Výfučtení: Blaise Pascal

Úvod

Blaise Pascal se narodil 19. června 1623 v Clermontu ve Francii. Narodil se do zámožné a vzdělané rodiny – jeho otec Etienne Pascal byl výběrčí daní a také velmi schopný matematik. Bohužel jeho matka zemřela brzy po jeho narození, a tak se o něj hlavně staral jeho otec, který však chtěl, aby se Pascal zaměřoval spíše na humanitní vědy. To se ale změnilo, když desetiletý Pascal odvodil několik pravidel Euklidovy geometrie. Toto změnilo názor jeho otce a začal ho podporovat ve vědecké kariéře. V dalších letech Blaise svoje nadání rozvíjí až do té míry, že některá jeho díla jsou považovány za práci jeho otce. V osmnácti vytváří první prototyp Pascaliny (předchůdce kalkulačky). Přelomovými byly hlavně jeho objevy v matematice. Položil základy kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti a objevil pro Evropu jeden význačný trojúhelník, který od té doby nese jeho jméno.

Později se začíná věnovat experimentům, navazuje na práci Evangelisty Torricelliho s rtuťovou trubicí a z výsledných poznatků zformuluje Pascalův zákon. Bohužel má v průběhu života chatrné zdraví a v roce 1647 dokonce krátkodobě ochrne. Nedlouho poté jeho otec umírá a sám Pascal málem zemře, když se při vyjížďce v kočáře splaší koně a jeho kočár je téměř strhnut z mostu. Po těchto traumatických zážitcích se Pascal ke konci svého života odklání od exaktních věd a začíná se věnovat teologii a filosofii. Umírá 19. srpna 1662 v mladém věku 39 let na nádor mozku v klášteře.[1]

Pascalina, předchůdce kalkulačky a počítače

V devatenácti letech vynalezl první prototyp mechanické kalkulačky, Pascalinu. Sestrojil ji pro svého otce, kterému pomáhala při výkonu jeho povolání. Pascalina se skládala ze tří spojených válců, značících jednotky, desítky a stovky. Otáčením těmito válci se kalkulačce zadaly vstupní hodnoty, na jejichž základě spočítala hodnotu výstupní.

Odmocninu nebo logaritmus byste na ní ale hledali marně. Přístroj dokázal čísla sečíst, anebo odečíst, v některých verzích dokonce i vynásobit. Přesto si našel své uplatnění a Pascal vyrobil několik desítek zdokonalených kusů. Někteří z vás možná znají programovací jazyk Pascal. Nyní už budete vědět, proč se tak jmenuje. Není to proto, že by s ním měl Pascal něco přímo společného. Světlo světa spatřil až více než tři století po jeho smrti a po Pascalovi jej pojmenovali právě kvůli jeho Pascalině, kterou je možné považovat nejen za předchůdce moderních kalkulaček, ale i počítačů.

Pokusy se rtutí v trubici a Pascalův zákon

Na okolní svět se snažil Blaise dívat racionálně (svět se řídí určitými fyzikálními pravidly, které jdou postupně intuitivně odhalit), a proto byl jedním z mála, který v této době ověřoval své

[1] Obrázek Pascala převzat z Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_pascal.jpg`.

Obr. 1: Exemplář Pascaliny v muzeu vědy a techniky v Milánu.

domněnky experimentálně. Všechny ostatní zdroje nepokládal za spolehlivé a svoje experimenty si vždy pečlivě připravil a přesně dokumentoval. Jak bylo zmíněno předtím, Pascal navázal na práci Torricelliho s rtuťovou trubicí a svým měřením vyvrátil jeden z přetrvávajících mýtů „Horror vacui“, který říkal, že příroda se bojí vakua (vždy se jej snaží vyplnit), a tudíž by mělo být nedosažitelné. Dokázal, že výška sloupce rtuti, který je schopen se udržet ve shora jednostranně zaslepené trubici (tj. očekávali bychom, že rtuť může vytéct spodem), závisí na gravitační síle působící na rtuť a na atmosférickém tlaku, který působí proti této síle. Pokud bude sloupec rtuti dostatečně vysoký (přes 76 cm), tak nebude atmosférický tlak dostatečně velký, aby gravitaci vykompenzoval a ve vrchní části trubice se vytvoří (téměř) vakuum.

Následně Pascal zkoumal spojené nádoby a šíření tlaku v kapalinách. Na základě svých pozorování a experimentů zformuloval Pascalův zákon, který říká, že tlak v kapalině se šíří v každém bodě všemi směry stejně a tlak kapaliny je proto stejný v celém jejím objemu (pokud zanedbáme gravitační síly) – to znamená, že libovolně tvarovaným potrubím můžeme tlak přenášet, což je základní princip hydrauliky. Pokrok v ní je z větší části založen na jasné formulaci následujícího zákona.

Pokud si označíme tlak na libovolnou část stěny libovolné nádoby jako p_1 a tlak působící na druhou část stěny té samé nádoby jako p_2, můžeme využít výše zmíněných vlastností tlaku (stále bez ohledu na gravitační síly) a psát, že $F_1/S_1 = F_2/S_2$, kde F je síla působící na část stěny nádoby a S povrch této části. Na počest Pascalovým objevům nosí jeho jméno jednotka tlaku $[p] = \mathrm{Pa}$.

Na závěr této části si uveďme jednoduchý příklad. Mějme dvojici pístů propojených vodotěsnou trubičkou ve stejné výšce a naplněných vodou. Průřez prvního pístu je $S_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}^2$, druhý píst má průřez $S_2 = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$ a je na něm položeno závaží o hmotnosti $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$. Jakou silou F_1 musíme působit na první píst, aby soustava zůstala v klidu?

Řešení: Pokud má soustava zůstat v klidu, musí být tlak ve všech místech kapaliny stejný. To vyplývá z Newtonova prvního zákona – kdyby tlak nebyl stejný, působila by někde síla, která by kapalinou pohybovala. Platí tedy: $p_1 = p_2$, neboli tlak na každý z pístů je stejný. Dosazením podle Pascalova zákona dostáváme rovnost $F_1/S_1 = F_2/S_2$. Teď už stačí jen dosadit za F_2 součin hmotnosti m_2 a gravitačního zrychlení, vyjádřit si sílu F_1 a dopočítat ji.

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{m_2 g}{S_2}$$

$$F_1 = \frac{S_1 m_2 g}{S_2} = \frac{0{,}6\,\mathrm{m^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^2}}{0{,}1\,\mathrm{m^2}} \doteq 588{,}6\,\mathrm{N}$$

Zjistili jsme, že na druhý píst je potřeba tlačit silou $F_1 = 588{,}6\,\mathrm{N}$. To je šestinásobek síly, kterou působí závaží na druhý píst. Je vidět, že píst nám umožňuje zvětšovat/zmenšovat potřebnou sílu na vykonání práce. Přesně toho se využívá v hydraulice.

Teorie pravděpodobnosti

Jak už bylo zmíněno, Blaise Pascal se mimo jiné věnoval také matematice. Společně se svým současníkem Pierrem Fermatem položil Pascal základy teorie pravděpodobnosti. Je zajímavé, že tato oblast matematiky vznikla na základě úvah o pravděpodobnosti výhry v hazardních hrách. Oba matematici byli totiž vášnivými hráči a zajímalo je, proč některé strategie dlouhodobě prohrávají, zatímco jiné vyhrávají. Lidé samozřejmě o pravděpodobnosti přemýšleli v souvislosti s hazardem i dříve. Patřičného vysvětlení se ale mnohým zdánlivě paradoxním jevům dostalo až s popisem pomocí matematiky.

Pascal s Fermatem se zabývali například problémem, jak mezi hráče spravedlivě rozdělit vsazené peníze, pokud musí být hra nečekaně přerušena. Nabízí se rozdělit si je ve stejném poměru, v jakém byly pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů v okamžiku přerušení hry. Aby byl tento postup uskutečnitelný, je potřeba umět tyto pravděpodobnosti přesně spočítat. A právě o to se Pascal s Fermatem pokusili. Nově tak definovali střední hodnotu, které se občas říká také očekávaný výnos. Střední hodnota je průměr hodnot náhodné veličiny. Náhodná veličina je například číslo, které padne při hodu kostkou. V takovém případě by byla střední hodnota 3,5, neboť všechny hodnoty od 1 do 6 mají stejnou šanci na padnutí. Střední hodnota je v tomto případě aritmetický průměr.

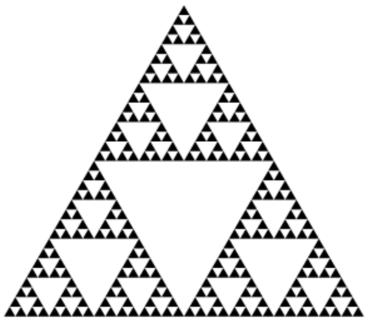
Pascalův trojúhelník

Na závěr povídání o Pascalovi se podíváme na s pravděpodobností související trojúhelník, který nese jeho jméno. Opět to není proto, že by jej Pascal objevil. Matematici napříč celým světem jej studovali staletí před ním. Pascal byl ale první, kdo jej dokázal využít právě v teorii pravděpodobnosti a nalézt a popsat mnoho jeho více či méně užitečných vlastností. Co to ale vlastně ten Pascalův trojúhelník je? Abychom jej mohli využívat, nepotřebujeme znát přesnou definici pomocí tzv. kombinačních čísel. Vystačíme si s tím, že se jedná o schéma, které dostaneme tak, že si do prvního řádku napíšeme trojici čísel 0, 1 a 0. Další řádky pak postupně tvoříme tak, že každou dvojici čísel nacházejících se vedle sebe sečteme. Místo ní následně napíšeme mezi tato dvě čísla do dalšího řádku jejich součet. Nuly v prvním řádku ignorujeme, netvoří Pascalův trojúhelník, pouze nám jej pomáhají zjednodušeně definovat. Jedničky musíme psát na oba konce každého řádku dodatečně.

Příklad Pascalova trojúhelníku o šesti řádcích:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \end{array}$$

K zajímavým vlastnostem Pascalova trojúhelníku patří například to, že součet čísel v n-tém řádku dá $(n-1)$-ní mocninu dvojky. Také je možné si všimnout, že pokud obarvíme všechna lichá čísla, vznikne nám Sierpińského trojúhelník, což je fraktál, obrazec, ve kterém se určité motivy do nekonečna opakují.



Obr. 2: Sierpińského trojúhelník

My si nyní uvedeme dvě možná jednoduchá praktická využití tohoto schématu. Nejdříve si představme, že potřebujeme umocnit součet libovolných dvou čísel (nazveme si je a a b) na n. Pokud $n = 2$, nejspíše si vzpomeneme na známý vzorec $(a + b)^n = a^2 + 2ab + b^2$. Pokud je $n = 3$, nebo 4, zvládneme mezi sebou jednotlivé opakující se členy ještě vynásobit a následně sčítance se stejnými mocninami sečíst. Co ale dělat, pokud $n = 6$ a my nechceme strávit nad výpočty zbytečně moc času? Odpověď nám dává právě Pascalův trojúhelník. Pokud jsme si zkusili umocnit součet čísel a a b postupně na $n = 2, 3$ a 4, mohli jsme si všimnout, že číselné koeficienty u jednotlivých členů se nápadně shodují s čísly v Pascalově trojúhelníku. Pokud chceme umocnit $(a+b)^n$, podíváme se do $(n+1)$-ho řádku Pascalova trojúhelníku. Čísla v tomto řádku jsou pak po řadě koeficienty u jednotlivých sčítanců ve výsledném výrazu.

Uveďme si příklad. Chceme umocnit na šestou výraz $2x+3$. Abychom mohli využít Pascalova trojúhelníku, nechť $2x = a$ a $3 = b$. Očekáváme výsledek ve tvaru

$$ka^6 + la^5b + ma^4b^2 + na^3b^3 + oa^2b^4 + pab^5 + qb^6\,,$$

kde k, l, m, n, o, p a q jsou koeficienty, které získáme z Pascalova trojúhelníka. Můžeme proto rovnou psát $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Dosadíme zpět za a a b a nakonec vynásobíme koeficienty získané umocněním a z Pascalova trojúhelníka.

$$(2x)^6 + 6(2x)^5 3 + 15(2x)^4 3^2 + 20(2x)^3 3^3 + 15(2x)^2 3^4 + 6(2x)3^5 + 3^6$$
$$64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729$$

Druhým o něco jednodušším příkladem využití Pascalova trojúhelníka je případ, kdy potřebujeme určit, kolika způsoby je možné vybrat k prvků z celkového počtu n prvků (pokud nám nezáleží na pořadí, ve kterém je vytáhneme, tj. zajímá nás pouze počet vytažených prvků). Stačí se jen podívat do $(k+1)$-vého řádku na $(n+1)$-ní číslo a toto číslo nám ihned udá výsledný počet výběrů. Tato vlastnost přímo vyplývá z definice Pascalova trojúhelníka pomocí kombinačních čísel, které ale přesahují rámec tohoto Výfučtení. Sami si například můžete ověřit, že pro $n = 4$ a $k = 2$ dostanete číslo 6. Stejný počet dostanete, když budete přemýšlet nad všemi možnými dvojicemi např. vybraných písmen ze seznamu 4 písmen *abcd*:

$$abcd \quad \rightarrow \quad ab, ac, ad, bc, bd, cd \;\; (6 \text{ možností}) \,.$$

Závěr

Blaise Pascal žil ve stínu známějších současníků, jako byl například Isaac Newton, Galileo Galilei nebo Johannes Kepler. Přesto jsou jeho objevy a přínosy v mnohém průlomové a zpětně je nedocenit by byla velká chyba. Na jeho práci navázali tisíce dalších. Zasloužil se o vznik celého jednoho oboru matematiky, významně přispěl k pochopení základů hydrauliky a na výpočetní technice dnes stojí celá naše civilizace.

I přes svůj krátký život Blaise Pascal významně zasáhl do mnoha oborů a svým přístupem k experimentům položil základ, který vedl k přesnějším a objektivnějším výsledkům.

Viktor Materna ***Patrik Kašpárek***

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.