na orientaci pólů magnetu vůči cívce.

Rozlišit severní a jižní pól cívky můžeme pomocí Ampérova pravidla pravé ruky. Pokud chytíme vodorovně cívku do pravé ruky tak, aby ohnuté prsty ukazovaly směr, kterým prochází proud (od $+$ k $-$), náš natažený palec ukazuje na severní pól cívky. Směr magnetických indukčních čar rovných vodičů určíme tak, že vodič chytíme⁶ svisle do pravé ruky tak, aby náš palec byl natažený ve směru procházejícího el. proudu. Prsty ohnuté kolem vodiče ukazují směr magnetických indukčních čar.

Magnetické a elektrické siločáry, teorie elektromagnetických polí

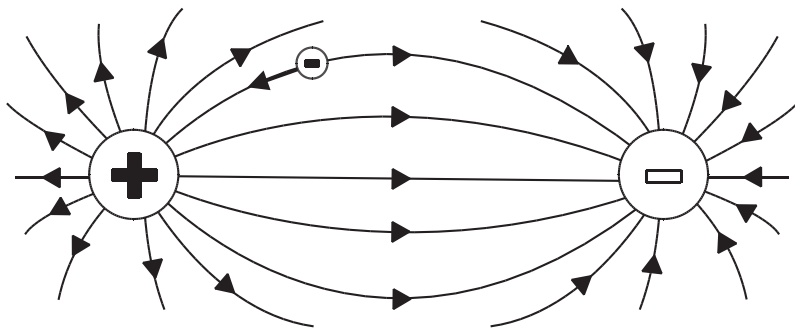
Faraday byl jedním z prvních, kteří podrobně prozkoumali povahu elektrických a magnetických polí, na jejichž práci pak navázali další, kteří vše uceleně matematicky zformulovali. Pojmem pole zde, zjednodušeně řečeno, označujeme potenciální přítomnost síly v blízkosti elektrických nábojů a proudů, která na tyto náboje a proudy také působí (např. pohyb nabitých částic v magnetickém poli Země za vzniku polární záře, nebo třeba rotace cívek elektromotoru, kterými prochází proud a jsou umístěny do magnetického pole od proudů jiných).

Překrývající se elektrické a magnetické pole nazýváme polem elektromagnetickým, protože jsou v mnoha případech spolu fyzikálně svázány, jak je nejlépe vidět na příkladu světla nebo rádiového vysílání. Faradayův výzkum byl zásadní v tom, že mezi nimi ukázal vzájemné ovlivňování (jak je ostatně popsáno v minulé kapitole – tam, kde je proud, je totiž i elektrické pole), a umožnil tak chápat elektrismus a magnetismus jako dvě stránky jednoho jevu. O půl století později pak James Clerk Maxwell ukazuje, že světlo je elektromagnetické vlnění, a optika se tak

⁶Samozřejmě pomyslně – uchopit vodič pod napětím může být krajně nebezpečné, protože nám může procházející proud zabránit ruku uvolnit.

stává podoborem elektromagnetismu. Hluběji se do této problematiky teď nebudeme pouštět a budeme nad elektrickými a magnetickými poli přemýšlet jako nad dvěma nezávislými jevy.

V elektrickém poli je důležitý pojem siločáry. Jsou to pomyslné čáry, které se často kreslí do fyzikálních schémat elektrických polí, aby byla přehlednější. Nacházejí se v daném silovém poli (v našem případě magnetickém, nebo elektrickém), kde určují směr silového působení na elektrické náboje do tohoto předem vytvořeného pole umístěné. Siločáry zpravidla „orientujeme“, tj. připisujeme jim také směr. Kladné náboje se pohybují po směru siločar, a záporné v protisměru. Můžeme je tedy nazvat orientovanými křivkami. U elektrického pole tyto siločáry vycházejí z místa kladného náboje (a jelikož v prostoru nevznikají ani nezanikají) směřují do nekonečna a/nebo k zápornému náboji.⁷ Siločáry se vzájemně neprotínají, přičemž největší hustota siločar značí největší intenzitu elektrického pole. Siločáry dvou stejných nábojů se vzájemně odpuzují. Dva kladné náboje se díky odpudivým silám k sobě nemohou přiblížit. (V případě atomového jádra drží kladné protony pohromadě síly jiného druhu, které se nazývají silné jaderné interakce.)



Obr. 1: Znázornění elektrických siločar mezi kladnými a zápornými náboji. Všimněte si, že siločáry orientujeme od kladného náboje k zápornému. Do pole umístěný malý „testovací“ záporný náboj je urychlován proti směru siločar ke kladnému náboji.

U magnetického pole je situace složitější. Také jej znázorňujeme pomocí čar, a to tzv. magnetických indukčních čar, které je v knihách často vidět vyobrazené pomocí pilin přitahovaných póly magnetů. Pojem siločar není v magnetismu tak dobře definován, protože magnetické pole v každém bodě silově nepůsobí stále stejným směrem na vložené elektrické náboje, nýbrž v závislosti na tom, jakým směrem a jak rychle se tyto náboje pohybují.

Zákony elektrolýzy

Aparaturu na elektrolýzu si představte jako dvě kovové destičky, které jsou napojené na zdroj napětí a obě jsou ponořené do vodivé kapaliny (popřípadě do taveniny). Takovou kapalinu nazýváme elektrolyt. V praxi se jako elektrolyt často využívá kyselina sírová nebo roztok chloridu sodného (kuchyňské soli). Destičky v elektrolytu se nazývají elektrody. Jedna je katoda a druhá anoda, rozlišujeme je podle toho, jaké ionty se na nich při elektrolýze vylučují. Na katodě se vylučují kationty, avšak samotná elektroda má náboj záporný (jinak by se na ní kationty

⁷Z historických důvodů se směr určuje pomocí pohybu kladně nabitě částice, stejně jako dohodnutý směr proudu, i když nyní již víme, že nosiči náboje jsou obvykle záporné elektrony.

ani vylučovat nemohly). Na anodě se vylučují anionty, přičemž má tato elektroda kladný náboj. Při elektrolýze probíhá stejnosměrný proud od katody skrz elektrolyt k anodě. V elektrolytu se rozpustěná látka – pro účely výkladu např. sůl NaCl – rozpadne na jednotlivé ionty (říkáme, že disociuje) a díky elektrickému proudu jsou kationty sodíku Na^+ unášeny ke katodě. Na anodě se vylučují anionty chloru Cl^- . Kationty Na^+ se u katody sloučí s atomem vodíku a kyslíku (ve formě hydroxylových aniontů OH^-), které se nachází v elektrolytu. Vznikne hydroxid sodný NaOH, který se takto průmyslově vyrábí.

První Faradayův zákon říká, že hmotnost látky, která se vyloučí na elektrodě, závisí přímo úměrně na procházejícím el. proudu I , na době elektrolýzy t a elektrochemickém ekvivalentu látky A :

$$m = I \cdot t \cdot A.$$

Elektrochemický ekvivalent látky je konstanta, kterou lze vypočíst podle druhého Faradayova zákona. Ten nám sděluje, že elektrochemický ekvivalent A závisí přímo úměrně na molární hmotnosti látky (tu lze vyhledat pro každý prvek v periodické soustavě prvků).

$$A = \frac{M}{F\nu}$$

K pochopení molární hmotnosti je potřeba znát jednu ze základních veličin SI – látkové množství n s jednotkou mol. To vyjadřuje počet částic (atomů, iontů, nebo molekul). Jeden mol jakékoliv látky zastupuje $6,022 \cdot 10^{23}$ částic. Molární hmotnost prvku M se svou jednotkou $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ vyjadřuje, kolik gramů váží jeden mol látky. Například jeden mol uhlíku váží 12 gramů, jak je možno nalézt v periodické tabulce prvků. Číselně totiž molární hmotnost každého prvku v $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ odpovídá jeho relativní atomové hmotnosti, protože mol je definován právě skrze hmotnost přesně daného množství uhlíku, i když stále je třeba mít na paměti, že molární a relativní atomová hmotnost jsou dvě zcela odlišné veličiny.

F je Faradayova konstanta $F \doteq 9,6485 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ a ν je počet elektronů, které jsou potřeba na vyloučení jedné molekuly látky na elektrodě (pro redukci Cu^{2+} na čistý prvek Cu je $\nu = 2$).

Závěr

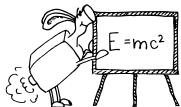
Výfučení o Michaelu Faradayovi vás seznámilo nejen se životem tohoto skvělého fyzika a chemika, ale také s významnými fyzikálními a chemickými jevy elektromagnetickou indukcí a elektrolýzou. Michael Faraday objevil při svých pokusech spoustu chemických látek a jeho objev elektromagnetické indukce umožnil vznik například elektromotorů a alternátorů. Právě proto jsme se vás rozhodli v 5. Výfučení letošního roku seznámit právě s ním.

Julie Weisová

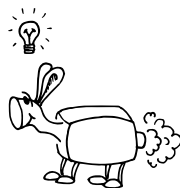
julca@vyfuk.mff.cuni.cz

Petra Hrubcová

petra@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Měnová reforma

5 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů

V Československu byl po válce nedostatek potravin, který byl řešen takzvaným přidělovým systémem, kdy se jídlo dalo koupit jen na potravinové lístky. Tento systém byl zrušen až 1. 6. 1953 spolu s provedením měnové reformy. Během této měnové reformy se mzdy a ceny přepočítaly v poměru 5 : 1, zatímco úspory mezi 5 000 Kčs a 10 000 Kčs byly přepočítány v poměru 6,25 : 1. O kolik nových peněz by tím přišla rodina, která by měla naspořeno 9 000 Kčs? Kolik by si za to mohla po měnové reformě koupit chlebě, pokud po reformě stál bochník chleba 2,8 Kčs?⁸

Rodina přijde o peníze, neboť pro určitou částku peněz jim peníze vymění v méně výhodném poměru. Přesněji řečeno: i když budou přepočítány jak peněžní částky, tak ceny, odlišnost těchto dvou přepočtů znehodnotí část peněz tím, že si za nové peníze bude možno koupit menší množství chleba než předtím.

Abychom získali obnos peněz, o který rodina přijde při přepočítání peněz v méně výhodném poměru, musíme hodnotu peněz převést v obou poměrech a výsledné hodnoty od sebe odečíst. Musíme se proto trochu zamyslet. Kurz 5 : 1 znamená, že za pět starých korun dostane rodina od státu pouze jednu novou korunu. To tedy znamená, že celkem dostane rodina pětkrát méně korun – musíme tedy jejich peníze vydělit 5. Při kurzu 6,25 : 1 aplikujeme stejný myšlenkový postup, tedy musíme množství peněz vydělit 6,25.

Obnosy získané po reformě jsou proto

$$\frac{9\,000 \text{ Kčs}}{5} = 1\,800 \text{ Kčs} \quad \text{a} \quad \frac{9\,000 \text{ Kčs}}{6,25} = 1\,440 \text{ Kčs},$$

přičemž jejich rozdíl se rovná $1\,800 - 1\,440 = 360$ Kčs. To znamená, že rodina po reformě přijde kvůli poměru o 360 Kčs.

Za takovouto částku by si rodina mohla koupit $360/2,8 \approx 128$ celých bochníků chleba.

Adam Krška

adam@vyfuk.mff.cuni.cz

⁸Zájemci si mohou prostudovat předrevoluční vývoj cen dalšího zboží a služeb např. na adrese: <https://bit.ly/2zCUWuh>.

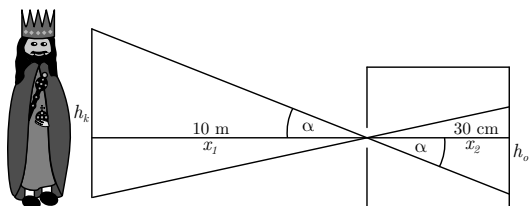
Úloha III.2 ... Camera obscura

5 bodů; průměr 4,75; řešilo 28 studentů

Jeden z nejvýznamnějších českých panovníků Karel IV. si potrpěl na symboliku, a tak například Karlův most byl založen 9. července v 5 hodin a 31 minut, což tvoří palindrom a zároveň tomu datu odpovídala konjunkce Slunce se Saturnem. Pokud by se v této památné chvíli chtěl i vyfotografovat, nemohl by použít klasický fotoaparát,⁹ ale mohl by celou scénu zobrazit na papír zařízením zvaným camera obscura a pak například obtáhnout uhlem.

Camera obscura je vlastně temná komora s dírkou, kterou se promítá obraz na zadní stranu krabice tak, že výsledný obraz je zrcadlově obrácenou zmenšeninou skutečnosti v poměru daném poměry vzdáleností. Jak vysoký bude obraz Karla IV. v komoře hluboké 30 cm, pokud je od „fotografa“ vzdálen 10 m a ve skutečnosti byl tento panovník vysoký¹⁰ 173 cm?

Ze zadání víme, že camera obscura funguje na principu průchodu světla malou dírkou. Tento přístroj si můžeme schematicky představit jako na obrázku 2.



Obr. 2: Karel IV. fotografovaný camerou obscurou

Dále je v zadání zmíněno, že obraz vytvořený camerou obscurou je zrcadlově převrácený a zmenšený v poměru daném poměry vzdáleností. To můžeme znázornit pomocí podobných trojúhelníků uvnitř přístroje.

Představíme si dva paprsky světla, které prochází camerou. Jeden vychází z dolního okraje předmětu, který zobrazujeme, a druhý z horního. V otvoru camery se zkrátí, takže vzniklý obraz bude převrácený. Každý z těchto paprsků svírá s kolmicí k plátnu nějaký úhel α . Pokud si nakreslíme tuto kolmicí, dostaneme dvě dvojice podobných trojúhelníků. Protože jsou trojúhelníky pravoúhlé, víme, že velikost jednoho vnitřního úhlu je 90° a druhé dvojice úhlů jsou vrcholové, tedy také stejné. Z toho vyplývá, že trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu*. Proto platí, že všechny vzdálenosti v těchto trojúhelnících jsou ve stejném poměru:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Toho můžeme využít tak, že spočítáme, kolikrát je trojúhelník v caměře menší než trojúhelník u Karla IV. Stejný poměr totiž bude platit i pro velikost krále a jeho obrazu na zadní straně temné komory.

Protože jsou trojúhelníky podobné, jsou podobné i všechny jejich odpovídající rozměry. Známe vzdálenost krále od otvoru v caměře i vzdálenost jeho obrazu. Poměr k těchto vzdáleností x_1 a x_2 je tedy:

$$k = \frac{x_1}{x_2}.$$

⁹ten byl vynalezen až v 19. století

¹⁰https://cs.wikipedia.org/wiki/Karel_IV.#Fyzická_podoba,_zranění,_nemoci

Když teď známe poměr podobnosti trojúhelníků, můžeme dopočítat velikost obrazu Karla IV. Pro velikost obrazu platí poměr

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{h_k}{h_o},$$

kde h_k je výška krále a h_o velikost obrazu. Velikost obrazu neboli výšku obrazu krále tedy spočítáme jako

$$h_o = \frac{h_k x_2}{x_1}.$$

Dosadíme do vzorce hodnoty ze zadání:

$$h_o = \frac{1,73 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 0,0519 \text{ m} \doteq 5,2 \text{ cm}$$

V komoře hluboké 30 cm bude obraz Karla IV. vysoký asi 5,2 cm.

Lubor Čech

cech@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... Emila Zátopka

6 bodů; průměr 4,54; řešilo 28 studentů

Emil Zátopek jednou před olympiádou trénoval na atletickém okruhu. První kolečko uběhl rychlostí v . Jeho trenér po něm chtěl, aby další kolečko uběhl tak, aby jeho průměrná rychlost za oba okruhy byla $(3/2)v$. Jakou rychlostí musí Emil oběhnout druhé kolečko?

Jednou si jeho trenér řekl, že si z něj udělá legraci a řekl mu, ať oběhne druhé kolečko tak, aby jeho průměrná rychlost¹¹ byla $2v$. Jakou rychlostí by musel běžet tentokrát?

Před řešením úlohy si udělejme přehled v terminologii. Průměrná rychlost neznamená prostý průměr rychlostí, nýbrž podíl celkové uražené dráhy za celkový čas. Kdyby to byl prostý průměr hodnot rychlostí, nezapočítávali bychom do něj, jak dlouho se člověk danou rychlostí pohyboval, proto je potřeba počítat celkovou dráhu za celkový čas. K samotnému řešení využijme jednoduchého faktu, že celkový čas uběhnutí dvou koleček je roven součtu časů oběhnutí jednotlivých koleček. Proto platí rovnice $\tau = t + T$, kde τ je celkový čas, t doba potřebná na uběhnutí prvního kolečka a T doba potřebná na uběhnutí druhého kolečka. Při dosazení základního vztahu času, rychlosti a vzdálenosti $t = s/v$ můžeme v této rovnici vyjádřit čas a dostaneme nový tvar, ve kterém s značí délku jednoho kolečka, ν značí průměrnou rychlost,¹² v rychlost v prvním kolečku a u rychlost v druhém. Rovnice poté vypadá takto:

$$\frac{2s}{\nu} = \frac{s}{v} + \frac{s}{u}.$$

Tato rovnice tedy vyjadřuje celkový čas na uběhnutí dvou kol dvěma způsoby.

¹¹Pozor, průměrná rychlost není průměr rychlostí!

¹²Pozn. ν je řecké písmeno ný a τ řecké písmeno tau. Volíme je, jelikož vypadají jako písmena naší abecedy.

V tomto vztahu známe průměrnou rychlost ν a rychlost v , kterou Emil uběhl první okruh. Chceme vypočítat rychlost u pro zadanou průměrnou rychlost ν . K tomu stačí rovnici jen upravit:

$$\begin{aligned}\frac{2s}{\nu} &= \frac{s}{v} + \frac{s}{u} \\ \frac{1}{u} &= \frac{2}{\nu} - \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} &= \frac{2v - \nu}{\nu v} \\ u &= \frac{\nu v}{2v - \nu}\end{aligned}$$

Nyní jsme dostali rovnici, která nám říká, jak moc si Zátopek v druhém kolečku musí pospíšet, aby dosáhl požadované průměrné rychlosti ν . Tím dostáváme obecnou rovnici, do které můžeme jednotlivé případy $\nu = (3/2)v$ a $\nu = 2v$ dosadit.

$$\begin{aligned}u &= \frac{\nu v}{2v - \nu} \\ u &= \frac{(3/2)v^2}{2v - (3/2)v} \\ u &= \frac{(3/2)v}{2 - 3/2} \\ u &= 3v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{\nu v}{2v - \nu} \\ u &= \frac{2v^2}{2v - 2v} \\ u &= \frac{1}{0}\end{aligned}$$

V prvním případě musí Emil uběhnout druhé kolečko rychlostí $3v$. Druhý případ nás však dostává do kuriózní situace, kde musíme dělit nulou. Dělení nulou však v matematice není definované!¹³ Důvodem pro tento výsledek je, že když Emil uběhne první kolečko, tak už mu nezbyvá žádný čas na to druhé. Aby mohl mít průměrnou rychlost $2v$, musí celou dráhu uběhnout za nějaký čas, ten už ale spotřeboval na první kolečko, a proto to nemůže stihnout.

Pokud bychom podobně chtěli, aby průměrná rychlost byla ještě větší, musel by být čas při druhém kole záporný, protože by Emil v tom prvním prostě běžel moc pomalu (což ale není jeho chyba, když mu zadáváme průměrnou rychlost podle jeho rychlosti v prvním kole). Trenér se jistě dobře pobavil.

Adam Krška

adam@vyfuk.mff.cuni.cz

¹³Přesněji řečeno: operace dělení je v matematice definována jako nalezení takového čísla (podílu), které po vynásobení s dělitelem dá dělence. Protože je však nula jediné číslo, které dá po násobení s jakýmkoli číslem nulu, není tato operace jednoznačná. Neexistuje totiž podíl, který by po vynásobení s dělitelem (nulou) dal původní, obvykle nenulový dělelec, a ani není jednoznačný, kdyby byl dělelec také nula. Všechny operace mají dávat jednoznačné výsledky.

Úloha III.4 ... Ktož jsú boží bojovníci 6 bodů; průměr 4,75; řešilo 24 studentů

Bitvy u Domažlic v roce 1431, která byla součástí čtvrté křížové výpravy proti husitům, se účastnilo přes 120 000 kališníků. Všichni zpívali chorál „Ktož jsú boží bojovníci“ s intenzitou zvuku, kterou odhadněme na 80 dB ve vzdálenosti jednoho metru od každého pěvce.

Pro připomenutí, decibely fungují tak, že 0 dB odpovídá výkonu 10^{-12} W (což znamená $1/1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ W), 10 dB odpovídá výkonu 10^{-11} ($1/100\,000\,000\,000$) W, 20 dB odpovídá 10^{-10} W a tak dál. Kališníci zazpívali husitský chorál, který trvá 5 minut, čímž zahnali křížácká vojska.

1. Srovnajte práci vykonanou zpěvem s výstřelem z kuše (energie šípu z kuše je maximálně 150 J), abyste se přesvědčili o tom, jak efektivní neobvyklá husitská strategie byla.
2. Kolik z této „zpevné“ práce fyzicky zasáhlo křížácké vojsko, které se nacházelo ve vzdálenosti jednoho tisíce metrů, pokud uvažujeme, že uchem přijatý výkon klesá – jako obvykle – s druhou mocninou vzdálenosti?

Před tím, než zde uvedeme řešení, se blíže podíváme na vhodný způsob, jak si lze vyložit poskytnuté číselné údaje v zadání. Zvuk je jev, který se šíří prostorem a má smysl u něj uvažovat veličiny jako intenzitu I , kterou měříme ve wattech na jednotku plochy, na kterou dopadá ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), anebo třeba celkový akustický výkon, který je měřen v prostých wattech (W) a může nám zase dát představu o celkové práci, kterou vykonaly hlasivky pěvců při šíření svého poselství do prostoru. Změny hodnot libovolné veličiny měříme obecně ve fyzice decibelovou stupnicí pro její praktičnost a všeobecnost. V akustice – nauce o zvuku – se dB ujal k popisu hlasitosti, protože ta je přímo spjata s tím, jak hodně se vychyluje například tlak vzduchu, když jím prochází zvuková vlna. Tyto změny jsou větší právě, když je větší i přenos energie prostorem – zmíněný výkon. V zadání se můžeme dočíst o základním bodu stupnice, ve kterém 0 dB odpovídá výkonu 10^{-12} W. Nyní si probereme řešení za té úvahy, že jde o výkon na jednotku plochy, který je vyslán každým pěvcem do okolí. Okomentujeme však i případ, kdy zmíněný výkon považujeme za přijatý tělem křížáka a zanedbáme, že v každé vzdálenosti je podíl povrchu těla na celkovém povrchu kulové zvukové vlny výrazně odlišný. Jádrem této úlohy spočívalo především ve správném použití nezvyklých jednotek.

V první části úlohy není podstatné, zda považujeme husitské vojsko za bodový zdroj, či nikoliv. Počítání akustického výkonu P_0 pro každého kališníka zvlášť nám výpočet naopak usnadní. Ze zadání můžeme lehce odvodit, že jeden kališník zpívá s intenzitou $I_0 = 10^{-4} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ ve vzdálenosti jednoho metru od sebe. Tato intenzita je stejná na celém povrchu koule o poloměru $r_0 = 1$ m. S pomocí poloměru sféry pak můžeme povrch sféry vyjádřit jako $S_0 = 4\pi r_0^2$. Pro celkový akustický výkon jednoho kališníka tedy platí, že $P_0 = I_0 S_0$.

Kališníků je 120 000, proto budou zpívat s celkovým akustickým výkonem $P_1 = 120\,000 \cdot P_0$. Celkovou zpevnou práci W nakonec spočítáme jako součin výkonu P_1 a času t , po který zpívali.

$$W = P_1 t$$

$$W = 120\,000 P_0 t$$

$$W = 120\,000 I_0 S_0 t$$

$$W = 120\,000 I_0 4\pi r_0^2 t$$

Do tohoto obecného vzorce už stačí jen dosadit hodnoty ze zadání.

$$W = 120\,000 \cdot 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 4\pi \text{ m}^2 \cdot 300 \text{ s}$$

$$W \doteq 45\,239 \text{ J}$$

Po vydělení energií jednoho výstřelu z kuše dostáváme, že neobvyklá husitská strategie je srovnatelná jen s asi 300 výstřely z kuše.

Při druhém zmiňovaném postupu, kdy zmíněné výkony považujeme za již přijaté tělem křižáka a nepočítáme s povrchy, je výsledek nutně 4π -krát menší, a dává nám 3 600 J, což odpovídá přesně 24 výstřelům.

Za dostačující považujeme i aproximaci armád za body. V tomto případě křižácké vojsko, které je tisíckrát dál, zasáhne miliontina práce, která by jej zasáhla ve vzdálenosti 1 m, tedy 0,045 J (0,036 J), což je méně než jeden výstřel z kuše.

Rozvííme však pro zajímavost i úvahy nad alternativními složitějšími možnostmi řešení druhé části úlohy. Předchozí aproximace nám neřekne nic o tom, kolik J zpěvné práce křižácké vojsko skutečně zasáhne. Vojska totiž považujeme za body, což je ale skutečně neodpustitelné přiblížení. Armáda čítající 120 000 vojáků má rozměry řádově srovnatelné se vzdáleností, která armády dělí. Přesto nám nezbyvá ani v této části řešení úlohy nic jiného, než považovat alespoň armádu kališníků za bodový zdroj. Jinak by se stal problém natolik obtížným, že bychom se patrně nevyhnuli počítačovým simulacím.

Ze všeho nejdříve si označíme plochu křižáka jako S a odhadneme ji¹⁴ jako $S = 1 \text{ m}^2$. Nezbytné bude zjistit si rovněž počet křižáků. Na kališníky se jich chystalo zaútočit asi 120 000. Následně si pomůžeme jednoduchou úvahou. Ve vzdálenosti tisíce metrů od bodového zdroje nemáme šanci takové množství vojáků rozmístit bez toho, aby se zakrývali. I kdyby se jim podařilo kališníky obklíčit, stále budou stát v několika řadách. Díky tomuto poznatku nakonec můžeme zpěvnou práci W' , která zasáhne křižácké vojsko, odhadnout jako součin W a podílu plochy S_2 pásu s poloměrem $R = 1000 \text{ m}$ a výškou $h = 2 \text{ m}$ a plochy sféry S_1 se stejným poloměrem R .

$$W' = \frac{WS_2}{S_1} = \frac{W2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{Wh}{2R}$$

Nakonec dosadíme za všechny neznámé a dopočítáme W' .

$$W' = \frac{45\,239 \text{ J} \cdot 2 \text{ m}}{2000 \text{ m}}$$

$$W' \doteq 45 \text{ J}$$

Celou obrovskou křižáckou armádu tedy pravděpodobně dohromady nezasáhne ani zpěvná práce ekvivalentní jedinému výstřelu z kuše. Příliš si nepomůžeme ani při započítání odrazů od země, které dále zvyšují nepřesnost výsledku. Zvukový výkon, který křižáka zasáhne po odrazu o zem, by jinak při nepřítomnosti půdy cestoval do plochy sféry odpovídající přibližně ještě jednou té samé řadě křižáků, avšak pod úrovní země, což by celkovou hodnotu maximálně zdvojnásobilo. Ve skutečnosti však půda není ani dobrým zvukovým zrcadlem a drtivou většinu zvuku absorbuje.

Tato úloha v sobě tedy obsahuje více ponaučení. Dává lepší představu o tom, jak malé jsou zvukové výkony, které dopadají na tělesa v okolí pěvců, a jak mohutná musí být jejich armáda, aby se dostaly na výkonovou úroveň našich ostatních smyslů, jako například hmatu,

¹⁴Povrch kůže člověka je maximálně 2 m^2 , nás však zajímá jen ta část obrácená ke kališníkům

kterým můžeme výstřel z kuše pocítit při držení zbraně. Nakonec je jasné, že skutečný zpěv nemá největší účinek na energetickou bilanci posluchačů, ale na jejich pocity.

Viktor Materna

Úloha III.5 ... Šemík

6 bodů; průměr 4,61; řešilo 23 studentů

Při záchraně neumětelského vladyky Horymíra před trestem smrti se jeho věrný kůň Šemík v rámci roubených hradeb Vyšehradu mohl rozbíhat na délce až 300 m, poté ale skočil z výšky 65 metrů do Vltavy (uvažujte vodorovný vrh).

1. Za jak dlouhou dobu od počátku skoku Šemík dopadl do Vltavy?
2. Jakou rychlostí Šemík opouštěl hradby Vyšehradu, pokud víme, že do vody dopadl 60 m od místa skoku?
3. S jak velkým zrychlením se musel Šemík rozbíhat, aby dosáhl potřebné rychlosti? Je možné, aby se kůň takhle rychle rozběhl? Porovnejte například se zrychlením auta.
4. Pod jakým úhlem dopadl Šemík do vody?

1. Pro začátek si musíme uvědomit, že vodorovný vrh se skládá ze dvou současně prováděných pohybů (odpor vzduchu zanedbáváme), a to z volného pádu, a z pohybu rovnoměrného přímočarého. Proto dobu pádu Šemíka vypočítáme ze vzorce pro volný pád:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ten si upravíme na:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Po dosazení tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a uražené vzdálenosti rovné výšce pádu $s = 65 \text{ m}$ nám vyjde čas $t = 3,64 \text{ s}$.

2. Teď, když už známe čas vrhu a ze zadání víme, že vzdálenost místa dopadu od místa, kde Šemík začal skok, je 60 m, můžeme hravě spočítat Šemíkovu rychlost. Jak jsme si již řekli, vodorovný vrh je složen z volného pádu a pohybu rovnoměrného, a proto můžeme rychlost vypočítat ze vzorce pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s}{t}.$$

Dosadíme-li do vzorce minule vypočítaný čas t a Šemíkem uraženou vodorovnou vzdálenost $s = 60 \text{ m}$, vyjde nám hledaná rychlost $v = 16,48 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. Abychom mohli spočítat Šemíkovo zrychlení, musíme nejprve určit, jak dlouho se rozbíhal. Víme, že pro výpočet rychlosti ze zrychlení platí vztah

$$v = at_a.$$

Dále budeme počítat i s dráhou, na které se Šemík rozbíhal a jejíž délka je 300 metrů. Pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu z nulové rychlosti platí vzorec

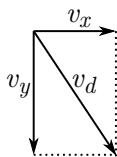
$$s_a = \frac{1}{2}at_a^2.$$

Získali jsme 2 rovnice o dvou neznámých. Určíme tedy Šemíkovo zrychlení tak, že si vyjádříme čas t_a a rovnice upravíme.

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{v}{a} \\ s_a &= \frac{1}{2}a \left(\frac{v}{a} \right)^2 \\ s_a &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} \\ a &= \frac{v^2}{2s_a} \doteq 0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Aby Šemík dosáhl potřebné rychlosti, musel by se rozbíhat se zrychlením $a \doteq 0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tohoto zrychlení může kůň běžně dosáhnout, a dokonce může běžet i s větším zrychlením. Šemík měl v porovnání třeba s Mercedesem dvacetkrát menší zrychlení a průměrné auto má zrychlení přibližně $3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, což je zhruba sedmkrát větší než zrychlení Horymírova zachránce.

4. Pro výpočet úhlu, pod jakým Šemík dopadl do vody, musíme rozložit jeho rychlost v okamžiku dopadu v_d na vodorovnou a svislou složku. Vodorovnou složku známe – tato



Obr. 3: Rozklad rychlosti na složky

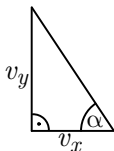
rychlost bude stejná jako rychlost, se kterou opouštěl hradby Vyšehradu, protože odporové síly působící na Šemíka můžeme zanedbat. Tedy:

$$v_x = 16,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Svislou rychlost ve chvíli dopadu do Vltavy spočítáme jako rychlost volného pádu z úrovně hradeb. Víme, že Šemíkův skok trval před pádem do řeky $t = 3,64 \text{ s}$ a po tuto dobu na něj působilo tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Spočítáme tedy svislou rychlost:

$$v_y = gt = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 3,64 \text{ s} \doteq 35,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Nyní známe obě složky výsledné rychlosti, které jsou na sebe kolmé, a tvoří tedy pravoúhlý trojúhelník. K určení úhlu v pravoúhlém trojúhelníku použijeme goniometrické funkce, v tomto případě konkrétně funkci tangens, která je v pravoúhlém trojúhelníku podílem protilehlé odvěsny ku přilehlé. S její pomocí můžeme dopočítat úhel dopadu α .



Obr. 4: Pravoúhlý trojúhelník pro výpočet úhlu dopadu

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{v_y}{v_x} \\ \alpha &= \arctg \frac{v_y}{v_x} \\ \alpha &\doteq 65^\circ\end{aligned}$$

Šemík dopadl do Vltavy pod úhlem $\alpha \doteq 65^\circ$.

Marek Božoň

marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Lubor Čech

cech@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.E ... Doba gumová

7 bodů; průměr 4,48; řešilo 21 studentů

Určitě jste někdy v ruce měli gumičku. Pokud jste si s ní hráli a použili trochu fyzikální intuice, možná jste si všimli, že síla, kterou gumička působí na vaši ruku po natažení má velikost: $F = k \cdot \Delta l$. Závisí tedy na Δl neboli prodloužení, tedy o kolik gumičku natáhnete vzhledem k její klidové délce, a na k neboli tuhosti gumičky. Tuhost je parametr vlastní gumičce, stejně jako je např. mez pevnosti nebo hustota vlastnost jiných předmětů.

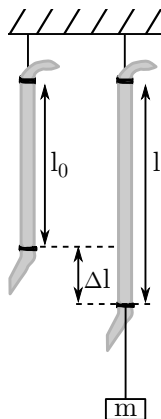
Dokázali byste ale přijít na to, jakou bude mít výslednou tuhost soustava gumiček zapojených paralelně (dvě gumičky vedle sebe) a sériově (na sebe, do jedné gumičky)? Změřte experimentálně tuhost jedné gumičky, která vám přišla spolu se zadáním,¹⁵ a poté soustavy dvou sériově a paralelně zapojených gumiček. Výsledky porovnejte s předpokládanými tuhostmi takových soustav. Čím může být způsobený rozdíl?

Úvod

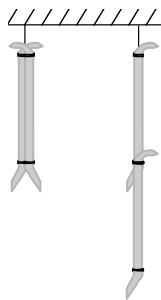
Již na začátku měření narazíme na problém, jak změřit sílu, kterou gumičku natahujeme. Zde jsme použili závaží o hmotnosti $m = 60$ g, které jsme na gumičku věšeli. Tak jsme mohli mít jistotu, že alespoň jedna hodnota bude v rovnici konstantní, a naše měření tím bude přesnější. Dále musíme brát v úvahu fakt, že gumička jako taková není, pro naše potřeby, úplně ideální

¹⁵Pokud jste se zaregistrovali nebo řešíte poprvé, pravděpodobně vám žádná obálka nepřišla. Řekněte si o ni na našem e-mailu vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

objekt. Pokud bychom závaží rovnou zavěsili na gumičku, vzniká chyba v měření, způsobená např. ohybem gumičky.¹⁶ Proto jsme v tomto případě gumičku rozřízli. Poslední problém vyvstal se zapojením gumičky „sériově“ a „paralelně“. Zde byla zapotřebí trocha zručnosti, jelikož jsme dvě rozřízlé gumičky na jejich koncích svázali pomocí nitě, kterou budeme považovat za dokonale tuhou.¹⁷ Poté jsme uzel několikrát zatížili, abychom otestovali, zda-li je dostatečně pevný. Určitě nechceme, aby se nám gumička rozpojila, a spadla spolu se závažím na nohu.



Obr. 5: Nezatížená a zatížená gumička



Obr. 6: Paralelní a sériové svázání gumiček

Předpoklad

Vraťme se ale k otázce ze zadání, a zamysleme se nad úlohou. Tuhost gumičky úzce souvisí s modulem pružnosti a pružnou deformací, o které byla řeč ve 3. sérii minulého ročníku.¹⁸ Tam

¹⁶ V ohybech gumičky působí menší síla než po její „straně“, a tak by byla výsledná délka odlišná.

¹⁷ Čili její prodloužení při zatížení je zanedbatelné

¹⁸ http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/s3/serie3.pdf

můžeme nalézt následující vztahy:

$$F = \frac{ES}{l_0} \Delta l, \quad \frac{ES}{l_0} = k.$$

V těchto vzorcích se vyskytuje konstanta E , známá jako Youngův modul pružnosti v tahu, který je pro nás momentálně nepodstatný. Více nás totiž zajímá obsah průřezu gumičky S , který je součástí výpočtu tuhosti k . Pokud bychom totiž vedle sebe skládali více gumiček k sobě, mohli bychom uvažovat celou soustavu jako jednu gumičku o průřezu odpovídajícím celkovému součtu jednotlivých průřezů. Zde tedy nalézáme odpověď ohledně paralelního zapojení; pokud dvojnásobně zvětšíme obsah průřezu gumiček, dvojnásobně zvýšíme i jejich tuhost. Z toho také vyplývá, že jejich relativní prodloužení¹⁹ bude poloviční oproti zavěšení na jednu gumičku. Co se týče sériového zapojení, je úvaha mnohem jednodušší. Zjednodušeně řečeno: síla způsobená tíhou závaží se rozprostře na dvakrát větší délku, proto bude její relativní prodloužení dvojnásobné. Přesněji řečeno: je třeba uvažovat, že za sebou spojené gumičky setrvávají ve stavu rovnováhy se závaží v klidu. Ze 3. Newtonova zákona nahlédneme, že na sebe tehdy musí působit vzájemně stejnými tažnými silami. Pokud jsou však jiných průřezů, musí v nich působit různé *napětí* (podíl síly a plochy, měřený v pascálech), a tak budou mít gumičky různé prodloužení, které má však určitou celkovou hodnotu. Tato vyšší hodnota odpovídá celkově méně tuhé soustavě gumiček, a tedy tuhost soustavy sériově zapojených gumiček je nižší než jakékoli z nich.²⁰

Experiment

Po probádání problému se můžeme pustit do samotného měření. Pro zpřesnění hodnoty tuhosti můžeme zavěsit více předmětů o různých hmotnostech, zde si vystačíme s jedním předmětem. Hodnoty pak zaneseme do tabulky, jakou je například tabulka 1.

Tab. 1: Naměřené hodnoty spolu s dopočtenými tuhostmi.

Číslo měření	m [g]	l_0 [cm]	Δl [cm]	k [N·m ⁻¹]
1	60	9	2,0	30
2	60	18	3,8	16
3	60	9	0,9	65

První řádek ukazuje hodnoty pro jednu gumičku, druhý pro sériové, a třetí pro paralelní zapojení. Síly potřebné pro výpočet tuhosti jsou dopočteny za předpokladu tíhového zrychlení $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Výsledek je pak zaokrouhlen vždy na 2 des. místa.

Diskuze

Jak si můžeme všimnout, druhé měření pro paralelně zapojené gumičky nám vyšlo $16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, což je přibližně polovina původní tuhosti gumičky $k = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Tuto nepřesnost můžeme

¹⁹Značíme ε , počítá se jako podíl změny délky gumičky (tedy to, o kolik se prodloužila) a její původní délky.

²⁰Obdobně to platí ne pro sériové, nýbrž právě naopak paralelně zapojené elektrické odpory. Celkový odpor je pak menší, než kterýkoli ze zapojených.

vyjádřit jako relativní odchylku od očekávané hodnoty $15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ jako

$$\sigma = \frac{|16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} - 15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}|}{15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}} \doteq 6,7 \, \%.$$

Podobně vypočítáme relativní odchylku i pro sériové zapojení, kde bychom očekávali hodnotu $60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$\sigma = \frac{|65 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} - 60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}|}{60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}} \doteq 8,3 \, \%$$

Relativní odchylka výsledku od očekávané hodnoty je tedy 6,7 % pro paralelní zapojení a 8,3 % pro sériové zapojení. Tato odchylka neznamená, že jsme měřili špatně, v druhém a třetím případě, jen nám říká, jak moc můžeme věřit našim měřením. Protože měření dává vždy náhodný výsledek, dostaneme pouze jedním pokusem pro každý případ poměrně nepřesné hodnoty, které by se daly opakovaným měřením zpřesnit, a zlepšit tak i odchylku výsledku od předpokladu.

Můžeme si povšimnout, že naměřené hodnoty odpovídají předpokladu jen přibližně. Proč? V první řadě zanedbáváme mnoho aspektů. Obecně ve fyzice zanedbáváme při experimentech veličiny a jevy, které na ně mají jen nepatrný vliv. Jedná se například o fakt, že gumička není dokonale pružná (protože v ní není na všech místech stejná hustota materiálu). Dále si musíme uvědomit, že samotný tvar gumičky není dokonalý. V některých částech může být užší, nebo naopak širší než v jiných. Takovéto drobné odchylky jsou samy o sobě téměř neškodné, společně ale mohou napáchat velké škody.

Dále mohlo měření ovlivnit mnoho dalších faktorů, např. teplota. Všichni jsme někdy měli v ruce plastelínu. Když ji vezmeme do ruky, moc nám tvarovat nejde. Stačí ji ale chvíli mnout v rukách (a tím ji ohřát), a hned se nám s ní pracuje lépe. Podobně to funguje i u naší gumičky; během měření se mohla měnit její teplota a s ní i její vlastnosti.

V neposlední řadě se jedná o chyby způsobené samotnými výpočty. Použité tíhové zrychlení $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je jen přiblížením skutečné hodnoty, což se však při přesnosti našeho měření příliš škodlivě neprojeví – skutečné tíhové zrychlení se liší na třetím desetinném místě, naměřená hodnota má však chybu na ještě dříve. Dále nás mohly zradit i některé konstanty, jako je např. v tomto případě tuhost pryže, ze které se gumičky vyrábějí.²¹ Tyto chyby však mají vliv pouze na hodnotu výsledné tuhosti k . Jejich poměry, které jsme si uvedli dříve, zůstávají stejné jako v předpokladu. Ať by tedy faktory tohoto odstavce ovlivnily výsledek sebevíce, stále bychom mohli ověřit platnost hledaných vztahů.

Zmíněné chyby v měření jsou tedy natolik malé (proto je také zanedbáváme), že můžeme celý experiment považovat za úspěšný, a zároveň tím v rámci možné přesnosti potvrdit i naše předpoklady.

Miroslav Jarý

Jason@vfuk.mff.cuni.cz

²¹Samotná pryž se vyrábí z přírodního kaučuku, úžasného materiálu, který v Evropě známe přes 250 let. Do něho se pak přidávají různé příměsi v různém množství, což může výrazně ovlivnit vlastnosti výsledného produktu, gumy.

Úloha III.C ... Viktor s Pascalinou

7 bodů; průměr 5,30; řešilo 20 studentů

- Viktor si postavil hydraulický lis. Průřez válce prvního pístu je $S_1 = 50 \text{ cm}^2$, průřez válce druhého pístu $S_2 = 0,003 \text{ m}^2$. Na druhý píst Viktor umístil závaží o hmotnosti $m_2 = 200 \text{ g}$.
 - Spočítejte, o kolik narostl po položení závaží na píst tlak v kapalině, pokud je první píst ukotvený (nemůže se pohybovat).
 - Jakou silou musí Viktor působit na první píst, aby závaží začalo stoupat?
 - Jakou práci Viktor vykoná, pokud chce závaží zvednout o 10 cm?
- Představte si, že jste Pascal a musíte umocnit výraz $(2a + b + 2)$ na pátou. Máte pouze kalkulačku schopnou sčítat, odčítat a násobit a papír s tužkou. Nemusíte sice použít svoji nejsilnější zbraň, svůj trojúhelník, ale bude se vám skutečně hodit. Dokážete to?

- Vždy předtím, než začneme řešit nějaký problém, je dobré si převést veličiny na základní jednotky – $S_1 = 0,005 \text{ m}^2$, $S_2 = 0,003 \text{ m}^2$, $m = 0,2 \text{ kg}$ a $h = 0,1 \text{ m}$.

- Zvýšení tlaku bude způsobeno položením závaží na druhý píst, tlak tedy bude roven

$$p_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{m_2 g}{S_2} = \frac{0,2 \cdot 9,81}{0,003} \text{ Pa} = 654 \text{ Pa}.$$

- Jestli Viktor chce začít zvedat závaží pomocí prvního pístu, tak bude muset nejdříve vyrovnat tlak na druhém pístu:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ \frac{F_1}{S_1} &= \frac{F_2}{S_2}, \\ F_1 &= \frac{m_2 g}{S_2} S_1 = \frac{0,2 \cdot 9,81}{0,003} \cdot 0,005 \text{ N} = 3,27 \text{ N}. \end{aligned}$$

- Pro vykonanou práci platí, že se jedná o součin síly, kterou bylo těleso zvedané, a výšky, o kterou se zvedlo, tedy

$$W = F_2 h = m_2 g h = 0,2 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \text{ J} = 0,1962 \text{ J}.$$

- Z Výfučení víme, že pokud potřebujeme něco umocnit, tak se vždy díváme na $(n + 1)$ -ní řádek Pascalova trojúhelníku, jelikož chceme závorku umocnit na pátou, tak se podíváme na 6. řádek:

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Při umocnění závorky $(2a + b + 2)$ můžeme použít trik, ve kterém budeme brát $b + 2$ jako jeden člen a potom ho následně znovu roznásobíme. Označíme si je tedy: $2a \rightarrow c$, $b + 2 \rightarrow d$ a rovnou dosadíme jednotlivé členy v trojúhelníku.

$$(2a + b + 2)^5 = (c + d)^5 = 1 \cdot c^5 + 5 \cdot c^4 d + 10 \cdot c^3 d^2 + 10 \cdot c^2 d^3 + 5 \cdot c d^4 + 1 \cdot d^5$$

Následně za proměnné dosadíme

$$1 \cdot 32a^5 + 5 \cdot 16a^4(b+2) + 10 \cdot 8a^3(b+2)^2 + 10 \cdot 4a^2(b+2)^3 + 5 \cdot 2a(b+2)^4 + 1 \cdot (b+2)^5$$

Vynásobíme členy a zároveň roznásobíme člen $b+2$ podle stejného pravidla

$$\begin{aligned} 32a^5 + 80a^4(b+2) + 80a^3(b^2+4b+4) + 40a^2(b^3+6b^2+12b+8) + \\ + 10a(b^4+8b^3+24b^2+32b+16) + b^5+10b^4+40b^3+ \\ + 80b^2+80b+32 \end{aligned}$$

a jako finální krok roznásobíme závorky a získáme mnohočlen o 21 členech

$$\begin{aligned} 32a^5 + 80a^4b + 160a^4 + 80a^3b^2 + 320a^3b + 320a^3 + 40a^2b^3 + 240a^2b^2 + \\ + 480a^2b + 320a^2 + 10ab^4 + 80ab^3 + 240ab^2 + 320ba + 160a + b^5 + 10b^4 + 40b^3 + \\ + 80b^2 + 80b + 32. \end{aligned}$$

Je vidět, že počítání takového příkladu rukou je velmi zdlouhavé a delší členy by zabraly mnoho času, protože zde není rychlý způsob zjistit, jestli jste došli ke správnému výsledku; proto je někdy výhodné použít výpočetní stránky např. <https://www.wolframalpha.com>, kde si můžete výsledek rychle zkontrolovat, ale pamatujte, že nejdůležitější část tohoto příkladu nebyl výsledek, nýbrž jeho postupné počítání.

Patrik Kašpárek

patrik@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	6	6	6	7	7	42	128
1. Bartoloměj Vaníček	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	4	4	–	–	–	3	–	11	37
2. Gabriela Volková	Masarykovo G, Vsetín	5	–	–	–	–	–	–	5	10
3. Eliška Urbanová	ZŠ Divišov	4	5	–	–	–	–	–	9	9
4. Václav Prachař	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	2	–	2	5
5. Evelyn Anežka Se- mrádová	G Jírovce, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	1

Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	6	6	6	7	7	42	128
1. Jan Souchop	G, Mikulov	3	5	6	5	5	3	4	31	83
2. Daniel Rýpar	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	5	6	4	5	5	–	30	79
3. David Něnička	G, Rožnov pod Radhoštěm	5	5	4	6	5	–	3	28	61
4. Alexander Adámek	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	4	5	3	–	–	5	–	17	57
5. Václav Verner	PORG, Praha	5	–	5	–	5	–	–	15	44
6. Jindřich Urban	ZŠ Divišov	4	5	6	–	5	3	7	30	42
7. Kateřina Stefanová	BG B. Balbína, Hradec Králové	4	–	–	–	–	–	–	4	18
8. Patrik Rosenberg	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	17
9. Šimon Lopour	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	–	0	–	–	–	2	7	13
10. Pavel Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	8
11. Marie Hebertová	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	5
12. Jiří Cepník	G J. Jungmanna, Litoměřice	0	–	–	–	–	–	–	0	3

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		5	6	6	6	6	7	7	37	113
1. Anežka Čechová	G, Mikulov	–	5	6	6	5	4	4	30	90
2. Lukáš Linhart	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	6	5	5	5	7	32	88
3. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	4	5	4	–	5	–	18	60
4. Šimon Genčur	Biskupské G, Brno	–	5	6	4	5	4	5	29	55
5. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	–	–	–	–	11	34
6. Zuzana Weisová	ZŠ Židlochovice	–	–	–	4	6	–	–	10	29
7. Jakub Mašek	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	7
8.–9. Bernard Czaban	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	–	–	–	–	–	–	6
8.–9. Tereza Krejčí	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	6

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		5	6	6	6	6	7	7	37	113
1. Martin Kysela	G, Český Krumlov	–	5	6	6	6	5	7	35	109
2. Šimon Bláha	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	6	6	7	36	108
3. Tomáš Patsch	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	6	7	7	37	107
4. Tomáš Veselý	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	5	6	6	6	7	6	36	106
5. Pavel Provaník	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	5	6	5	6	6	7	35	101
6. Jiří Antoňů	G, Špitálská, Praha	–	5	5	4	3	6	6	29	90
7. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	6	5	4	6	32	88
8. Martin Švanda	Arcibiskupské G, Praha	–	5	5	6	2	5	6	29	85
9. Dominik Blaha	G, Uherské Hradiště	–	5	6	6	5	–	7	29	71
10. Veronika Nečadová	ZŠ Jemnice	–	5	2	1	1	1	3	13	45
11. Tadeáš Ďurčanský	G, Nymburk	–	5	2	3	–	–	3	13	40
12. Adam Jerhot	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košíře	–	5	2	6	3	–	–	16	36
13. Matěj SágI	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	29
14.–15. Nikola Kášková	G, Vlašim	–	1	1	–	–	3	–	5	28
14.–15. Jakub Švojgr	G, Česká, České Budějovice	–	5	6	6	6	–	5	28	28
16. Štěpán Tomek	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	–	5	2	3	4	5	4	23	23
17. Amálie Jirotková	G Jírovceva, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	21
18. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	5	–	3	–	–	–	8	20
19.–21. Tereza Dvořáková	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	16
19.–21. Anna Gryčová	ZŠ Husova, Liberec 5	–	–	–	–	–	–	–	–	16
19.–21. Marek Hlava	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	16
22. Lukáš Ludvík	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	15
23. Jan Krčmář	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	12
24.–25. František Račický	ZŠ Jemnice	–	–	–	–	–	–	–	–	11
24.–25. Jolana Štraitová	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	11
26.–27. Pavel Janďešek	G Opatov, Praha	–	–	1	3	1	–	–	5	5
26.–27. Anna Jílková	ZŠ a MŠ Hliníky, Olešnice	–	–	–	–	–	–	–	–	5
28. Kateřina Šemíková	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	–	–	–	–	–	–	4



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.