

Úloha III.3 . . . Hladový lis

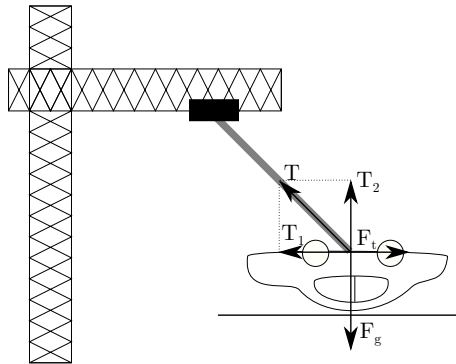
6 bodů; (chybí statistiky)

Na šrotišti si naštvaný jeřábík pohazuje s auty. Někdy je vláčí po zemi, jindy je zase vytahuje do výšky. Jednou mu odbrzděné auto o hmotnosti 1 234 kg ujelo a převrátilo se, takže jej musel vytahovat zpět pod úhlem 45° vůči zemi. Jakou minimální tažnou sílu musel jeřáb vyvinout na rozposybování auta, jestliže koeficient tření mezi autem a zemí činí $f = 0,2$? Odlepí se přitom auto od země?

Pro zdárné vyřešení této úlohy je nejdříve potřeba se zamyslet nad tím, jaké síly na naše auto působí. Největší síla je samozřejmě tažná síla T , kterou působí jeřáb na auto pod úhlem 45° vůči zemi a jejíž velikost máme za úkol vypočítat. Tato síla také dává auto do pohybu. Proti pohybu působí třecí síla, kterou vypočítáme jako

$$F_t = F_n f,$$

kde F_n je normálová (tj. kolmá) síla, která tlačí auto k povrchu, na němž dochází ke tření, a f je koeficient tření, který známe ze zadání. Nakonec na auto, stejně jako na každé jiné těleso na Zemi, působí tíhová síla F_G .



Každá z těchto sil ale působí jiným směrem. Tíhová síla působí dolů, třecí proti směru pohybu vozidla a tažná síla na naše auto působí pod úhlem 45° . Jelikož je síla vektorová veličina, tedy má kromě velikosti i směr, můžeme využít principu superpozice¹ a síly rozložit takovým způsobem, že budeme moci počítat jen s jejich velikostmi.

Tažnou sílu můžeme rozložit na dvě k sobě kolmé složky – na sílu T_1 , která působí přesně opačným směrem než třecí síla, a na sílu T_2 , která působí přesně opačným směrem než síla tíhová. Obě dvě složky jsou navzájem kolmé a s původní silou T svírají úhel 45° . Aby jejich složením vznikla původní síla T , je zřejmé, že síly T_1 a T_2 musí být stranami čtverce, kde síla T je úhlopříčkou.

V jakémkoliv čtverci se stranou a platí, že jeho úhlopříčka má délku $a \cdot \sqrt{2}$. Proto pro velikosti sil T_1 i T_2 platí, že:

$$T_1 \cdot \sqrt{2} = T \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = \frac{T}{\sqrt{2}}.$$

¹Princip superpozice nám říká, že pokud rozložíme sílu na více jiných sil/složek tak, že původní síla je jejich výslednicí neboli součtem těchto sil, bude výsledný účinek totožný.

K výpočtu třecí síly potřebujeme znát sílu, kterou je auto tlačeno do země, tedy normálovou sílu. Intuitivně předpokládáme, že se auto nenadzvedne, a proto můžeme normálovou sílu určit jako výslednici všech svisle působících sil, tedy

$$F_n = F_G - T_2.$$

Pokud by náš předpoklad byl špatný a auto se ve skutečnosti nadzvedlo, což ověříme ve druhé otázce ze zadání, tak by nedocházelo ke tření a museli bychom počítat, že $F_n = 0$ N. My ale dopředu prozradíme, že se auto skutečně nenadzvedne a tato rovnice platí. Minimální síla, kterou musí jeřáb působit, je taková síla, jejíž vodorovná složka překoná třecí sílu. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} T_1 &= F_t, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= F_n f, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= (F_G - T_2) f, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= \left(mg - \frac{T}{\sqrt{2}} \right) f \Rightarrow T = \frac{mgf\sqrt{2}}{1+f}. \end{aligned}$$

Nyní pouze dosadíme do rovnice číselné hodnoty ze zadání:

$$T = \frac{\sqrt{2} \cdot (1234 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot 0,2}{1 + 0,2} \doteq 2909 \text{ N}.$$

Už stačí jen ověřit, že auto se doopravdy neodlepí od země a že náš výpočet je platný. To zjistíme velmi jednoduše, a to tak, že působí-li výslednice svislých sil do země, tak se auto neodlepí, neboť je přitlačováno k zemi. Zapsáno rovnicí, potřebujeme ověřit platnost

$$F_G - T_2 \geq 0.$$

Do tohoto vztahu můžeme dosadit již několikrát výše zmiňované vztahy, čímž dostáváme

$$mg - \frac{T}{\sqrt{2}} = 1234 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - \frac{2909 \text{ N}}{\sqrt{2}} \doteq 10283 \text{ N} \geq 0.$$

Vidíme tedy, že auto se od povrchu určitě neodlepí. Naše úvahy byly tedy správné a můžeme konstatovat, že k rozpohybování auta musí jeřáb působit silou alespoň 2909 N.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.