Úloha VI.5 ... Katapult

6 bodů; (chybí statistiky)

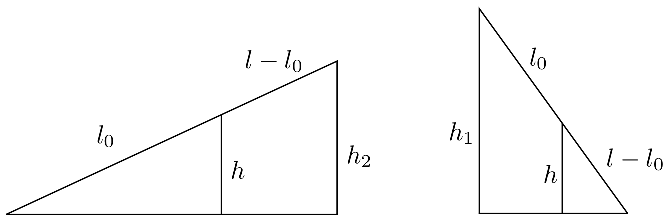
Jindra se rozhodl, že si postaví katapult. Použil k tomu prkno dlouhé $l = 5\,\mathrm{m}$ se zanedbatelnou hmotností, které podložil ve vzdálenosti $l_0 = 4\,\mathrm{m}$ od místa pro kámen podpěrou vysokou $h = 0{,}8\,\mathrm{m}$. K výstřelu použil kámen o hmotnosti $m_1 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, který vystřelil tak, že na druhý konec prkna položil závaží o hmotnosti $m_2 = 25\,\mathrm{kg}$ a předtím kámen ukotvil, aby prkno opustil kolmo k jeho délce.

1. *Jak vysoko (od země) se musí Jindra natáhnout, aby položil závaží na druhý konec katapultu? V jaké výšce bude kámen těsně před výstřelem?*
2. *Jakou rychlostí katapult vystřelí kámen? (Nezapomeňte na vliv závaží na druhé straně katapultu.)*
3. *Za jak dlouho po oddělení od prkna kámen dopadne na zem?*
4. *Do jaké vzdálenosti od bodu výstřelu by měl kámen dopadnout na zem? Přeletí vůbec celý katapult?*

1. Označme výšku kamene těsně před výstřelem h_1 a výšku, do které se Jindra musí natáhnout, jako h_2. Z podobností trojúhelníků (obr. 1) vyplývá:

$$\frac{h}{l - l_0} = \frac{h_1}{l}\,,$$
$$\frac{h}{l_0} = \frac{h_2}{l}\,.$$

Odtud vyjádříme hledané výšky $h_1 = hl/(l - l_0)$ a $h_2 = hl/l_0$. Po dosazení vychází $h_1 = 4\,\mathrm{m}$ a $h_2 = 1\,\mathrm{m}$.



Obr. 1: Podobnost trojúhelníků řeší 1. úkol.

2. Rychlost, jakou katapult vystřelí kámen, vypočítáme ze zákona zachování mechanické energie. Energie kamenu budeme značit indexy 1, energie závaží indexy 2. Levá strana rovnice vyjadřuje celkový součet mechanické energie těsně po položení závaží, pravá strana těsně před oddělením závaží od katapultu:

$$E_{\mathrm{p2}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p1}}\,.$$

Těsně po položení závaží se ani jeden z kamenů nepohybuje, a tak jsou obě kinetické energie nulové. Taktéž kámen je v nulové výšce, proto nám na levé straně zůstane pouze potenciální energie závaží. Na pravé straně se však oba kameny pohybují, proto oba mají nenulovou kinetickou energii a k tomu je kámen ve výšce h_1, takže má nenulovou potenciální energii.

Rovnici si rozepíšeme (využijeme známých vztahů, že $E_\mathrm{k} = mv^2/2$ a $E_\mathrm{p} = mgh$):

$$m_2gh_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_1gh_1 \,.$$

Vidíme, že v jedné rovnici máme 2 neznámé – v_1 a v_2, což znamená, že rovnici nemůžeme takto ponechat. Využijeme faktu, že oba kameny jsou pevně spojeny prknem, a otáčí se tak kolem společného středu. To znamená, že mají stejnou úhlovou rychlost otáčení ω. Do rovnice tedy za rychlost dosadíme úhlovou rychlost vynásobenou poloměrem (vzdáleností daného kamene od podpěry) a rovnici trochu přepíšeme:

$$m_2gh_2 - m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1\omega^2l_0^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2(l-l_0)^2 \,.$$

Tím jsme obdrželi jednu rovnici s jednou neznámou, a proto ji dokážeme vyřešit.[1] Vyjádříme si tedy ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_2gh_2 - 2m_1gh_1}{m_1l_0^2 + m_2(l-l_0)^2}} \,,$$

z čehož poté zpětně určíme rychlost v_1 vynásobením poloměrem:

$$v_1 = l_0\sqrt{\frac{2m_2gh_2 - 2m_1gh_1}{m_1l_0^2 + m_2(l-l_0)^2}} \,.$$

Po dosazení vyjde rychlost, s níž se kámen oddělí od katapultu, jako $v_1 = 11{,}03\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

3. Po oddělení od prkna poletí kámen šikmým vrhem. Zajímá nás proto, pod jakým úhlem β vůči vodorovné rovině (viz obr. 2) se bude pohybovat, protože s tímto úhlem je nezbytné počítat. Víme, že kámen opouští prkno kolmo k jeho délce. Všimněme si dvojice střídavých úhlů α. Úhel α určíme pomocí goniometrické funkce sinus, a poté jednoduše určíme úhel $\beta = 90^\circ - \alpha$:

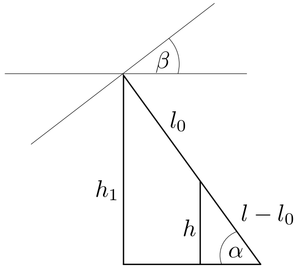
$$\sin\alpha = \frac{h}{l-l_0} \,,$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \arcsin\frac{h}{l-l_0} \,.$$

Tento úhel po dosazení vychází přibližně $\beta = 36^\circ 52'$, hodnoty $\sin\beta = 0{,}6$ a $\cos\beta = 0{,}8$.

Nyní si buďto vyhledáme vztahy pro šikmý vrh, anebo si je odvodíme, což uděláme zde. Rozložíme si rychlost v_1 na dvě navzájem kolmé složky, v_y směřující kolmo nahoru od země (v ose y) a v_x směřující rovnoběžně se zemí (v ose x). Pro velikosti těchto složek platí $v_y = v_1\sin\beta$ a $v_x = v_1\cos\beta$. Proti složce rychlosti v_y působí tíhová síla kolmo k zemi

[1] Jak známo, obecně lze vyřešit soustavu n rovnic s maximálně n neznámými.



Obr. 2: Nákres situace pro výpočet 3. úkolu

dolů. K tomu všemu kámen padá z nenulové počáteční výšky. Zapíšeme si obecnou rovnici y-ové (svislé) souřadnice kamene na čase (čas budeme značit t):

$$y = h_1 + v_1 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Snažíme se najít bod, kdy kámen dopadne na zem. Takový bod má výšku nad zemí $y = 0\,\mathrm{m}$. Dosadíme tuto hodnotu do rovnice a trochu ji upravíme:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_1 \sin\beta t - h_1 = 0 \,.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí známého vzorečku:

$$t_{1,2} = \frac{v_1 \sin\beta \pm \sqrt{(v_1 \sin\beta)^2 + 2 g h_1}}{g} \,.$$

Nicméně fyzikálně dává smysl pouze kladný kořen, protože čas v našem případě nabývá pouze kladných hodnot (začínáme ho měřit od určitého okamžiku a od nuly). Kámen tedy dopadne po $t \doteq 1{,}8\,\mathrm{s}$ letu.

4. Nyní již můžeme vypočítat x-ovou souřadnici dopadu kamene. Kámen se po čas t pohyboval v ose x rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v_x, tedy jeho souřadnice bude:

$$x = v_x t = v_1 t \cos\beta \,.$$

Po dosazení vychází $x = 15{,}9\,\mathrm{m}$, a tedy s přehledem přeletí celý katapult.

Robert Gemrot

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.