Úloha III.E ... Tuha mikrotužky

8 bodů; (chybí statistiky)

Andřejka byla jednou v galerii, kde měli obraz různě tlustých čar. Tento obraz ji uchvátil natolik, že začala přemýšlet, jaká může být jejich průměrná výška.[1] Pomozte Andřejce v jejích úvahách a změřte, jak vysoká je čára, kterou kreslí tuha do mikrotužky. Předpokládejte, že nakreslená čára má tvar kvádru a že objem tuhy se nemění. Měření zkuste provést alespoň 5krát a spočtěte chybu měření. Nezapomeňte uvést, jaký typ a tloušťku tuhy jste použili.

Celý experiment provedeme tak, že narýsujeme čáru o známé délce a zjistíme, kolik tuhy nám ubude. V našem případě jsme použili čáru o délce $l = 1\,\mathrm{m}$, přičemž byla rozdělena na pět úseků po $20\,\mathrm{cm}$ tak, aby se vešla na papír. Délku tuhy mikrotužky jsme změřili pomocí přesného posuvného měřidla, slangově šuplery, před a po narýsování této čáry. Úbytek mikrotuhy označme h. Část tuhy, která nám po narýsování čáry ubyla, můžeme považovat za malý válec, jehož objem je

$$V_\mathrm{t} = h\pi r^2\,.$$

Zde platí, že $r = d/2$, kde $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ je průměr náplně uvedený výrobcem. Úpravou dostáváme

$$V_\mathrm{t} = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h\,.$$

Předpokládáme, že narýsovaná čára má tvar velmi dlouhého kvádru, jehož objem vypočítáme ze vzorce:

$$V_\mathrm{k} = ldx\,,$$

kde l je délka kvádru (čáry), d je jeho šířka a x je námi hledaná výška kvádru. Všimněme si, že šířka čáry d odpovídá průměru náplně do mikrotužky, který známe od výrobce. Za předpokladu, že se při rýsování žádná hmota náplně neztrácí (zanedbáme to, že při rýsování podle pravítka se kus tuhy přenese na pravítko) ani žádná nepřibývá a že její objem je konstantní, musí platit:

$$V_\mathrm{t} = V_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad \pi \frac{d^2}{4} h = ldx\,.$$

Odtud již snadno vyjádříme námi hledanou výšku čáry:

$$x = \frac{\pi dh}{4l}\,. \tag{1}$$

Nyní nám zbývá provést samotné měření a určit odchylku měření, viz níže.

Naměřené hodnoty

Provedeme pět měření náplní do mikrotužky typu HB o průměru $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Délku čáry vždy zvolíme $l = 1\,\mathrm{m}$.

Hodnoty zprůměrujeme a dostaneme tak průměrnou výšku spotřebované tuhy $\overline{h} \doteq 0{,}123\,\mathrm{mm}$ a průměrnou vypočítanou výšku narýsované čáry $\overline{x} \doteq 4{,}83 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$.

[1] Výškou myslíme doopravdy výšku, tedy směr kolmý k rovině papíru.

Tab. 1: Naměřené hodnoty úbytku tuhy h s dopočtenými x

$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{x}{10^{-8}\,\text{m}}$
0,100	3,93
0,125	4,91
0,150	5,89
0,140	5,50
0,100	3,93

Nepřesnost měření

Během experimentu jsme měřili jen dvě délky. Jako první metrovou čáru rozdělenou na pět dílků pomocí pravítka. Odchylku měření každé části odhadujeme na velikost poloviny nejmenšího měřitelného dílku, tedy 0,5 mm. Protože jsme však měřili délku čáry na pětkrát, může být celková odchylka naměřené délky čáry nejvýše pětkrát větší, tedy $\Delta l = 2{,}5\,\text{mm}$. Můžeme tedy bezpečně říct, že měřená délka čáry byla 1 m s relativní chybou nejvýše 0,25 %.

Oproti tomu úbytek tuhy jsme měřili posuvným měřítkem, jehož nepřesnost byla 0,025 mm. Tato malá nepřesnost je ale v porovnání s naměřenými hodnotami úbytku tuhy podstatná. To znamená, že relativní (procentuální) nepřesnost odhadu výšky narýsované čáry, kterou vypočítáme jako podíl absolutní nepřesnosti měření[2] ku naměřené hodnotě, bude již podstatně velká. V praxi pomocí relativní nepřesnosti[3] dokážeme zohlednit, jestli jsme na měřenou veličinu použili dostatečně přesné měřidlo. Pokud například stůl měříme svinovacím metrem, máme menší relativní nepřesnost, než když jím měříme zrnko prachu, a můžeme tedy lépe ohodnotit přesnost měření. Vidíme, že relativní nepřesnost měření narýsované čáry metrem dosahuje hodnoty

$$\delta l = \frac{\Delta l}{\bar{l}} = \frac{0{,}25\,\text{cm}}{100\,\text{cm}} = 0{,}25\,\%\,,$$

což je málo, a to i když jsme uvažovali maximální možnou nepřesnost. Průměr náplně d nám udal výrobce a budeme ji považovat za přesnou. Zbývá tedy nepřesnost měření úbytku tuhy h. Tu můžeme opět vypočítat z absolutní chyby, kterou jsme určili dříve jako nepřesnost posuvného měřidla. Musíme si však uvědomit rozdíl mezi veličinou h a l. Celková délka čáry l byla spočtena jako součet délek z několika měření a mělo tedy smysl nepřesnosti každého měření sčítat. Naproti tomu výšku tuhy h jsme dostali jako průměr z několika hodnot tabulky, a každá hodnota byla obdržena se stejnou nepřesností 0,025 mm. Průměrně se tedy nepřesnost výsledku Δh rovná nepřesnosti jedné hodnoty. Pro relativní chybu tedy dostáváme

$$\delta h = \frac{\Delta h}{\bar{h}} = \frac{0{,}025\,\text{mm}}{0{,}123\,\text{mm}} \doteq 20\,\%\,.$$

Jak si můžeme všimnout, relativní chyba určení délky narýsované čáry je zanedbatelná v porovnání s relativní chybou určeného úbytku náplně. Můžeme ji tedy zanedbat, čímž dostáváme výslednou výšku čáry jako funkci jediné proměnné zatížené chybou, a to právě úbytku náplně. Procentuální chyba určené výšky čáry se tedy shoduje s chybou určeného úbytku náplně, protože x závisí na h skrze vztah (1), ve kterém se h pouze násobí konstantami, které bereme jako

[2] Značí se tak, že před měřenou veličinu napíšeme Δ (velká delta).
[3] Značí se tak, že před měřenou veličinu napíšeme písmeno δ (malá delta).

přesné. Pokud je tedy chyba h určena jako Δh procent ze své hodnoty, musí být procentuální chyba x rovněž Δh procent ze své hodnoty.

Zapsáno rovnicí:

$$\delta x = \delta h\,.$$

Z vypočtených nepřesností vidíme, že metrová čára je ve skutečnosti málo a pro přesnější měření by bylo vhodné udělat delší čáru, čímž by se zvětšilo množství vypotřebované náplně a tedy výška vypsané tuhy, která by se nám měřila lépe.

Závěr

Z experimentů jsme určili výšku měřené čáry jako $x = (4{,}8 \pm 1{,}0) \cdot 10^{-8}$ m a s relativní chybou $\delta x = 20\,\%$ (což odpovídá právě napsané absolutní chybě $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m).

Je však ještě nutné zmínit, že náš výsledek bychom měli interpretovat spíše jako řádový odhad, protože se skutečná výška bude od našeho výsledku znatelně lišit. Tuha si při přenesení na papír nebude zachovávat svůj objem v důsledku porušení vazeb mezi jednotlivými vrstvami uhlíku, dále čára nebude ideální kvádr, ale lze předpokládat, že na okrajích bude nižší než ve svém středu, povrch papíru není na mikroskopické úrovni vůbec rovný atp. Pochopitelně v přesnosti výsledku hraje velkou roli i výše vypočítaná relativní chyba při měření výšky vypotřebované tuhy. Ta by se dala zmenšit již zmíněným měřením delší čáry s větším úbytkem náplně, případně jinou pokročilejší metodou měření délky tuhy, které bychom ale mohli využít pouze v laboratoři se sofistikovaným vybavením. Nakonec, pro přesnější reprodukci tohoto experimentu můžeme doporučit také zaznamenat druh papíru, na kterém čáru zanecháváme. Přilnavost tuhy se může značně lišit v závislosti na zvoleném materiálu.

Marek Božoň
`marek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.