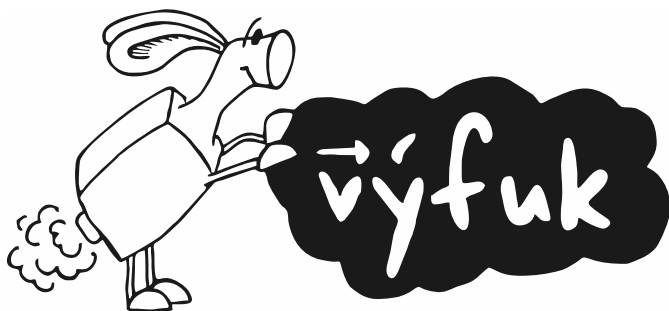




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

touto sérií vás vítáme do nového školního roku a 8. ročníku Výfuku – fyzikální soutěže pro všechny zvědavé studenty druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií! Jak je již zvykem, během roku proběhne 6 sérií úloh a na konci roku ohodnotíme nejlepší řešitele věcnými cenami. Pokud jím ještě nejste, vždy můžete začít s aktuální sérií!¹

Úloh je hned několik druhů – první jednodušší, pro mladší řešitele, jedna matematická a tři fyzikální. Následuje pak experimentální úloha (E) a příklad založený na naučném textu neboli Výfučení (C), které najdete na konci brožurky. Výfučení v této sérii se věnuje Isaacovi Newtonovi.

Pro ty, kterým dojde brožurka v papírové podobě, jsme k ní také přiložili zkrácenou verzi návodu, jak správně řešit experimentální úlohy. Doporučujeme se jej držet. Celý návod můžete najít na našich webových stránkách.² Zájemcům by měl také poskytnout obecný úvod do experimentální fyziky jako takové.

Hodně nápadů a elánu do nového ročníku vám přejí

Organizátoři

`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

¹I když ostatní již mohou mít bodový náskok.

²http://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus



Zadání I. série



Termín odeslání: 22. 10. 2018 20.00

Úloha I.1 ... Narozeninové zlomky ⑥ ⑦

5 bodů

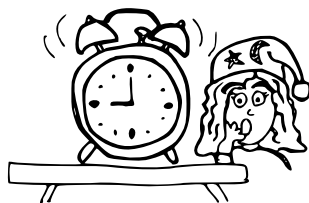
Výfuček se večer před svými 8. narozeninami tak nemohl dočkat všech dárků, že se mu nedařilo usnout. Místo oveček si představil 1024 zlomků ve tvaru $1/1024$, $2/1024$, ..., $1024/1024$ a počítal, kolik těchto zlomků bude mít v základním tvaru (po zkrácení) ve jmenovateli právě číslo 8. Pomoz Výfučkovi, aby se na svůj narozeninový den dobře vyspal a spočítej, kolik takových zlomků existuje!



Úloha I.2 ... Digitální hodiny ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Klárka trávila polovinu naší zimy ve slunné letní Brazílii. Bohužel, v průběhu té doby došlo kvůli nedostatku dodávky elektřiny do Kosova k poklesu průměrné frekvence střídavého proudu (po celou tu dobu) v celé Evropě z 50 Hz na 49,996 Hz. Zpoždění sítě se pak pro Klárku projevilo náhle po příletu do Česka – večer si doma, jak byla Klárka vždy zvyklá, nastavila budík na termostatu, který určuje čas pomocí této frekvence. Budík ji měl vzbudit správně v 8 ráno, ale zazvonil o 6 minut později. Určete, před jak dlouhou dobou potíže s frekvencí střídavého proudu začaly.



Úloha I.3 ... Jedou vláčky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Kačka čekala na nádraží a chtěla zjistit, jakou rychlostí kolem ní projíždějí vlaky. Pomocí počítání vagónů zjistila, že nákladní vlak kolem ní projel rychlostí 30 vagónů za minutu, zatímco rychlík projel rychlostí 0,8 vagónu za sekundu. Doma potom zjistila, že délka osobního vozu je 26 m, zatímco délka nákladního vozu je 14 m. Jakou rychlostí v kilometrech za hodinu projížděly vlaky stanicí?

Úloha I.4 ... Vaříme z vody ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Kačka si napustila do hrnce 5l vody o teplotě 10°C a chtěla ji uvařit na sporáku. K dispozici měla hořáky o výkonech 1kW, 1,8kW a 2,7kW. Porovnejte pro jednotlivé hořáky, jak dlouho bude trvat, než se na nich voda úplně vypaří, když na ni Kačka zapomene.

Úloha I.5 ... Bratříčku, zavírej vrátka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

6 bodů

Dan musí po svém nepořádném bratrovi neustále zavírat vrata do domu, která nechává otevřená na celých 180° . Vrata mají hmotnost m a šířku r . Otáčejí se kolem svislé osy procházející panty s malým poloměrem r_p , na kterých se třou s koeficientem f (vrata se nedotýkají země).

1. Protože Dana už zavírání unavuje, chce je zavřít s vynaložením co nejmenší práce. Jaká je tato práce, působí-li na vrata celou dobu na místě v nejdelší možné vzdálenosti od pantů?
2. Jindy to zase Dan chce mít rychle za sebou. Kinetická energie otáčejících se vrat je $m\omega^2 r^2/6$, kde ω je úhlová rychlost. Na jakou úhlovou rychlost ω musí na začátku dveře urychlit, aby se samy zavřely, ale přitom nepráskly, tj. zastavily se přesně po 180° ?
3. Vzácně je ale Dan i našťavaný. Jednou s vraty švihl tak silně, že při nárazu ztratily jen 50 % energie, kterou v tom okamžiku měly, se zbytkem se odrazily a bez dalšího kontaktu o stěnu se opět samy otevřely na původních 180° . Jaká musela být počáteční úhlová rychlost v tomto případě?

Úloha I.E ... Po stopách Sherlocka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Je známo, že Sherlock Holmes věřil v nedoceněnou informační hodnotu chůze člověka. Ze stop zanechaných ve sněhu či bahně dokázal vydedukovat způsob chůze, postavu či výšku člověka. V úloze prozkoumáme možnosti těchto metod připodobněním nohou k jednoduchému fyzikálnímu modelu kyvadla.

1. Naměřte závislost frekvence kroků na délce nohy člověka, který kráčí sobě nejpřirozenějším způsobem.³ Délku měřte vždy např. od kyčle až na zem, měření proveďte pro alespoň 4 různé délky nohy⁴ a vynesete do grafu.
2. Najděte si, jaký vztah platí mezi frekvencí kyvů⁵ a délkou tzv. *matematického kyvadla*. Ukažte, zda a jak tato závislost odpovídá naměřeným hodnotám.

Úloha I.C ... Jablko nepadlo daleko od stromu ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Ačkoliv se historka o jablku spadnuvším na Newtonovu hlavu pravděpodobně odehrála jinak, nebo se vůbec neodehrála, poskytuje nám tak i tak dobré fyzikální cvičení. Představme si tedy, že Newton sedí pod stromem a spadlo na něj jablko. Odhadněte:

1. Jak velkou gravitační silou působí jablko na Newtona a Newton na jablko v okamžiku, kdy se jablko Newtona dotýká? Odhadněte všechny potřebné veličiny.
2. Jak velkou gravitační silou působí Země na jablko a jablko na Zemi? Jakým zrychlením se pohybuje Země k jablku a jakým jablko k Zemi?
3. Pokud je jedno jablko v koruně stromu a jedno leží na zemi pod ním, kde leží jejich společné těžiště? Jak velké a kam směřující je zrychlení tohoto těžiště, začne-li horní jablko padat s tíhovým zrychlením g k dolnímu?

³Může jít i o již hotové záznamy lidské chůze.

⁴Tedy čtyři různé lidi. :)

⁵Jeden křiv počítáme přirozeně jako dobu mezi dvěma průchody kyvadla jedním bodem za pohybu stejným směrem. Může tedy jít i o čas mezi dvěma průchody stejnou maximální výchylkou.



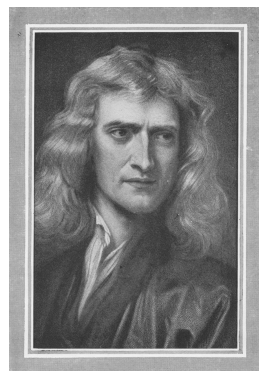
Výfučtení: Isaac Newton

Příroda a její zákony v temnu skryty byly,
Bůh řekl: „Budiž Newton!“ A tak se vyjasnilý.

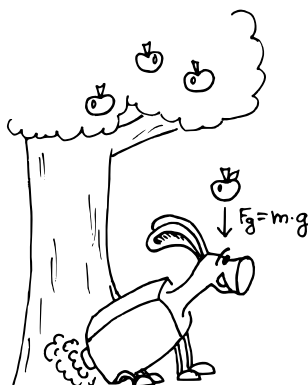
– Alexander Pope, anglicky

Jistě vás nepřekvapí, když řekneme, že fyzika dnes vypadá úplně jinak než dříve. Ještě před půltisíciletím nebylo slovo fyzika označením pro samostatný vědní obor, i když lidstvo už tehdy disponovalo poznatky, které bychom dnes označili jako fyzikální. Rozdíl byl v chápání a interpretaci oněch poznatků oproti tomu, jak si tyto stejné poznatky vykládáme dnes my. Lidé možná věděli, jak funguje kladkostroj, nicméně rovnice, jaké jste si vy mohli do sešitu ohledně něj napsat, by tehdy nikdo rozeznat nedokázal. Všechny poznatky bývaly neorganizované. Jednoduché operace jako například dosazení do vzorečku byly výsadou jen těch nejchytřejších zkrátka proto, že tehdy žádné vzorečky, jak je známe dnes, neexistovaly. Aby se z takovéto fyziky stala dnešní fyzika, chtělo to celkem podstatnou změnu – musel být vynalezen nový matematický aparát na popisování fyzikálních jevů, musela se zrodit základní odvětví fyziky jako optika a mechanika a lidé museli začít přemýšlet racionálně a podkládat své myšlenky experimenty.

Nebudeme přehánět, když řekneme, že všechny tyto tři aspekty, které umožnily vznik dnešní fyziky, výrazně rozvinul jeden člověk – sir Isaac Newton. O nesmírnosti jeho vlivu na fyziku svědčí i jeho přímý či nepřímý vliv na kulturu dnešního světa. Po Newtonovi jsou pojmenovaná místa a města, jeho nejzásadnější experiment dal vzniknout logu skupiny „Pink Floyd“, vyskytuje se v knihách, básních a divadelních hrách a v neposlední řadě se historka o jablku, které mu spadlo na hlavu, vryla do povědomí snad každého občana civilizovaného světa. Kromě přímého vlivu jeho osobnosti však také ovlivnil svět svými myšlenkami, na nichž je založeno mnoho z toho, co v dnešní fyzice víme, ale i zčásti způsob, jakým o světě přemýšlíme.



Obr. 1: Kresba Newtona z roku 1917 podle předlohy autentické Knellerovy malby z roku 1689.



Bude nám proto potěšením věnovat první Výfučení letošního osmého ročníku Výfuku právě tomuto člověku ve snaze přiblížit vám jeho život a jeho poznatky z oblasti fyziky.

Přestože Newton posunul vědu mílovými kroky hned v několika odvětvích, my se kvůli omezené velikosti Výfučení hlouběji zaměříme pouze na newtonovskou teorii gravitace, do které spadá i jeho slavný zákon.

Newtonův život

Newton na svět přišel jako „vánoční dárek“ v Anglii dne 25. 12. 1642. Vzhledem k tomu, že jeho otec zemřel tři měsíce před Newtonovým narozením a Newtonova matka od něj žila devět let odděleně (v té době ho vychovávala jeho babička), nemůžeme Newtonovo dětství prohlásit za příjemné. Když mu bylo osmnáct let, mohl nastoupit na vyhlášenou Trinity College ve městě Cambridge. Zde dostal potřebné základy ke své práci a poznal tehdejší stav přírodovědného poznání.

V roce 1665, krátce po skončení jeho studia, vypukl v Cambridge mor, což přerušilo činnost univerzity a Newton musel dva roky pracovat sám. Tento čas v osamění mu umožnil přemýšlet nad optikou, mechanikou a infinitezimálním počtem.⁶ Zde mu prý spadlo na hlavu ono pověstné jablko.

V roce 1667 dostal na Cambridge trvalé místo, o dva roky později se již stal profesorem matematiky tamtéž a roku 1672 byl zvolen jako člen Královské společnosti.⁷ Newton stoupal v kariérním žebříčku prováděje přelomové fyzikální experimenty a objevuje fyzikální zákony, až v roce 1687 publikoval své stěžejní dílo – *Principia Mathematica*,⁸ kde představuje své pohybové zákony a vysvětluje, jak gravitace řídí pohyby nebeských těles. V roce 1703 se stal předsedou Královské společnosti a o rok později vydal své druhé významné dílo *Opticks*, které pojednává o optice a lomu světla. V této době se dostal do sporu s německým matematikem Gottfriedem Leibnizem o to, kdo vynalezl infinitezimální počet. Z dnešního pohledu jej oba vědci vynalezli nezávisle a oba jejich přístupy dnes používáme, nicméně v tehdejších dobách způsobil tento spor velké nepokoje a nepřátelství mezi oběma jeho protagonisty.

Roku 1705 se z Newtona stal rytíř (sir) a dalo by se říci, že pominula jeho fyzikální léta. Stal se také poslancem a ministrem královské mincovny a svůj čas věnoval spíše studiím alchymie a teologie. Zemřel roku 1727 ve věku 84 let.

Ačkoliv Newton nepochybně dosáhl spousty vědeckých úspěchů, nikdy se neoženil a zažil i nervová zhroucení. Jeho poněkud excentrický život lze vysvětlit těžkým dětstvím, ale lze též spekulovat, že se kvůli své angažovanosti v alchymii otrávil rtutí.

Přese všechno se bezpochyby jednalo o velmi nadaného člověka. Jen si to představte – práci, kterou za celý život mohl vykonat jiný fyzik, Newton odvedl hned ve třech odvětvích fyziky a základy k ní položil ještě dříve, než oslavil 30. narozeniny. Ve věku, kdy se vysokoškolsí studenti fyziky dnes učí o infinitezimálním počtu, ho on vynalezl, a to zde nezmiňujeme práci v ostatních nefyzikálních oborech.

⁶Důležité a pro fyziku nezbytné odvětví matematiky, do kterého patří limity, derivace a integrály, o nichž jste někdy mohli slyšet a také se o nich někteří z vás budou učit nejdříve na konci střední školy.

⁷Prestížní britská společnost, jejímž cílem je podporovat vědu. Něco jako AV ČR, i když o 300 let starší.

⁸Celým názvem *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, což bychom dnes přeložili jako Matematické principy přírodní vědy.

Newton v mechanice

Ve svých Principiích představil Newton jako jeden z hlavních poznatků tři zákony pohybu těles. Možná jste si o Newtonových zákonech říkali ve škole, my je zde ale pro jistotu uvedeme a vysvětlíme jejich význam.

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly, nebo je-li výslednice vnějších sil na něj působících nulová, pak těleso setrvává v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje jejím směrem se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.
3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

V těchto třech zákonech Newton vlastně vysvětlil, co to znamená síla ve fyzikálním pojetí. Ve druhém zákonu (dnes ho známe také ve formě rovnice $F = m \cdot a$) Newton tvrdí, že síla způsobuje zrychlení těles. Dnes již víme, že má pravdu, nicméně dříve bylo velice těžké tomuto tvrzení uvěřit. Kvůli existenci tření se totiž zdálo, že pokud nějaký předmět tlačíme silou, například pískovcový blok po zemi, udělujeme mu pouze nějakou rychlost v . Čím větší silou ho tlačíme, tím větší rychlost v mu pak můžeme udělit. Toto ale platí, jak již dnes víme, jen proto, že se při tlačení nějakého předmětu po ploše třením vytvoří rovnováha naší síly po směru pohybu a třecí síly proti směru pohybu. Kdybychom žili beze tření a gravitace, jako třeba ve stavu beztlíže na stanici ISS, tento zákon by se stal více očividným. První zákon mluví o tom, že bez síly se tělesa mohou pohybovat pouze s konstantní rychlostí v , která může být nulová. Třetí zákon pak mluví o tom, že síla vždy působí vzájemně, tedy že neexistuje akce bez reakce.⁹

Newton v optice

Newton sestavil první zrcadlový dalekohled a dále za pomoci hranolu provedl experiment, ve kterém rozložil bílé světlo na jeho jednotlivé barevné složky. Uvědomil si, že předměty dostávají svou barvu právě pohlcováním některých složek bílého světla. Například zelený list stromu má zelenou barvu, protože vstřebává všechny barvy světla až na jeho zelenou složku. Snažil se také popsat podstatu světla a říka, že se skládá z malinkých částic, sice nevystihl jeho pravou podstatu, nicméně vykročil správným směrem k jejímu porozumění.

Gravitace a těžiště

V neposlední řadě popsal Newton gravitační sílu, jež je jednou ze základních silových interakcí našeho vesmíru. Gravitační síla působí v jakémkoliv okamžiku mezi jakýmkoliv dvěma tělesy na neomezenou vzdálenost. Proto je nutné ji vždycky brát v potaz, i když je v praxi často zanedbatelná. Její působení popsal následující rovnicí:

$$F_G = G \frac{mM}{r^2}.$$

⁹Kdyby tento zákon neplatil, pak bychom mohli roztláčet libovolný náklad, aniž by bylo poznat, jak je těžký.

Dnes již víme, že tato rovnice tak úplně neplatí, nicméně pořád ji můžeme využít jako aproximaci skutečné síly. Když tento vzorec použijete, rozhodně neuděláte chybu. G značí tzv. *gravitační konstantu*¹⁰ s hodnotou $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$. Písmena m a M značí hmotnosti dvou těles, mezi kterými síla působí.¹¹ Písmeno r značí vzdálenost mezi dvěma tělesy (jejich těžišti).

Můžeme si všimnout, že gravitační konstanta nabývá extrémně malé hodnoty, a proto můžeme gravitační sílu mezi dvěma předměty za normálních okolností zanedbat. Navíc se zvětšující se vzdáleností F_G hodně rychle klesá, proto se jedná o velmi slabou sílu. Ve vesmíru přesto hraje roli na velké časové i vzdálenostní škále, jelikož planety, hvězdy atd. disponují velmi velkou hmotností, a tak se jejich vzájemná síla stane opět nezanedbatelnou.

To, že gravitace působí i mezi planetami, věděl i Newton. Podařilo se mu pomocí tohoto zákona teoreticky zdůvodnit Keplerovy zákony,¹² čímž tedy přispěl i do astronomie a potvrdil, že planety se pohybují nikoli po kruhových, ale po eliptických drahách.

Samozřejmě se však stále nabízí otázka: umístím-li těleso do gravitačního pole tak, že začne padat, za který přesně bod jej tíhová síla „tahá“? Může nás sice napadnout, že tato síla působí po malých kouscích na každý atom tvořící dané těleso, tím bychom ale jen přesunuli otázku na jednotlivé atomy, které mají také konečnou velikost. Je-li těleso tuhé, existuje jen jeden bod, do kterého vložené veškeré tíhové působení uvede těleso opravdu v pád a přitom jej neroztočí (všimněme si, že tíhová síla padající předměty neroztáčí) – tento bod nazýváme *těžištěm* tělesa, někdy také *působištem gravitační síly*. Díky němu můžeme zjednodušit působení na celé těleso působením na jeden bod.

Uvažujeme, že v těžišti je soustředěna veškerá hmotnost systému, který je ve skutečnosti tvořen „dílkami hmotnostmi“, z nichž každá má své vlastní těžiště. Např. těžiště hmotného trojúhelníku je shodné s jeho geometrickým těžištěm (průsečíkem těžnic), těžiště kružnice/koule nebo obdélníku/kvádrů se nachází v jejich geometrickém středu atd. Nicméně těžiště dvojice kružnic ve stejné rovině bude ležet na spojnici jejich vlastních těžišť, a tak to platí i u každé jiné dvojice těles v prostoru. Gravitace vždy působí na těžiště tělesa.

Matematicky vyjádřeno je poloha těžiště na ose x v prostoru dána váženým průměrem souřadnic jednotlivých dílků těžišť na této ose a jejich hmotností:

$$x_T = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

Ukažme si to na příkladu: Země má hmotnost $5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a Měsíc $0,0734 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Mezi jejich jádry (těžišti) je střední vzdálenost 384 000 km. Položíme-li počátek osy x do středu Země a těžiště Měsíce bude na této ose ležet, dostaneme pro polohu těžiště

$$x_T = \frac{(0 \text{ m}) \cdot (5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}) + (384 \cdot 10^6 \text{ m}) \cdot (0,0734 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}) + (0,0734 \cdot 10^{24} \text{ kg})} \doteq 4662 \text{ km},$$

což je zhruba 1 700 km pod zemským povrchem (poloměr Země je 6 378 km). Právě díky tomu, že těžiště neleží ve středu planety, má vzájemná přitažlivost Země a Měsíce velké důsledky pro geologii naší planety. Toto těžiště je tedy těžištěm společného systému Země–Měsíc a můžeme jej považovat za centrum gravitačního pole (tzv. *barycentrum*). Nejen Měsíc obíhá kolem Země,

¹⁰Dříve značená jako κ .

¹¹Nezapomeňme na třetí Newtonův zákon o tom, že síla musí působit na obě tělesa stejně veliká, ale v opačném směru.

¹²O nich pojednáváme v šestém Výfuctení třetí série http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_6.pdf.

ale i Země obíhá malým krouživým pohybem kolem tohoto bodu uvnitř jejího pláště se stejnou periodou.

Kdyby byl Měsíc o něco těžší, barycentrum by se nacházelo vně naší planety a stejně tak mohou i těžiště jiných těles ležet mimo jejich objem. Nejjednodušším případem je tuhá hmotná obruč, která má nutně těžiště v prázdném prostoru ve svém geometrickém středu. Vzpomeňte však, že těžiště je určující pro působení vnějšího pole, ale ne vždy nám jeho představa pomůže pro rozbor jeho vlastního působení. Například kdyby byla celá Země dutá a my doletěli do jejího středu, půjde sice o těžiště, ale skutečné gravitační působení bude pocházet od obalu této dutiny, a to bude stejné do všech směrů – uvnitř planety je stav beztlíže.

Závěr

Isaac Newton platí jako jeden z nejvlivnějších, ne-li nejvlivnější vědec vůbec. Mohli jste se zde dočíst, jak rozsáhlé objevy učinil, nicméně, jak jsme řekli na počátku Výfučení, vliv těchto objevů dosahuje ještě nepředstavitelnějších rozměrů. Z tohoto důvodu považujeme seznámení se s osobností Newtona za důležité nejen z hlediska fyziky, nýbrž i z hlediska kultury, a proto doufáme, že vám toto Výfučení pomohlo Newtona poznat.

Jindřich Dušek

jindra@vyfuk.mff.cuni.cz

Daniel Slezák

dans@vyfuk.mff.cuni.cz



**Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8**

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>

e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.