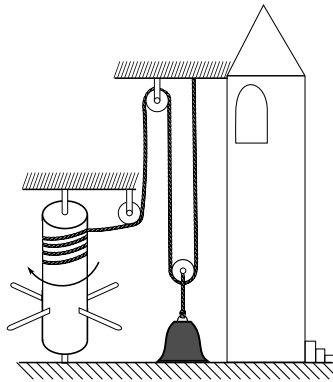


Úloha III.5 ... Věž kostela

6 bodů; (chybí statistiky)

Na věž kostela Sv. Jakuba je vytažován nový zvon o hmotnosti 2,5 t. Zvon je vytažován středověkou metodou – pomocí rumpálu, lidskou silou přes soustavu pevných a jedné volné kladky. Rumpál je válec o poloměru 40 cm, na něj se namotává lano. Otáčí jím čtyři statní muži, kteří působí silou na konce držadel ve vzdálenosti 2,5 m od osy otáčení rumpálu. Zvon je na lano zavěšen pomocí volné kladky.

1. Jakou nejmenší silou musí každý statný muž působit na konec držadla, aby se jim povedlo zvon vytáhnout na vrchol věže?
2. Kolikrát se otočí rumpál kolem své osy, je-li zvon vytažován do výšky 30 m?



1. Zvon má hmotnost m , tedy na něj působí tíhová síla o velikosti

$$F = mg.$$

Jelikož je zvon zavěšen na volné kladce, stačí ho vytažovat poloviční silou, než je jeho tíha. Zapsáno rovnicí

$$F_1 = \frac{mg}{2}.$$

Touto silou¹ také působí provaz na válec rumpálu ve vzdálenosti r_1 od osy otáčení, tedy momentem

$$M = F_1 \cdot r_1 = \frac{1}{2} mgr_1.$$

Aby statní muži zvon vytáhli, musí na rumpál působit momentem síly o stejné velikosti. Jelikož působí ve vzdálenosti r_2 od osy otáčení, musí dohromady působit silou

$$F_2 = \frac{M}{r_2} = \frac{1}{2} mg \frac{r_1}{r_2}.$$

¹Resp. podle Newtonových zákonů silou stejné velikosti, ale opačného směru.

Na rumpál působí každý ze čtyř mužů stejně velkou silou F . Každý z nich tedy působí čtvrtinovou silou v porovnání s celkovou potřebnou silou F_2 :

$$F = \frac{F_2}{4} = \frac{1}{8} mg \frac{r_1}{r_2}.$$

Číselným dosazením hodnot ze zadání do této rovnice dostáváme

$$F = \frac{1}{8} 2\,500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{0,4 \text{ m}}{2,5 \text{ m}},$$

$$F \doteq 490,5 \text{ N}.$$

Aby zvon vytáhli, každý z mužů musí působit silou $F = 490,5 \text{ N}$. Pro představu, každý musí působit takovou silou, jako kdyby zdvihal padesátilitrový barel vody, což je rozhodně v lidských možnostech.

2. Když vytahujeme závaží pomocí volné kladky, působíme pouze poloviční silou, ale zato musíme působit na dvojnásobné dráze, tedy musíme přitáhnout dvojnásobnou délku lana. Vyplývá to buď z geometrie soustavy nebo z vykonané práce, která je součinem působící síly a dráhy. Práce potřebná k vytažení zvonu je stále stejná $W = Fs = mgh$, tudíž když působíme poloviční silou $F = mg/2$, potřebujeme provaz o dvojnásobku výšky $2h$. Na rumpál tedy musíme namotat $2 \cdot 30 \text{ m} = 60 \text{ m}$ lana. Obvod rumpálu je

$$o = 2\pi r_1 \doteq 2,51 \text{ m}.$$

Abychom na něj namotali 60 m lana, musíme ho tedy otočit

$$n = \frac{l}{o} = \frac{2h}{2\pi r} = \frac{60 \text{ m}}{2,51 \text{ m}} \doteq 23,9 \text{ krát}.$$

Ve skutečnosti by se, dokud by to rumpál umožňoval, lano namotávalo tak, aby se nepřekrývalo – tedy do spirály. Tyto výpočty by však už byly složitější a záležely by na průměru lana. Nicméně můžeme předpokládat, že průměr lana je v porovnání s průměrem rumpálu zanedbatelný a tento výsledek je tak srovnatelný s tím, který bychom dostali, kdybychom uvažovali namotávání lana po spirále.

Kateřina Rosická

kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.