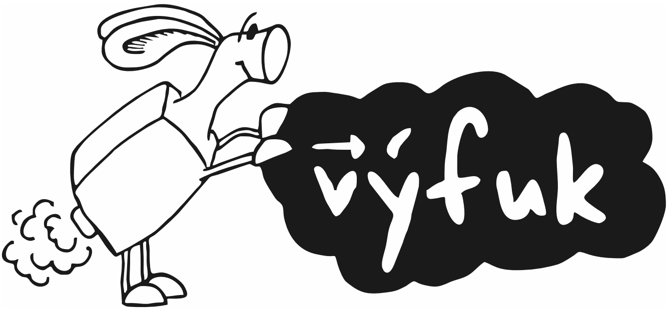


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

v této brožurce naleznete hned několik zajímavých věcí. V první řadě jsou to zadání již 3. série úloh v tomto ročníku. Jsou laděny do historické tématiky, Výfučtení se bude věnovat dalšímu velkému fyzikovi – Blaise Pascalovi.

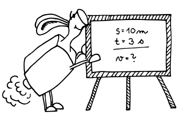
Dále počínaje touto sérií se v brožurce dozvíte správná řešení 1. série a naleznete průběžnou výsledkovou listinu! Ve vaší obálce by také měla být vaše opravená řešení, abyste se mohli podívat detailněji na případné chyby.

Na základě výsledků vyřešených úloh z 1. až 3. série budeme posílat pozvání na tábor, takže se snažte nasbírat co nejvíce bodů.

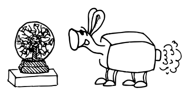
Za námi je také Podzimní setkání. Fotky a program si můžete prohlédnout na našem webu.[1] Pokud jste se ho nezúčastnili, nezoufejte, další společné setkání nás bude čekat na jaře.

Nakonec zbývá už jen popřát vám krásné Vánoce a šťastný nový rok!

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání III. série



Termín uploadu: 7. 1. 2019 20.00
Termín odeslání: 7. 1. 2019

Úloha III.1 ... Měnová reforma ❻ ❼ — 5 bodů

V Československu byl po válce nedostatek potravin, který byl řešen takzvaným přídělovým systémem, kdy se jídlo dalo koupit jen na potravinové lístky. Tento systém byl zrušen až 1. 6. 1953 spolu s provedením měnové reformy. Během této měnové reformy se mzdy a ceny přepočítaly v poměru 5:1, zatímco úspory mezi 5 000 Kčs a 10 000 Kčs byly přepočítány v poměru 6,25:1. O kolik nových peněz by tím přišla rodina, která by měla naspořeno 9 000 Kčs?

[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/setkani/podzim2018`

matfyz

Kolik by si za to mohla po měnové reformě koupit chlebů, pokud po reformě stál bochník chleba 2,8 Kčs?[2]

Úloha III.2 ... Camera Obscura ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Jeden z nejvýznamnějších českých panovníků Karel IV. si potrpěl na symboliku, a tak například Karlův most byl založen 9. července v 5 hodin a 31 minut, což tvoří palindrom a zároveň tomu datu odpovídala konjunkce Slunce se Saturnem. Pokud by se v této památné chvíli chtěl i vyfotografovat, nemohl by použít klasický fotoaparát,[3] ale mohl by celou scénu zobrazit na papír zařízením zvaným Camera Obscura a pak například obtáhnout uhlem.

Camera Obscura je vlastně temná komora s dírkou, kterou se promítá obraz na zadní stranu krabice tak, že výsledný obraz je zrcadlově obrácenou zmenšeninou skutečnosti v poměru daném poměry vzdáleností. Jak vysoký bude obraz Karla IV. v komoře hluboké 30 cm, pokud je od „fotografa“ vzdálen 10 m a ve skutečnosti byl tento panovník vysoký[4] 173 cm?

Úloha III.3 ... Emila Zátopka ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Emil Zátopek jednou před olympiádou trénoval na atletickém okruhu. První kolečko uběhl rychlostí v. Jeho trenér po něm chtěl, aby další kolečko uběhl tak, aby jeho průměrná rychlost za oba okruhy byla $(3/2)v$. Jakou rychlostí musí Emil oběhnout druhé kolečko?

Jednou si jeho trenér řekl, že si z něj udělá legraci a řekl mu, ať oběhne druhé kolečko tak, aby jeho průměrná rychlost[5] byla $2v$. Jakou rychlostí by musel běžet tentokrát?

Úloha III.4 ... Ktož jsú boží bojovníci ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Bitvy u Domažlic v roce 1431, která byla součástí páté křížové výpravy proti husitům, se účastnilo přes 120 000 kališníků. Všichni zpívali chorál „Ktož jsú boží bojovníci“ s intenzitou zvuku, kterou odhadněme na 80 dB ve vzdálenosti jednoho metru od každého pěvce.

Pro připomenutí, decibely fungují tak, že 0 dB odpovídá výkonu 10^{-12} W (což znamená 1/1 000 000 000 000 W), 10 dB odpovídá výkonu 10^{-11} (1/100 000 000 000) W, 20 dB odpovídá 10^{-10} W a tak dál. Kališníci zazpívali husitský chorál, který trvá 5 minut, čímž zahnali křižácká vojska.

1. Srovnejte práci vykonanou zpěvem s výstřelem z kuše (energie šípu z kuše je maximálně 150 J), abyste se přesvědčili o tom, jak efektivní neobvyklá husitská strategie byla.

2. Kolik z této „zpěvné“ práce fyzicky zasáhlo křižácké vojsko, které se nacházelo ve vzdálenosti jednoho tisíce metrů, pokud uvažujeme, že uchem přijatý výkon klesá – jako obvykle – s druhou mocninou vzdálenosti?

Úloha III.5 ... Šemík ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Při záchraně neumětelského vladyky Horymíra před trestem smrti se jeho věrný kůň Šemík v rámci roubených hradeb Vyšehradu mohl rozbíhat na délce až 300 m, poté ale skočil z výšky 65 metrů do Vltavy (uvažujte vodorovný vrh).

[2] Zájemci si mohou prostudovat předrevoluční vývoj cen dalšího zboží a služeb např. na adrese: `https://bit.ly/2zCUWuh`

[3] ten byl vynalezen až v 19. století

[4] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Karel_IV.#Fyzická_podoba,_zranění,_nemoci`

[5] Pozor, průměrná rychlost není průměr rychlostí!

1. Za jak dlouhou dobu od počátku skoku Šemík dopadl do Vltavy?
2. Jakou rychlostí Šemík opouštěl hradby Vyšehradu, pokud víme, že do vody dopadl 60 m od místa skoku?
3. S jak velkým zrychlením se musel Šemík rozbíhat, aby dosáhl potřebné rychlosti? Je možné, aby se kůň takhle rychle rozběhl? Porovnejte například se zrychlením auta.
4. Pod jakým úhlem dopadl Šemík do vody?

Úloha III.E ... Doba gumová ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Určitě jste někdy v ruce měli gumičku. Pokud jste si s ní hráli a použili trochu fyzikální intuice, možná jste si všimli, že síla, kterou gumička působí na vaši ruku po natažení má velikost: $F = k \cdot \Delta l$. Závisí tedy na Δl neboli prodloužení, tedy o kolik gumičku natáhnete vzhledem k její klidové délce, a na k neboli tuhosti gumičky. Tuhost je parametr vlastní gumičce, stejně jako je např. mez pevnosti nebo hustota vlastnost jiných předmětů.

Dokázali byste ale přijít na to, jakou bude mít výslednou tuhost soustava gumiček zapojených paralelně (dvě gumičky vedle sebe) a sériově (na sebe, do jedné gumičky)? Změřte experimentálně tuhost jedné gumičky, která vám přišla spolu se zadáním[6] a poté soustavy dvou sériově a paralelně zapojených gumiček. Výsledky porovnejte s předpokládanými tuhostmi takových soustav. Čím může být způsobený rozdíl?

Úloha III.C ... Viktor s Pascalinou ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

1. Viktor si postavil hydraulický lis. Průřez válce prvního pístu je $S_1 = 50\,\mathrm{cm}^2$, průřez válce druhého pístu $S_2 = 0{,}003\,\mathrm{m}^2$. Na druhý píst Viktor umístil závaží o hmotnosti $m_2 = 200\,\mathrm{g}$.
   (a) Spočítejte, o kolik narostl po položení závaží na píst tlak v kapalině, pokud je první píst ukotvený (nemůže se pohybovat).
   (b) Jakou silou musí Viktor působit na první píst, aby závaží začalo stoupat?
   (c) Jakou práci Viktor vykoná, pokud chce závaží zvednout o 10 cm?
2. Představte si, že jste Pascal a musíte umocnit výraz $(2a + b + 2)$ na pátou. Máte pouze kalkulačku schopnou sčítat, odčítat a násobit a papír s tužkou. Nemusíte sice použít svoji nejsilnější zbraň, svůj trojúhelník, ale bude se vám skutečně hodit. Dokážete to?

Poznámka: Níže najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.

[6] Pokud jste se zaregistrovali nebo řešíte poprvé, pravděpodobně vám žádná obálka nepřišla. Řekněte si o ni na našem e-mailu `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfučtení: Blaise Pascal

Úvod

Blaise Pascal se narodil 19. června 1623 v Clermontu ve Francii. Narodil se do zámožné a vzdělané rodiny – jeho otec Etienne Pascal byl výběrčí daní a také velmi schopný matematik. Bohužel jeho matka zemřela brzy po jeho narození, a tak se o něj hlavně staral jeho otec, který však chtěl, aby se Pascal zaměřoval spíše na humanitní vědy. To se ale změnilo, když desetiletý Pascal odvodil několik pravidel Euklidovy geometrie. Toto změnilo názor jeho otce a začal ho podporovat ve vědecké kariéře. V dalších letech Blaise svoje nadání rozvíjí až do té míry, že některá jeho díla jsou považovány za práci jeho otce. V osmnácti vytváří první prototyp Pascaliny (předchůdce kalkulačky). Přelomovými byly hlavně jeho objevy v matematice. Položil základy kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti a objevil pro Evropu jeden význačný trojúhelník, který od té doby nese jeho jméno.

Později se začíná věnovat experimentům, navazuje na práci Evangelisty Torricelliho s rtuťovou trubicí a z výsledných poznatků zformuluje Pascalův zákon. Bohužel má v průběhu života chatrné zdraví a v roce 1647 dokonce krátkodobě ochrne. Nedlouho poté jeho otec umírá a sám Pascal málem zemře, když se při vyjížďce v kočáře splaší koně a jeho kočár je téměř strhnut z mostu. Po těchto traumatických zážitcích se Pascal ke konci svého života odklání od exaktních věd a začíná se věnovat teologii a filosofii. Umírá 19. srpna 1662 v mladém věku 39 let na nádor mozku v klášteře.[7]

Pascalina, předchůdce kalkulačky a počítače

V devatenácti letech vynalezl první prototyp mechanické kalkulačky, Pascalinu. Sestrojil ji pro svého otce, kterému pomáhala při výkonu jeho povolání. Pascalina se skládala ze tří spojených válců, značících jednotky, desítky a stovky. Otáčením těmito válci se kalkulačce zadaly vstupní hodnoty, na jejichž základě spočítala hodnotu výstupní.

Odmocninu nebo logaritmus byste na ní ale hledali marně. Přístroj dokázal čísla sečíst, anebo odečíst, v některých verzích dokonce i vynásobit. Přesto si našel své uplatnění a Pascal vyrobil několik desítek zdokonalených kusů. Někteří z vás možná znají programovací jazyk Pascal. Nyní už budete vědět, proč se tak jmenuje. Není to proto, že by s ním měl Pascal něco přímo společného. Světlo světa spatřil až více než tři století po jeho smrti a po Pascalovi jej pojmenovali právě kvůli jeho Pascalině, kterou je možné považovat nejen za předchůdce moderních kalkulaček, ale i počítačů.

Pokusy se rtutí v trubici a Pascalův zákon

Na okolní svět se snažil Blaise dívat racionálně (svět se řídí určitými fyzikálními pravidly, které jdou postupně intuitivně odhalit), a proto byl jedním z mála, který v této době ověřoval své

[7] Obrázek Pascala převzat z Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_pascal.jpg`.

Obr. 1: Exemplář Pascaliny v muzeu vědy a techniky v Milánu.

domněnky experimentálně. Všechny ostatní zdroje nepokládal za spolehlivé a svoje experimenty si vždy pečlivě připravil a přesně dokumentoval. Jak bylo zmíněno předtím, Pascal navázal na práci Torricelliho s rtuťovou trubicí a svým měřením vyvrátil jeden z přetrvávajících mýtů „Horror vacui“, který říkal, že příroda se bojí vakua (vždy se jej snaží vyplnit), a tudíž by mělo být nedosažitelné. Dokázal, že výška sloupce rtuti, který je schopen se udržet ve shora jednostranně zaslepené trubici (tj. očekávali bychom, že rtuť může vytéct spodem), závisí na gravitační síle působící na rtuť a na atmosférickém tlaku, který působí proti této síle. Pokud bude sloupec rtuti dostatečně vysoký (přes 76 cm), tak nebude atmosférický tlak dostatečně velký, aby gravitaci vykompenzoval a ve vrchní části trubice se vytvoří (téměř) vakuum.

Následně Pascal zkoumal spojené nádoby a šíření tlaku v kapalinách. Na základě svých pozorování a experimentů zformuloval Pascalův zákon, který říká, že tlak v kapalině se šíří v každém bodě všemi směry stejně a tlak kapaliny je proto stejný v celém jejím objemu (pokud zanedbáme gravitační síly) – to znamená, že libovolně tvarovaným potrubím můžeme tlak přenášet, což je základní princip hydrauliky. Pokrok v ní je z větší části založen na jasné formulaci následujícího zákona.

Pokud si označíme tlak na libovolnou část stěny libovolné nádoby jako p_1 a tlak působící na druhou část stěny té samé nádoby jako p_2, můžeme využít výše zmíněných vlastností tlaku (stále bez ohledu na gravitační síly) a psát, že $F_1/S_1 = F_2/S_2$, kde F je síla působící na část stěny nádoby a S povrch této části. Na počest Pascalovým objevům nosí jeho jméno jednotka tlaku $[p] = \mathrm{Pa}$.

Na závěr této části si uveďme jednoduchý příklad. Mějme dvojici pístů propojených vodotěsnou trubičkou ve stejné výšce a naplněných vodou. Průřez prvního pístu je $S_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}^2$, druhý píst má průřez $S_2 = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$ a je na něm položeno závaží o hmotnosti $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$. Jakou silou F_1 musíme působit na první píst, aby soustava zůstala v klidu?

Řešení: Pokud má soustava zůstat v klidu, musí být tlak ve všech místech kapaliny stejný. To vyplývá z Newtonova prvního zákona – kdyby tlak nebyl stejný, působila by někde síla, která by kapalinou pohybovala. Platí tedy: $p_1 = p_2$, neboli tlak na každý z pístů je stejný. Dosazením podle Pascalova zákona dostáváme rovnost $F_1/S_1 = F_2/S_2$. Teď už stačí jen dosadit za F_2 součin hmotnosti m_2 a gravitačního zrychlení, vyjádřit si sílu F_1 a dopočítat ji.

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{m_2 g}{S_2}$$

$$F_1 = \frac{S_1 m_2 g}{S_2} = \frac{0{,}6\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^2}}{0{,}1\,\mathrm{m}^2} \doteq 588{,}6\,\mathrm{N}$$

Zjistili jsme, že na druhý píst je potřeba tlačit silou $F_1 = 588{,}6\,\mathrm{N}$. To je šestinásobek síly, kterou působí závaží na druhý píst. Je vidět, že píst nám umožňuje zvětšovat/zmenšovat potřebnou sílu na vykonání práce. Přesně toho se využívá v hydraulice.

Teorie pravděpodobnosti

Jak už bylo zmíněno, Blaise Pascal se mimo jiné věnoval také matematice. Společně se svým současníkem Pierrem Fermatem položil Pascal základy teorie pravděpodobnosti. Je zajímavé, že tato oblast matematiky vznikla na základě úvah o pravděpodobnosti výhry v hazardních hrách. Oba matematici byli totiž vášnivými hráči a zajímalo je, proč některé strategie dlouhodobě prohrávají, zatímco jiné vyhrávají. Lidé samozřejmě o pravděpodobnosti přemýšleli v souvislosti s hazardem i dříve. Patřičného vysvětlení se ale mnohým zdánlivě paradoxním jevům dostalo až s popisem pomocí matematiky.

Pascal s Fermatem se zabývali například problémem, jak mezi hráče spravedlivě rozdělit vsazené peníze, pokud musí být hra nečekaně přerušena. Nabízí se rozdělit si je ve stejném poměru, v jakém byly pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů v okamžiku přerušení hry. Aby byl tento postup uskutečnitelný, je potřeba umět tyto pravděpodobnosti přesně spočítat. A právě o to se Pascal s Fermatem pokusili. Nově tak definovali střední hodnotu, které se občas říká také očekávaný výnos. Střední hodnota je průměr hodnot náhodné veličiny. Náhodná veličina je například číslo, které padne při hodu kostkou. V takovém případě by byla střední hodnota 3,5, neboť všechny hodnoty od 1 do 6 mají stejnou šanci na padnutí. Střední hodnota je v tomto případě aritmetický průměr.

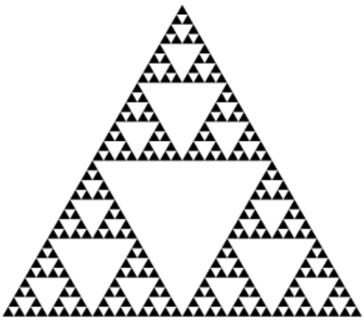
Pascalův trojúhelník

Na závěr povídání o Pascalovi se podíváme na s pravděpodobností související trojúhelník, který nese jeho jméno. Opět to není proto, že by jej Pascal objevil. Matematici napříč celým světem jej studovali staletí před ním. Pascal byl ale první, kdo jej dokázal využít právě v teorii pravděpodobnosti a nalézt a popsat mnoho jeho více či méně užitečných vlastností. Co to ale vlastně ten Pascalův trojúhelník je? Abychom jej mohli využívat, nepotřebujeme znát přesnou definici pomocí tzv. kombinačních čísel. Vystačíme si s tím, že se jedná o schéma, které dostaneme tak, že si do prvního řádku napíšeme trojici čísel 0, 1 a 0. Další řádky pak postupně tvoříme tak, že každou dvojici čísel nacházejících se vedle sebe sečteme. Místo ní následně napíšeme mezi tato dvě čísla do dalšího řádku jejich součet. Nuly v prvním řádku ignorujeme, netvoří Pascalův trojúhelník, pouze nám jej pomáhají zjednodušeně definovat. Jedničky musíme psát na oba konce každého řádku dodatečně.

Příklad Pascalova trojúhelníku o šesti řádcích:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

K zajímavým vlastnostem Pascalova trojúhelníku patří například to, že součet čísel v n-tém řádku dá $(n-1)$-ní mocninu dvojky. Také je možné si všimnout, že pokud obarvíme všechna lichá čísla, vznikne nám Sierpińského trojúhelník, což je fraktál, obrazec, ve kterém se určité motivy do nekonečna opakují.



Obr. 2: Sierpińského trojúhelník

My si nyní uvedeme dvě možná jednoduchá praktická využití tohoto schématu. Nejdříve si představme, že potřebujeme umocnit součet libovolných dvou čísel (nazveme si je a a b) na n. Pokud $n = 2$, nejspíše si vzpomeneme na známý vzorec $(a+b)^n = a^2 + 2ab + b^2$. Pokud je $n = 3$, nebo 4, zvládneme mezi sebou jednotlivé opakující se členy ještě vynásobit a následně sčítance se stejnými mocninami sečíst. Co ale dělat, pokud $n = 6$ a my nechceme strávit nad výpočty zbytečně moc času? Odpověď nám dává právě Pascalův trojúhelník. Pokud jsme si zkusili umocnit součet čísel a a b postupně na $n = 2, 3$ a 4, mohli jsme si všimnout, že číselné koeficienty u jednotlivých členů se nápadně shodují s čísly v Pascalově trojúhelníku. Pokud chceme umocnit $(a+b)^n$, podíváme se do $(n+1)$-ho řádku Pascalova trojúhelníku. Čísla v tomto řádku jsou pak po řadě koeficienty u jednotlivých sčítanců ve výsledném výrazu.

Uveďme si příklad. Chceme umocnit na šestou výraz $2x+3$. Abychom mohli využít Pascalova trojúhelníku, nechť $2x = a$ a $3 = b$. Očekáváme výsledek ve tvaru

$$ka^6 + la^5b + ma^4b^2 + na^3b^3 + oa^2b^4 + pab^5 + qb^6\,,$$

kde k, l, m, n, o, p a q jsou koeficienty, které získáme z Pascalova trojúhelníka. Můžeme proto rovnou psát $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Dosadíme zpět za a a b a nakonec vynásobíme koeficienty získané umocněním a z Pascalova trojúhelníka.

$$(2x)^6 + 6(2x)^5 3 + 15(2x)^4 3^2 + 20(2x)^3 3^3 + 15(2x)^2 3^4 + 6(2x)3^5 + 3^6$$

$$64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729$$

Druhým o něco jednodušším příkladem využití Pascalova trojúhelníka je případ, kdy potřebujeme určit, kolika způsoby je možné vybrat k prvků z celkového počtu n prvků (pokud nám nezáleží na pořadí, ve kterém je vytáhneme, tj. zajímá nás pouze počet vytažených prvků). Stačí se jen podívat do $(k+1)$-vého řádku na $(n+1)$-ní číslo a toto číslo nám ihned udá výsledný počet výběrů. Tato vlastnost přímo vyplývá z definice Pascalova trojúhelníka pomocí kombinačních čísel, které ale přesahují rámec tohoto Výfučtení. Sami si například můžete ověřit, že pro $n = 4$ a $k = 2$ dostanete číslo 6. Stejný počet dostanete, když budete přemýšlet nad všemi možnými dvojicemi např. vybraných písmen ze seznamu 4 písmen *abcd*:

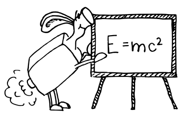
$$abcd \quad \rightarrow \quad ab,\, ac,\, ad,\, bc,\, bd,\, cd \;\; (6 \text{ možností})\,.$$

Závěr

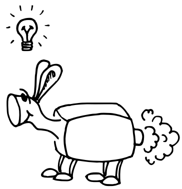
Blaise Pascal žil ve stínu známějších současníků, jako byl například Isaac Newton, Galileo Galilei nebo Johannes Kepler. Přesto jsou jeho objevy a přínosy v mnohém průlomové a zpětně je nedocenit by byla velká chyba. Na jeho práci navázali tisíce dalších. Zasloužil se o vznik celého jednoho oboru matematiky, významně přispěl k pochopení základů hydrauliky a na výpočetní technice dnes stojí celá naše civilizace.

I přes svůj krátký život Blaise Pascal významně zasáhl do mnoha oborů a svým přístupem k experimentům položil základ, který vedl k přesnějším a objektivnějším výsledkům.

Viktor Materna ***Patrik Kašpárek***



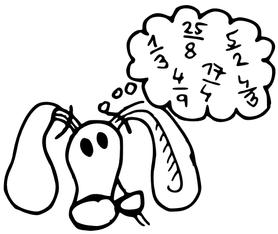
Řešení I. série



Úloha I.1 ... Narozeninové zlomky 5 bodů; průměr 4,36; řešilo 14 studentů

Výfuček se večer před svými 8. narozeninami tak nemohl dočkat všech dárků, že se mu nedařilo usnout. Místo oveček si představil 1 024 zlomků ve tvaru $1/1\,024$, $2/1\,024$, ..., $1\,024/1\,024$ *a počítal, kolik těchto zlomků bude mít v základním tvaru (po zkrácení) ve jmenovateli právě číslo 8. Pomoz Výfučkovi, aby se na svůj narozeninový den dobře vyspal a spočítej, kolik takových zlomků existuje!*

Abychom ve jmenovateli zlomku získali z čísla 1 024 číslo 8, museli bychom hodnotu jmenovatele vydělit číslem $1\,024/8 = 128$. Nemůžeme si ale dovolit dělit jmenovatele samostatně, protože si jako celek musí zlomek zachovávat svou hodnotu. To znamená, že zároveň se jmenovatelem musíme číslem 128 vydělit i hodnotu čitatele.



Násobení hodnot čitatele i jmenovatele stejným číslem se nazývá *rozšiřování*. Když chceme vydělit hodnotu čitatele i jmenovatele stejným číslem, vlastně jen násobíme jeho převrácenou hodnotou. Pak jde o *krácení*.

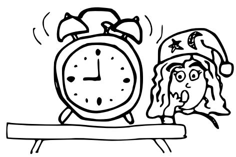
Víme, že hodnota zlomku musí být mezi 1/1 024 a 1, zároveň musí mít osmičku ve jmenovateli a přirozené číslo v čitateli. Nabízí se nám, že řešením jsou všechny zlomky 1/8, 2/8, . . . , 8/8.

Nicméně musíme ověřit, zda jsou tyto zlomky v základním tvaru, jak to po nás požaduje zadání. Ihned vidíme, že zlomky 2/8, 4/8, 6/8 a 8/8 nadále můžeme krátit dvěma (tedy rozšířit číslem 1/2), takže nejsou v základním tvaru. Zbytek zlomků, tedy 1/8, 3/8, 5/8 a 7/8, už v základním tvaru jsou. Nyní je můžeme zpátky rozšířit číslem 128, abychom se ujistili, že jmenovatel bude opravdu 1 024. Popořadě nám vychází: 128/1 024, 384/1 024, 640/1 024 a 896/1 024. Tímto jsme vyřešili Výfučkovu úlohu – existují pouze 4 takové zlomky, které vyhovují zadání.

Robert Gemrot

Úloha I.2 . . . Digitální hodiny

6 bodů; průměr 4,65; řešilo 26 studentů



Klárka trávila polovinu naší zimy ve slunné letní Brazílii. Bohužel, v průběhu té doby došlo kvůli nedostatku dodávky elektřiny do Kosova k poklesu průměrné frekvence střídavého proudu (po celou tu dobu) v celé Evropě z 50 Hz na 49,996 Hz. Zpoždění sítě se pak pro Klárku projevilo náhle po příletu do Česka – večer si doma, jak byla Klárka vždy zvyklá, nastavila budík na termostatu, který určuje čas pomocí této frekvence. Budík ji měl vzbudit správně v 8 ráno, ale zazvonil o 6 minut později. Určete, před jak dlouhou dobou potíže s frekvencí střídavého proudu začaly.

Při pohledu na tuto úlohu by se nám mohla zdát fyzikálně zdánlivě neřešitelná, máme pouze dvě veličiny a ještě k tomu ani na první pohled moc netušíme, jaký je mezi nimi vztah.

První veličinou je celkový čas, o který se hodiny zpozdily, a druhou je frekvence. Frekvence je veličina vyjadřující, kolikrát se za jednotku času (sekundu) opakuje nějaký děj. Namísto fráze „za sekundu“ používáme jednotky hertz – Hz. V případě střídavého proudu tím myslíme, kolikrát za sekundu změní elektrický proud z běžné zásuvky svůj směr „tam a zase nazpátek“. Tato frekvence je v zásuvce přesně udržována a některé připojené přístroje měří čas právě pomocí počítání těchto změn směru proudu, kterým jsou napájeny.[8]

[8] Tato metoda se k pohonu hodin používá už zhruba sto let.

Při dané frekvenci je jednoduché si uvědomit, že jejím znásobením s tzv. periodou, tj. časovým trváním jednoho zmíněného děje, dostaneme jedničku.[9] Jinak řečeno, pro frekvenci f a periodu T platí vztah $f = 1/T$.

Mluvme tedy radši o periodě, která je lehce představitelná, a ne o frekvenci. V příkladu vystupují dvě periody. První perioda, kterou si označíme T_1, značí čas, za který proud v zásuvce v běžném případě změní směr. Tato

perioda také značí nejmenší časovou jednotku, kterou jsme ze sítě schopni změřit, tudíž se jakýkoliv čas měří v násobcích T_1. Druhou máme periodu, označíme si ji T_2, jež značí nejmenší časovou jednotku pro zpožděný budík.

Perioda T_2 je trochu zvláštní, neboť budík je nastaven tak, aby ji vnímal jako periodu T_1. Víme, že za čas t budík posunul ručičku dopředu t/T_2-krát, nicméně za každé posunutí ji posunul dopředu o T_1. Proto za čas t ukázal čas $t_2 = T_1 \cdot t/T_2$.

Pomocí této rovnice však již můžeme spočítat, jak dlouho budík běžel se špatnou frekvencí. Pokud si označíme správnou frekvenci sítě jako f_1 a špatnou jako f_2, můžeme si pomocí nich vyjádřit T_1 a T_2. Dále rovnici použijeme pro případ, kdy budík běžel hledaný čas t a následně ukázal o šest minut nižší čas (budík zazvonil později, než měl). Z toho plyne, že $t_2 = t - 360\,\mathrm{s}$. Dostaneme tedy tuto rovnici:

$$
\begin{aligned}
t_2 &= \frac{t}{T_2} T_1\,, \\
t - 360\,\mathrm{s} &= \frac{t}{f_1} f_2\,, \\
t - t\frac{f_2}{f_1} &= 360\,\mathrm{s}\,, \\
t\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right) &= 360\,\mathrm{s}\,, \\
t\frac{f_1 - f_2}{f_1} &= 360\,\mathrm{s}\,, \\
t &= \frac{f_1}{f_2 - f_1} \cdot 360\,\mathrm{s}\,.
\end{aligned}
$$

Po dopočítání nám vyjde časová prodleva v sekundách, a po správném převodu tak zjistíme, že potíže s proudem začaly přibližně před 52 dny a 2 hodinami.

Karolína Letochová

Úloha I.3 ... Jedou vláčky

6 bodů; průměr 5,51; řešilo 37 studentů

Kačka čekala na nádraží a chtěla zjistit, jakou rychlostí kolem ní projíždějí vlaky. Pomocí počítání vagónů zjistila, že nákladní vlak kolem ní projel rychlostí 30 vagónů za minutu, zatímco rychlík projel rychlostí 0,8 vagónu za sekundu. Doma potom zjistila, že délka osobního vozu je 26 m, zatímco délka nákladního vozu je 14 m. Jakou rychlostí v kilometrech za hodinu projížděly vlaky stanicí?

Začneme tím, že vypočítáme rychlost nákladního vlaku, kterou si označíme v_1. Nejprve si převedeme rychlost vlaku z vagónů za minutu na vagóny za sekundu. O této rychlosti ze zadání

[9] Protože frekvence je převrácená hodnota periody.

víme, že činila $v_1 = 30$ vagónů za minutu, což odpovídá rychlosti $v_1 = 0{,}5$ vagónů za sekundu (za sekundu projede šedesátkrát méně vagónů než za minutu). Nyní převedeme rychlost z vagónů za sekundu na metry za sekundu, tedy na základní fyzikální jednotku. Toho dosáhneme tak, že počet vagónů za sekundu vynásobíme délkou jednoho z nich. Dostaneme tak $v_1 = 7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Abychom tuto rychlost převedli na kilometry za hodinu, stačí ji správně vynásobit. Za sekundu je hodnota uražené vzdálenosti tisíckrát menší, vyjádříme-li ji v kilometrech, tedy: $v_1 = 0{,}007\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Za hodinu ale vagóny urazí tuto vzdálenost tolikrát, kolik je v hodině vteřin: 60 minut po 60 sekundách je dohromady 3 600 sekund, a tak $v_1 = 0{,}007 \cdot 3\,600\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Rychlost nákladního vlaku je tedy $v_1 = 25{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Rychlost osobního vlaku, označme ji v_2, vypočítáme analogicky, jen už to máme díky zadání o to jednodušší, že nemusíme převádět vagóny za minutu na vagóny za sekundu. Víme, že rychlost osobního vlaku je $v_2 = 0{,}8$ vagónů za sekundu. Po vynásobení délkou jednoho vagónu dostaneme $v_2 = 20{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je po převedení na kilometry za hodinu $v_2 = 74{,}88\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Marek Božoň
marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Vaříme z vody

6 bodů; průměr 5,07; řešilo 29 studentů

Kačka si napustila do hrnce $5\,\mathrm{l}$ *vody o teplotě* $10\,^\circ\mathrm{C}$ *a chtěla ji uvařit na sporáku. K dispozici měla hořáky o výkonech* $1\,\mathrm{kW}$, $1{,}8\,\mathrm{kW}$ *a* $2{,}7\,\mathrm{kW}$. *Porovnejte pro jednotlivé hořáky, jak dlouho bude trvat, než se na nich voda úplně vypaří, když na ni Kačka zapomene.*

Aby se všechna voda vypařila, musí ji hořák nejprve dodáním tepla Q ohřát na teplotu varu a následně dodat skupenské teplo varu L. Celkem je potřeba vykonat práci $W = L + Q$. Ze známého vzorce pro výpočet mechanického výkonu $P = Wt$ (protože budeme počítat pro více výkonů, označíme si je souhrnně P_X) si můžeme vyjádřit hledaný čas t a místo práce dosadíme součet tepelných energií:

$$P = Wt\,,$$

$$t = \frac{W}{P} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L+Q}{P_\mathrm{X}}\,.$$

Poznámka: Tím, že jsme namísto W dosadili zmíněná tepla, roli práce již v tomto případě dál neuvažujeme. Práce se totiž ve fyzice přesně definuje skrze působení makroskopických mechanických sil a na hořácích nedochází při ohřevu naší vody k jejich vzniku. Symbol W zde má spíše roli zástupného symbolu za „celkovou předanou energii“. Jinými slovy: práce a energie je z pohledu jednotek stejná a teplo není nic jiného než druh energie

Dále je potřeba rozepsat jednotlivé tepelné energie s pomocí konstant a fyzikálních veličin, jejichž konkrétní hodnoty máme uvedeny v zadání. Pro teplo Q platí vztah $Q = mc\Delta t$, kde m je hmotnost ohřívané vody, Δt rozdíl výsledné a původní teploty vody a c měrná tepelná kapacita vody, která má zhruba hodnotu $4\,180\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Skupenské teplo varu L je součin hmotnosti a měrného skupenského tepla varu vody l_v s číselnou hodnotou $2{,}257 \cdot 10^6\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$.

$$t = \frac{L+Q}{P_\mathrm{X}} = \frac{ml_\mathrm{v} + mc\Delta t}{P_\mathrm{X}}$$

Poslední neznámou ve vzorci je hmotnost vody, která je součinem jejího objemu V a hustoty ϱ:

$$t = \frac{V\varrho(l_\mathrm{v} + c\Delta t)}{P_\mathrm{X}}$$

Tím jsme se dostali k obecnému vzorci, do kterého už stačí jen třikrát dosadit konkrétní hodnoty v základních jednotkách pro tři různé výkony hořáku.

$$t = \frac{V\varrho(l_\mathrm{v} + c\Delta t)}{P_\mathrm{X}}$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme postupně časy 13 166 s, 7 314 s a 4 876 s.

Zjistili jsme, že zapomnětlivé Kačce se voda při nejnižším výkonu vypaří přibližně za 3 h 39 min, při středním za 2 h 2 min a při výkonu nejvyšším za 1 h 21 min.

Viktor Materna

Úloha I.5 ... Bratříčku, zavírej vrátka

6 bodů; průměr 4,33; řešilo 12 studentů

Dan musí po svém nepořádném bratrovi neustále zavírat vrata do domu, která nechává otevřená na celých 180°. Vrata mají hmotnost m a šířku r. Otáčejí se kolem svislé osy procházející panty s malým poloměrem r_p, na kterých se třou s koeficientem f (vrata se nedotýkají země).

1. *Protože Dana už zavírání unavuje, chce je zavřít s vynaložením co nejmenší práce. Jaká je tato práce, působí-li na vrata celou dobu na místě v nejdelší možné vzdálenosti od pantů?*
2. *Jindy to zase Dan chce mít rychle za sebou. Kinetická energie otáčejících se vrat je $m\omega^2r^2/6$, kde ω je úhlová rychlost. Na jakou úhlovou rychlost ω musí na začátku dveře urychlit, aby se samy zavřely, ale přitom nepráskly, tj. zastavily se přesně po 180°?*
3. *Vzácně je ale Dan i naštvaný. Jednou s vraty švihl tak silně, že při nárazu ztratily jen 50 % energie, kterou v tom okamžiku měly, se zbytkem se odrazily a bez dalšího kontaktu o stěnu se opět samy otevřely na původních 180°. Jaká musela být počáteční úhlová rychlost v tomto případě?*

1. Jak víme z definice, práce je součin síly a dráhy, po kterou tato síla působí:

   $$W = Fs\,.$$

   Veškerá Danem vykonaná práce se v tomto případě spotřebuje v pantech, nás tedy bude zajímat dráha dveří okolo nich a síla, kterou dveře na tuto osu otáčení působí. Ty na pantech visí celou svou vahou, takže kolmá síla, která na ně působí, je rovna tíze dveří, $F = mg$. Jelikož obě části mají koeficient tření f, síla, kterou musí Dan v pantech překonat, je $F = mgf$. Dveře se v rámu při této konstantní síle musí otočit o 180°, což můžeme vyjádřit pomocí obloukové míry jako π rad a uražená dráha je $s = \varphi r = \pi r_\mathrm{p}$, polovina délky kruhu, jelikož dveře vskutku opsaly půlkruh. Z toho můžeme vypočítat celkovou vykonanou práci

   $$W = \pi mgfr_\mathrm{p}\,.$$

   Alternativní řešení: práci vykonanou při otáčivém pohybu můžeme vyjádřit jako součin působícího momentu síly M[10] a úhlu α, o který se těleso otočilo. Na dveře při pohybu

[10] Při konstantním momentu síly.

působí v pantech síla $F = mgf$, která má moment $M = mgfr_\mathrm{p}$. Tu musí Dan překonávat silou s totožným momentem. Úhel otočení je $180° = \pi$ rad, z čehož dosazením získáme stejné vyjádření práce jako v předchozím případě

$$W = M\alpha = M\varphi = \pi mgfr_\mathrm{p}\,.$$

2. Aby dveře nepráskly a zastavily se přesně po $180°$, musí mít v tomto okamžiku nulovou rychlost i kinetickou energii, proto je počáteční dodaná energie rovna práci potřebné k jejich zavření. Z předchozí části víme, že tato práce má velikost $W = \pi mgfr_\mathrm{p}$, což je rovno velikosti počáteční kinetické energie, kterou vypočítáme ze vzorce $m\omega_0^2 r^2/6$, ze kterého můžeme vyjádřit počáteční úhlovou rychlost ω_0.

$$\pi mgfr_\mathrm{p} = \frac{m\omega_0^2 r^2}{6}$$
$$\omega_0 = \frac{\sqrt{6\pi gfr_\mathrm{p}}}{r}$$

   Aby dveře při zavírání spotřebovaly všechnu svou energii a nepráskly, Dan jim musel udělit počáteční úhlovou rychlost $\omega_0 = \sqrt{6\pi gfr_\mathrm{p}}/r$.

3. Tentokrát se vrata nejprve zavírala a spotřebovávala energii, poté ji část ztratila nárazem, následně se opět otáčela a spotřebovávala energii, až se zastavila s nulovou energií v počátečním stavu. Pokud označíme práci, kterou dveře spotřebují k jednomu otočení o $180°$ jako W, pak po odrazu od zdi musely mít právě tuto energii. Pokud odrazem ztratily 50 % své aktuální energie, musely mít před ním energii dvojnásobnou, tedy $2W$. Při úvodním zavírání spotřebovala vrata rovněž energii W, tedy ve chvíli, kdy je Dan roztlačil, musela mít energii o velikosti $3W$. Vyjádřením velikosti této energie a porovnáním s počáteční kinetickou energií můžeme podobně jako v předchozím případě dojít k počáteční úhlové rychlosti ω_1.

$$3\pi mgfr_\mathrm{p} = \frac{m\omega_1^2 r^2}{6} \quad\Rightarrow\quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{2\pi gfr_\mathrm{p}}}{r}$$

   Když byl Dan naštvaný a švihl vraty příliš silně, byla jejich počáteční úhlová rychlost $\omega_1 = 3\sqrt{2\pi gfr_\mathrm{p}}/r$.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Po stopách Sherlocka

7 bodů; průměr 4,60; řešilo 20 studentů

Je známo, že Sherlock Holmes věřil v nedoceněnou informační hodnotu chůze člověka. Ze stop zanechaných ve sněhu či bahně dokázal vydedukovat způsob chůze, postavu či výšku člověka. V úloze prozkoumáme možnosti těchto metod připodobněním nohou k jednoduchému fyzikálnímu modelu kyvadla.

1. *Naměřte závislost frekvence kroků na délce nohy člověka, který kráčí sobě nejpřirozenějším způsobem.*[11] *Délku měřte vždy např. od kyčle až na zem, měření proveďte pro alespoň 4 různé délky nohy*[12] *a vyneste do grafu.*

[11] Může jít i o již hotové záznamy lidské chůze.
[12] Tedy čtyři různé lidi. ;)

2. *Najděte si, jaký vztah platí mezi frekvencí kyvů*[13] *a délkou tzv. matematického kyvadla. Ukažte, zda a jak tato závislost odpovídá naměřeným hodnotám.*

Od ostatních experimentálních úloh se tato liší tím, že nás nutí vyjít ven a požádat další lidi o spolupráci na měření. Aby byla naměřená závislost pozorovatelná, je žádoucí získat údaje nejen od většího množství lidí, ale také většího rozpětí jejich výšek.

V úloze budeme používat experimentální symboliku a postupy, které ve zjednodušené verzi najdete blíže popsané v našem shrnutí experimentální metodiky na našem webu.[14]

Experiment

V našem případě máme měření od 5 našich organizátorů za shodných podmínek.[15] Délky nohy l_i, kde indexem i rozlišujeme jednotlivé organizátory, jsme měřili právě vždy od kyčle až na zem naboso (přesněji od výšky, kde je stehenní kost pod kůží nejblíže, což je přibližně výška kyčelního kloubu) s odhadovanou systematickou nejistotou $u_{l_\mathrm{i}} = 1\,\mathrm{cm}$. Abychom zvýšili přesnost měření periody jednoho kroku, naměřili jsme třikrát celkový čas t_i ze 7 po sobě jdoucích kroků,[16] jehož průměr jsme pak podělili 7, abychom dostali čas jednoho kroku T_i s menší nejistotou. Tu zde tvořil převážně reakční čas, který odhadněme na $u_{t_\mathrm{i}} = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Výsledky měření přepíšeme do tabulky 1 a k nim přidáme také dopočtené frekvence a jejich nejistoty podle vztahů:

$$f_\mathrm{i} = \frac{1}{T_\mathrm{i}}\,,$$
$$u_{f_\mathrm{i}} = \frac{u_{T_\mathrm{i}}}{\langle T_\mathrm{i}\rangle} \cdot \langle f_i\rangle\,,$$

přičemž druhý si můžete odvodit na základě pravidel v naučném textu textu.[17] Hodnoty $\langle T_\mathrm{i}\rangle$ a $\langle f_i\rangle$ značí konkrétní naměřenou hodnotu bez uvažování nejistoty (protože je zvykem označovat samostatnou značkou bez závorek celý výsledek měření ± nejistota). Později v textu i grafu využijeme hodnoty polovičních frekvencí a polovičních délek, které jsou rovněž v tabulce.

O kyvadle

Matematické kyvadlo je jednoduchá soustava tvořená hmotným bodem, který je zavěšený na dlouhém nehmotném tuhém závěsu. Jinými slovy jde o zjednodušenou představu (fyzikální model) kyvadla, ve kterém je závaží mnohem těžší než závěs a které se navíc kývá jen málo (často se zmiňuje maximální vychýlení 5°, i když to přesně záleží na konkrétní úloze).[18] Kývá-li se v homogenním gravitačním poli, platí pro jeho periodu dostatečně přesný vztah:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

[13] Jeden kyv počítáme přirozeně jako dobu mezi dvěma průchody kyvadla jedním bodem za pohybu stejným směrem. Může tedy jít i o čas mezi dvěma průchody stejnou maximální výchylkou.

[14] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/jak_resit/tahak.pdf`

[15] Myšleno tak, že měření bylo u každého provedeno stejně, byly měřeny stejné rozměry a každý měl vykonat to samé – ujít určitý počet kroků sobě nejpřirozenější rychlostí.

[16] Počet 7 kroků se může zdát zvláštní, ale měření se prováděla vždy na jiném místě. Aby všechny údaje vycházely ze stejných podmínek, bylo třeba se omezit na takový počet kroků, který bylo možno rovně ujít v každé místnosti.

[17] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus#zpracovani_dat`

[18] `http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/205-matematicke-kyvadlo`

Tab. 1: Výsledky měření, seřazené vzestupně v l_i a její polovině. V posledním sloupci jsou dopočtené frekvence a jejich poloviční hodnoty. Všechna t_i mají nejistotu 0,20 s a u T_i je to 0,03 s; pro l_i platí výše zmíněná nejistota 1 cm.

Měření	$\langle l_\mathrm{i}\rangle$; $\langle l_\mathrm{i}/2\rangle$ [cm]	$\langle t_\mathrm{i}\rangle$ [s]	$\langle T_\mathrm{i}\rangle = \langle t_\mathrm{i}\rangle/7$ [s]	f_i [Hz]	$f_\mathrm{i}/2$ [Hz]
1	84; 42	3,65	0,52	$1{,}92 \pm 0{,}11$	$0{,}96 \pm 0{,}06$
2	86; 43	4,15	0,59	$1{,}69 \pm 0{,}11$	$0{,}85 \pm 0{,}06$
3	89; 45	4,43	0,63	$1{,}59 \pm 0{,}08$	$0{,}80 \pm 0{,}04$
4	91; 46	3,85	0,55	$1{,}82 \pm 0{,}10$	$0{,}91 \pm 0{,}05$
5	96; 48	4,73	0,68	$1{,}47 \pm 0{,}06$	$0{,}74 \pm 0{,}03$

kde l je délka závěsu a g je gravitační zrychlení. Když si vzpomeneme, že mezi periodou a frekvencí platí $T = 1/f$, můžeme vztah upravit na závislost mezi frekvencí a délkou:

$$f = \frac{C}{\sqrt{l}}\,,$$

kde konstanta $C = \sqrt{g}/(2\pi)$ má při typickém tíhovém zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a délkách naměřených v cm hodnotu: $C \doteq 4{,}98\,\mathrm{cm^{1/2}{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud chceme připodobnit nohy k matematickému kyvadlu, musíme uvažovat, že perioda jednoho kroku odpovídá *polovině periody* modelového kyvadla, protože čas měříme od zvednutí jedné nohy po její opětovné položení, ale už ne čas, během kterého se dostane za nohu druhou. U kyvadla naopak jako periodu měříme součet času dopředného a zpětného pohybu. To znamená, že frekvence chůze musí být proti kyvadlu poloviční. Proto jsme také do tabulky 1 přidali sloupec polovičních frekvencí. Obdobně musíme uvažovat *polovinu délky* nohy, protože ta má své těžiště mnohem blíže ke své polovině. U matematického kyvadla je vzdálenost mezi upevněním a těžištěm, které je v onom hmotném bodu, shodná s jeho celou, fyzikálně důležitou délkou.

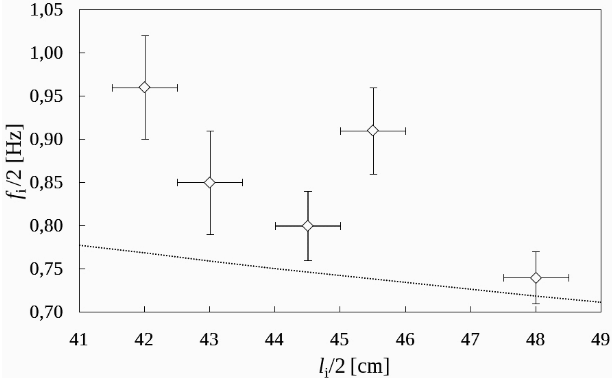
Fyzikální porovnání modelu kyvadla a lidské chůze bude spočívat v grafickém/numerickém porovnání závislosti dané vztahem výše s naměřenými hodnotami. Vynesme si tedy do grafu (obr. 3) naměřené body $f_\mathrm{i}/2$ v závislosti na $l_\mathrm{i}/2$ a úsečkami kolem datových bodů znázorněme rozpětí dané jejich nejistotami (horizontální úsečky pro rozpětí v l_i a vertikální pro rozpětí v $f_\mathrm{i}/2$). Tyto body ještě proložíme křivkou závislosti pro matematické kyvadlo, pro nějž budeme dosazovat jako délku l právě $l_\mathrm{i}/2$ a frekvenci f budeme vynášet na osu $f_\mathrm{i}/2$.

Diskuze

Prvním pozorováním je nutnost naměřit mnohem větší množství lidí, abychom mohli nějakou závislost pozorovat, a také že někteří se od hledaného trendu značně odchylují (o více než nejistotu měření), což znamená, že jednoduché kyvadlo není úplně vhodný model chůze.[19]

Dalším pozorováním je, že ani v jednom případě se chůze nepřibližuje volně zavěšenému matematickému kyvadlu, protože konstanta C by musela být ještě zhruba o osminu větší, aby

[19] V teorii robotů se používají například modely založené na dvojitém kyvadlu, tedy že druhé kyvadlo je zavěšeno na závaží prvního a může se kývat nezávisle. To se více blíží stavbě nohy, ve které koleno spojuje dvě volně pohyblivé části stehna a lýtka-holeně.



Obr. 3: Naměřené hodnoty spolu se zakreslenou závislostí pro matematické kyvadlo $C \doteq 4{,}98\,\mathrm{cm}^{1/2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

křivka procházela alespoň chybovými úsečkami více naměřených bodů. Je však uspokojivé, že měření není od kyvadla vzdáleno řádově jinde a ve více případech dodržuje viditelné klesání.

Daniel Slezák
dans@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.C ... Jablko nepadlo daleko od stromu

7 bodů; průměr 4,83; řešilo 23 studentů

Ačkoliv se historka o jablku spadnuvším na Newtonovu hlavu pravděpodobně odehrála jinak, nebo se vůbec neodehrála, poskytuje nám tak i tak dobré fyzikální cvičení. Představme si tedy, že Newton sedí pod stromem a spadlo na něj jablko. Odhadněte:

1. *Jak velkou gravitační silou působí jablko na Newtona a Newton na jablko v okamžiku, kdy se jablko Newtona dotýká? Odhadněte všechny potřebné veličiny.*
2. *Jak velkou gravitační silou působí Země na jablko a jablko na Zemi? Jakým zrychlením se pohybuje Země k jablku a jakým jablko k Zemi?*
3. *Pokud je jedno jablko v koruně stromu a jedno leží na zemi pod ním, kde leží jejich společné těžiště? Jak velké a kam směřující je zrychlení tohoto těžiště, začne-li horní jablko padat s tíhovým zrychlením g k dolnímu?*

1. K výpočtu gravitační síly využijeme následující vzorec z Výfučtení:

$$F_\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}\frac{mM}{r^2}\,.$$

Pro připomenutí, v tomto vzorci $\mathrm{G} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ značí gravitační konstantu, r vzdálenost těžišť dvou těles, mezi nimiž působí síla a m, resp. M značí hmotnost jednoho, resp. druhého tělesa.

Protože v textu úlohy není specifikováno, jak těžký Newton a jablko byli, popř. jak vysoký byl Newton, odhadneme všechny potřebné veličiny řádově, takže dostaneme řádový výsledek, který nám dodá alespoň představu o velikosti síly. Řádový odhad bychom měli používat vždy, když odhadované veličiny mohou nabývat velkého rozsahu hodnot, takže si nemůžeme být jisti jejich přesnou velikostí. Provedeme jej tak, že pravděpodobné hodnoty zaokrouhlíme na nejbližší řád, tj. mocninu desíti.

Odhadneme tedy hmotnost Newtona na 80 kg, což je řádově $M \approx 10^2$ kg, váhu jablka na $m \approx 10^{-1}$ kg a vzdálenost mezi těžišti jablka a Newtona $r \approx 1$ m. Poté nám stačí pouze dosadit:

$$F_\mathrm{G} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}} \cdot 10^2\,\mathrm{kg} \cdot 10^{-1}\,\mathrm{kg}\frac{1}{(1\,\mathrm{m})^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N} \approx 10^{-9}\,\mathrm{N}\,.$$

Můžeme si povšimnout, že síla mezi jablkem a Newtonem je velice malá. Pro porovnání, předmět o váze jednoho kilogramu musíme na Zemi zvedat vzhůru silou zhruba 10 N. Gravitační síla je vskutku nejslabší ze všech druhů sil, které v přírodě najdeme, přesto však cítíme její působení v případě velkých a těžkých těles – toto ještě uvidíme ve druhé podúloze.

2. Pro její řešení musíme vědět, že hmotnost Země je přibližně $M_\mathrm{z} \doteq 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg. Také potřebujeme znát vzdálenost jablka od těžiště Země. Proto budeme považovat Zemi za kouli, která má těžiště ve svém středu, a tedy vzdálenost jablka a středu Země se rovná $R \doteq 6{,}4 \cdot 10^6$ m. Dosadíme tyto veličiny opět do stejného vzorce, abychom vypočítali hledanou sílu F_G2:

$$F_\mathrm{G2} = \mathrm{G}\frac{mM_\mathrm{z}}{R^2} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}} \cdot 10^{-1}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{1}{(6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} \approx 1\,\mathrm{N}\,.$$

Zjistili jsme tedy, že jablko na Zemi působí silou řádově jeden Newton a tou samou silou působí Země na jablko (gravitační působení je vždy oboustranné).

Dále potřebujeme vypočítat zrychlení, jakým se k sobě obě tělesa pohybují. Abychom postupovali v newtonovském duchu, měli bychom si určit, z jaké vztažné soustavy budeme pohyb pozorovat. Vybereme-li si například vztažnou soustavu spjatou s jablkem, pak se nám bude zdát, že jablko stojí a pohybuje se k němu Země. Dohodněme se tedy, že budeme uvažovat vztažnou soustavu neutrálního pozorovatele, který pozoruje, jak jablko padá k Zemi. Takový pozorovatel by nesměl stát na Zemi, jelikož by pak těžko poznal její pohyb. Uvažujme jej proto například v kosmu v beztížném stavu vůči Zemi tak, že před pádem jablka jsou pro něj Země i jablko v klidu. V takové soustavě může pozorovatel naměřit v průběhu pádu odpovídající pohyb oběma tělesům a zrychlení je možno určit podle postupu níže. K samotnému výpočtu zrychlení použijeme druhý Newtonův zákon, zákon síly. Ten můžeme vyjádřit následující rovnicí:

$$a = \frac{F}{m}\,.$$

Za sílu F dosadíme F_{G} a za hmotnost m dosadíme hmotnost jablka, resp. Země. Dostaneme tedy výsledek pro jablko a Zemi:

$$a_{\mathrm{j}} = \mathrm{G}\frac{M_{\mathrm{z}}}{R^2} \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{s}^{-2}{\cdot}\mathrm{kg}^{-1} \cdot \frac{6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} \doteq 10\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}\,,$$

$$a_{\mathrm{Z}} = \mathrm{G}\frac{m}{R^2} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{s}^{-2}{\cdot}\mathrm{kg}^{-1} \cdot \frac{10^{-1}\,\mathrm{kg}}{(6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} \approx 10^{-25}\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}\,.$$

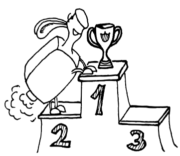
Vidíme, že síla působící na jablko od Země uděluje jablku zrychlení podobné známému tíhovému zrychlení $g \doteq 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$. Skutečná hodnota této veličiny však také závisí na odstředivé síle vznikající rotací Země a působící jiným směrem než gravitační síla (na rovníku dokonce přesně opačným). Země se zase kvůli své velké hmotnosti skoro nepohybuje.

3. Opět začneme newtonovsky[20] a určíme si, jaké souřadnice budeme používat. Víme, že těžiště soustavy dvou jablek leží na jejich spojnici, takže nechť máme jednu souřadnicovou osu x procházející oběma jablky s bodem 0 na Zemi u prvního jablka a vzdáleností j ve výšce druhého jablka.

   Dále víme, že polohu těžiště na spojnici určuje vážený průměr dílčích těžišť. Jelikož váha v průměru je hmotnost těles a obě tělesa váží stejně, leží těžiště soustavy jablek v aritmetickém průměru souřadnice x, čili ve výšce $j/2$ nad zemí.

   V každém momentu se těžiště nachází v půlce mezi dvěma jablky – pokud horní jablko urazí vzdálenost l, pak se těžiště posune do vzdálenosti $j/2 - l/2$. To znamená, že těžiště urazí dvakrát menší vzdálenost než jablko v každý časový okamžik, a má tedy vždy poloviční rychlost. Poloviční nárůst rychlosti však v každém okamžiku odpovídá polovičnímu zrychlení, než má horní jablko, tedy $g/2$.

Jindřich Dušek
jindra@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	6	7	7	**43**	**43**
1.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	4	–	–	–	–	6	–	**10**	**10**
2.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
3.	*Evelyna Anežka Semrádová*	G Jírovcova, České Budějovice	1	–	–	–	–	–	–	**1**	**1**

[20] Tento přístup, ač jsme ho nazvali newtonovský, se vyplatí používat u jednoduchých úloh téměř vždy.

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	6	7	7	**43**	**43**
1.–2.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	6	6	6	–	–	7	**30**	**30**
1.–2.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	5	3	6	5	5	–	6	**30**	**30**
3.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	5	3	6	–	–	6	5	**25**	**25**
4.	*Václav Verner*	PORG, Praha	5	6	6	–	–	–	–	**17**	**17**
5.	*Patrik Rosenberg*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	–	6	–	–	–	–	**11**	**11**
6.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	4	–	6	–	–	–	–	**10**	**10**
7.	*Šimon Lopour*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	1	1	–	–	–	–	**6**	**6**
8.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	6	7	7	**38**	**38**
1.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	3	6	6	5	6	7	**33**	**33**
2.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	6	6	3	5	6	**30**	**30**
3.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	6	6	6	–	7	–	**25**	**25**
4.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	3	–	–	–	**14**	**14**
5.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	6	3	–	–	–	**9**	**9**
6.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	6	1	–	–	–	**7**	**7**
7.–8.	*Bernard Czaban*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
7.–8.	*Tereza Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	6	7	7	**38**	**38**
1.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	–	6	6	6	6	7	7	**38**	**38**
2.–3.	*Šimon Bláha*	Slovanské G, Olomouc	–	6	6	6	5	6	7	**36**	**36**
2.–3.	*Tomáš Patsch*	Slovanské G, Olomouc	–	6	6	6	4	7	7	**36**	**36**
4.	*Tomáš Veselý*	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	6	6	6	3	7	7	**35**	**35**
5.–6.	*Jiří Antoňů*	G, Špitálská, Praha	–	6	2	6	5	7	7	**33**	**33**
5.–6.	*Anna Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	6	6	4	4	7	**33**	**33**
7.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	6	6	6	6	1	7	**32**	**32**
8.	*Matěj Ságl*	G, Jihlava	–	6	6	6	–	5	6	**29**	**29**
9.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	3	2	5	4	7	**26**	**26**
10.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	6	6	6	–	–	6	**24**	**24**
11.	*Amálie Jirotková*	G Jírovcova, České Budějovice	–	6	6	5	–	3	1	**21**	**21**
12.	*Veronika Nečadová*	ZŠ Jemnice	–	3	6	5	1	2	2	**19**	**19**
13.	*Marek Hlava*	G Nad Štolou, Praha	–	3	6	6	–	1	–	**16**	**16**
14.–15.	*Tadeáš Ďurčanský*	G, Nymburk	–	–	6	5	–	–	4	**15**	**15**
14.–15.	*Lukáš Ludvík*	G, Špitálská, Praha	–	6	3	6	–	–	–	**15**	**15**
16.–17.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	–	6	5	–	–	2	**13**	**13**
16.–17.	*Nikola Kášková*	G, Vlašim	–	1	6	3	–	2	1	**13**	**13**
18.–20.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	6	6	–	–	–	**12**	**12**
18.–20.	*Adam Jerhot*	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košíře	–	6	–	–	–	5	1	**12**	**12**
18.–20.	*Jan Krčmář*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	6	6	–	–	–	**12**	**12**
21.	*Jolana Štraitová*	G, Budějovická, Praha	–	–	6	5	–	–	–	**11**	**11**
22.	*Anna Gryčová*	ZŠ Husova, Liberec 5	–	–	6	3	–	–	–	**9**	**9**
23.	*Kateřina Šemíková*	ZŠ Hostýnská, Praha 10 - Malešic	–	–	3	–	–	–	1	**4**	**4**
24.	*František Račický*	ZŠ Jemnice	–	0	–	–	–	1	0	**1**	**1**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://vyfuk.mff.cuni.cz
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.