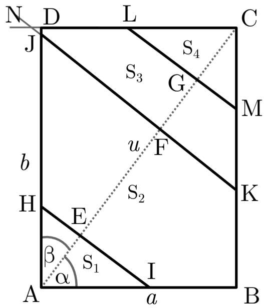
Úloha VI.2 . . . Pizza

6 bodů; (chybí statistiky)

Pavel si koupil podivnou pizzu ve tvaru kvádru o stranách délky $a = 3\,\mathrm{dm}$ a $b = 4\,\mathrm{dm}$. Výška pizzy je $h = 1\,\mathrm{cm}$. Pavel si nejprve naznačil na pizzu jednu úhlopříčku. Následně vedl řezy kolmé na tuto úhlopříčku, a to tak, že ji rozdělil v poměru $1 : 2 : 1 : 1$. V jakém poměru jsou tyto 4 obsahy podstav dílků pizzy?

Nejdříve si celou situaci buď načrtneme, nebo lépe narýsujeme a uděláme počáteční rozbor úlohy.

Všimneme si, že trojúhelníky AIH a CLM jsou shodné, jelikož jsou oba pravoúhlé, mají stejné ostatní vnitřní úhly a výška na přeponu je stejně dlouhá. K určení obsahu těchto dvou trojúhelníků potřebujeme znát délky úseček AI a AH, což určíme například s pomocí goniometrických funkcí.



Obr. 1: Rozkrájená pizza

Z obrázku 1 vidíme, že útvary BKJHI a KMLDJ nejsou nijak pravidelné, proto u nich neurčíme obsah žádným jednoduchým vzorečkem. Budeme muset složit pár trojúhelníků, abychom tyto obsahy dostali. Snadněji se nám bude určovat obsah útvaru KMLDJ, který získáme složením obsahů tří pravoúhlých trojúhelníků – od obsahu trojúhelníku CNK odečteme obsah trojúhelníku DNJ a obsah trojúhelníku MCL. Obsah trojúhelníku CNK zjistíme pomocí délek stran CN a CK, k určení obsahu trojúhelníku DNJ potřebujeme znát délky stran DN, resp. DJ.

Vypočítáme si, jak je dlouhá úhlopříčka u (na obrázku tečkovaně) z Pythagorovy věty:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Po dosazení nám vyjde $u = 5\,\mathrm{dm}$. Dále si ještě vypočítáme délky, které se nám budou při výpočtech hodit, pomocí toho, kolik dílků z celkového počtu dílků úhlopříčky u zabírají:

$$|\mathsf{AE}| = u \cdot \frac{1}{1+2+1+1} = 1\,\mathrm{dm}\,, \quad |\mathsf{EF}| = 2|\mathsf{AE}| = 2\,\mathrm{dm}\,.$$

Nyní si vyjádříme kosinus úhlu $\measuredangle\mathsf{BAC} = \alpha$, což je tzv. goniometrická funkce, která u pravoúhlého trojúhelníku udává poměr přilehlé odvěsny ku přeponě tímto způsobem:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathsf{AB}|}{|\mathsf{AC}|}\,.$$

Zároveň víme, že trojúhelník AIE je taktéž pravoúhlý, takže i zde můžeme použít funkci kosinus k určení délky strany AI:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathsf{AE}|}{|\mathsf{AI}|}\,.$$

Pravé strany vrchních dvou rovnic můžeme položit do rovnosti, z čehož můžeme obratem vyjádřit $|\mathsf{AI}|$:

$$|\mathsf{AI}| = \frac{|\mathsf{AE}| \cdot |\mathsf{AC}|}{|\mathsf{AB}|} = \frac{5}{3}\,\mathrm{dm}\,.$$

Pokud neznáte goniometrické funkce, tak nezoufejte, postup se dá odvodit i bez nich. Podle věty UUU[1] můžeme dokázat, že trojúhelníky AEI a ABC jsou si podobné, protože se poměr délek stran a a b v jednom trojúhelníku rovná poměru délek stran a a b ve druhém trojúhelníku. V obou postupech si zakládáme na myšlence, že platí vztah $|\mathsf{AE}|/|\mathsf{AI}| = |\mathsf{AC}|/|\mathsf{AB}|$.

Obdobně postupujeme pro určení délky strany AH – spočteme si kosinus úhlu $\measuredangle \mathsf{DAC} = \beta$:

$$\cos(\beta) = \frac{|\mathsf{AD}|}{|\mathsf{AC}|}$$

a v pravoúhlém trojúhelníku AEH si taktéž vyjádříme $\cos(\beta) = |\mathsf{AE}|/|\mathsf{AH}|$, dosadíme a vyjádříme $|\mathsf{AH}|$:

$$|\mathsf{AH}| = \frac{|\mathsf{AE}| \cdot |\mathsf{AC}|}{|\mathsf{AD}|} = \frac{5}{4}\,\mathrm{dm}$$

Podotkněme, že platí $|\mathsf{AI}| = |\mathsf{CL}|$ a $|\mathsf{AH}| = |\mathsf{CM}|$ díky shodnosti trojúhelníků.

Nyní můžeme spočítat obsah $S_1 = S_4$:

$$S_1 = S_4 = \frac{|\mathsf{AI}| \cdot |\mathsf{AH}|}{2} = \frac{25}{24}\,\mathrm{dm}^2\,.$$

Zaměříme se na určení délky CN. Víme, že trojúhelníky CNK a CLM jsou podobné podle věty UUU (pravý úhel u vrcholu C a souhlasné úhly při vrcholech L a N). To znamená, že trojúhelník CNK je jen zvětšenina trojúhelníku CLM. Jelikož známe délky $|\mathsf{CG}| = |\mathsf{AE}|$ a $|\mathsf{CF}|$ ($|\mathsf{CF}| = 2 \cdot |\mathsf{CG}|$), víme, jak moc zvětšený je – přesně dvakrát. Z toho vyplývá $|\mathsf{CN}| = 2 \cdot |\mathsf{CL}| = 2 \cdot |\mathsf{AI}| = 10/3\,\mathrm{dm}$.

Úplně stejně určíme $|\mathsf{CK}|$ jakožto dvojnásobek $|\mathsf{CM}|$, tedy $|\mathsf{CK}| = 2 \cdot |\mathsf{CM}| = 2 \cdot |\mathsf{AH}| = 5/2\,\mathrm{dm}$. Ještě musíme určit délku „výběžků“ DN a DJ. Ze stejné úvahy o podobnosti víme, že $|\mathsf{AJ}| = 3 \cdot |\mathsf{AH}|$, jelikož $|\mathsf{AF}| = 3 \cdot |\mathsf{AE}|$.

Nyní už můžeme vytvořit rovnici

$$|\mathsf{CN}| = |\mathsf{CD}| + |\mathsf{DN}|\,,$$

do které můžeme dosadit $|\mathsf{CN}| = 10/3\,\mathrm{dm}$ a $|\mathsf{CD}| = 3\,\mathrm{dm}$. Vyjádříme $|\mathsf{DN}|$:

$$|\mathsf{DN}| = |\mathsf{CN}| - |\mathsf{CD}| = \frac{10}{3}\,\mathrm{dm} - 3\,\mathrm{dm} = \frac{1}{3}\,\mathrm{dm}\,.$$

Obdobnou rovnici sestavíme pro určení délky strany DJ:

$$|\mathsf{AD}| = |\mathsf{AJ}| + |\mathsf{DJ}|\,.$$

[1] Oba trojúhelníky mají stejný pravý úhel, úhel α a tím pádem i třetí úhel.

Opět můžeme dosadit $|\mathsf{AD}| = 4\,\mathrm{dm}$ a $|\mathsf{AJ}| = 15/4\,\mathrm{dm}$ a vyjádříme $|\mathsf{DJ}|$:

$$|\mathsf{DJ}| = |\mathsf{AD}| - |\mathsf{AJ}| = 4\,\mathrm{dm} - \frac{15}{4}\,\mathrm{dm} = \frac{1}{4}\,\mathrm{dm}\,.$$

Konečně můžeme vyjádřit obsah S_3:

$$S_3 = \frac{|\mathsf{CN}| \cdot |\mathsf{CK}|}{2} - \frac{|\mathsf{DN}| \cdot |\mathsf{DJ}|}{2} - S_1\,.$$

Do této rovnice dosadíme:

$$S_3 = \frac{(10/3) \cdot (5/2)}{2}\,\mathrm{dm}^2 - \frac{(1/3) \cdot (1/4)}{2}\,\mathrm{dm}^2 - \frac{25}{24}\,\mathrm{dm}^2 = \frac{37}{12}\,\mathrm{dm}^2$$

a obsah S_2 určíme snadno jakožto obsah celého obdélníka minus obsahy všech ostatních částí:

$$S_2 = ab - S_1 - S_3 - S_4 = 3 \cdot 4\,\mathrm{dm}^2 - \frac{25}{24}\,\mathrm{dm}^2 - \frac{37}{12}\,\mathrm{dm}^2 - \frac{25}{24}\,\mathrm{dm}^2 = \frac{41}{6}\,\mathrm{dm}^2\,.$$

Pro výpočet výsledného poměru převedeme zlomky na společného jmenovatele:

$$\frac{25}{24} : \frac{41}{6} : \frac{37}{12} : \frac{25}{24} = \frac{25}{24} : \frac{164}{24} : \frac{74}{24} : \frac{25}{24}\,.$$

Hledané poměry obsahů tedy jsou:

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 25 : 164 : 74 : 25\,.$$

Robert Gemrot

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.