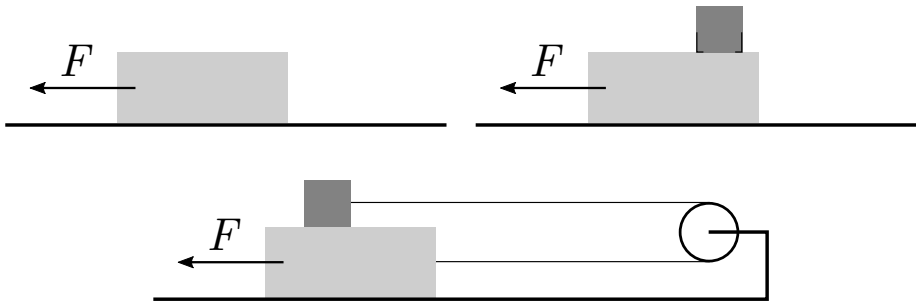


## Úloha I.5 ... Ošemetné tření

7 bodů; průměr 3,21; řešilo 29 studentů

Tření nemusí být vždy takové, jak jsme na něj byli zvyklí. Při  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  si projděme následující případy a uvidíme, na co je třeba si dát pozor. . .

- (1) Umístěte na podložku kvádr 1 o hmotnosti  $m_1 = 8 \text{ kg}$ . S jakým zrychlením se bude pohybovat, budeme-li na něj působit ve vodorovném směru silou  $F = 80 \text{ N}$ ? Koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je  $f = 0,4$ .
- (2) Jak se změní zrychlení, když na první kvádr položíme ještě druhý kvádr menší podstavy o hmotnosti  $m_2 = 3 \text{ kg}$ ?
- (3) Nyní si představme, že oba kvádry spojíme lanem přes pevnou kladku tak, jak je naznačeno na obrázku. Jaké bude zrychlení spodního kvádry, budeme-li uvažovat, že koeficient tření mezi oběma kvádry je  $f_k = 0$ ?
- (4) A jak se změní výsledek, bude-li koeficient tření mezi kvádry  $f_k = f = 0,4$ ?



Třecí sílu  $\vec{F}_t$  spočteme jako  $\vec{F}_t = f\vec{F}_n$ , kde  $f$  značí součinitel smykového tření a  $\vec{F}_n$  kolmou (neboli normálovou – proto „n“) tlakovou sílu na podložku. Tato síla působí vždy proti směru pohybu; jinými slovy mu brání. Abychom nemuseli počítat s vektorovými veličinami, budeme počítat pouze s velikostmi sil a jejich orientaci budeme řešit pomocí znaménka. V našem případě je  $F_n$  tíha kvádry, popřípadě kvádrů, a proto můžeme vzoreček pro třecí sílu přepsat do tvaru

$$F_t = mgf. \quad (1)$$

Ještě než začneme řešit jednotlivé podúlohy, připomeňme si druhý Newtonův zákon  $F = ma$ , který nám říká, že působíme-li silou  $F$  na těleso hmotnosti  $m$ , začne se pohybovat se zrychlením  $a$ .

V podúloze (1) na kvádr působí dvě síly  $F$  a  $F_t$ , které mají navzájem opačný směr. Výsledné zrychlení je dané výslednicí všech působících sil, kterou si nazvěme  $F_1$ . Směr, ve kterém působí síla  $F$ , označme jako kladný<sup>1</sup>. Pro výslednici  $F_1$  tedy dostáváme

$$\begin{aligned} F_1 &= F - F_t, \\ F_1 &= F - m_1gf. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Fungovalo by i opačné značení, jen si naši volbu musíme pamatovat a správně určit směr výslednice.

Všimněme si, že ačkoliv je síla vektorová veličina, nemusíme vektorový zápis používat, jelikož směr sil vyjadřujeme dostatečně pomocí znamének. Výsledné zrychlení kvádrů  $a_1$  je dáno výslednicí všech působících sil  $F_1$ , platí tedy  $F_1 = m_1 a_1$ . Dosazením za  $F_1$  a vyjádřením hledaného zrychlení dostáváme dle druhého Newtonova zákona

$$a_1 = \frac{F - m_1 g f}{m_1}. \quad (3)$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání dostáváme

$$a_1 = \frac{80 \text{ N} - 8 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,4}{8 \text{ kg}} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Kvádr se tedy bude pohybovat se zrychlením  $a_1 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Podúloha (2) nebude o tolik složitější. Problém na první pohled vypadá velice podobně předchozí úloze s tím rozdílem, že na spodním kvádrů máme ještě jeden. Důležité je si nyní uvědomit, že se horní kvádr *nepohybuje*. Proto se vlastně jedná o tu samou situaci, jako kdybychom horní kvádr k dolnímu přilepili, nebo jako kdyby horní a dolní kvádr byly jedno těleso. Principiálně se tedy nejedná pouze o podobnost s předchozí úlohou, jedná se vlastně o tu samou úlohu.

Pohyb jednoho tělesa po ploše jsme už v onom minulém příkladu vypočítali, nyní se změní pouze celková hmotnost  $m = m_1 + m_2$ . Takže nám stačí v rovnici (3) nahradit všechny členy  $m_1$  novými členy  $(m_1 + m_2)$ . Přidaný kvádr nedělá totiž nic jiného, než že zvyšuje hmotnost celé soustavy.

Alternativní způsob uvědomění si shodnosti s předchozí úlohou je, že výsledná třecí síla je dána jako  $F_t = f F_n$ , kde normálová síla je nyní  $F_n = (m_1 + m_2)g$ . Při dosazení do druhého Newtonova zákona navíc nezapomeneme, že se budou pohybovat oba kvádry, tedy že  $m = m_1 + m_2$ .

Oběma postupy dostáváme rovnici, z níž vypočítáme hledané zrychlení, které si označíme tentokrát  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{F - (m_1 + m_2)g f}{m_1 + m_2}.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme zrychlení  $a_2 \doteq 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Nyní v podúloze (3) se situace mírně komplikuje, jelikož se bude kvádr 2 během pohybu posouvat po kvádrů 1. Pro získání řešení nyní už musíme rozebrat působení sil na každý z kvádrů zvlášť. Nebudeme moci využívat rovnici (2), protože na celý systém bude silově působit ještě lana, které kvádry přes kladku spojuje.

Nejprve si rozebereme situaci u kvádrů 1. Na něj působí tři síly, jejichž účinek nás bude zajímat. Působí tu síla, kterou taháme a značíme ji  $F$ , dále síla lana, kterou označíme  $F_{\text{lano}}$ , a třecí síla  $F_t$ . Tyto síly se opět složí do jedné výsledné, kterou si nazvěme  $F_3$ . Musíme si dát pozor, že třecí sílu ovlivňuje hmotnost obou kvádrů jako minule. Dále si musíme uvědomit, že kvádr 1 se bude pohybovat ve směru působící síly  $F$ , ale pohybu bude bránit třecí síla  $F_t$  a síla lana  $F_{\text{lano}}$ . Pro výslednici  $F_3$  tedy dostáváme

$$F_3 = F - F_t - F_{\text{lano}}, \quad (4)$$

a podle druhého Newtonova zákona můžeme psát

$$F_3 = m_1 a_3 . \quad (5)$$

Nyní si potřebujeme ujasnit ještě jednu věc. Oba kvádry se pohybují se stejným zrychlením  $a_3$ , jelikož kdyby se nepohybovaly se stejným zrychlením, tak by se vzdálenosti mezi kvádry a tedy i lano smršťovaly nebo prodlužovaly (což se, z naší vlastní zkušenosti, neděje).

U kvádry 2 je rozbor sil mnohem snazší. Na kvádr působí pouze lano silou  $F_{\text{lano}}$ , kterou opět podle Newtonova zákona můžeme vyjádřit jako

$$F_{\text{lano}} = m_2 a_3 . \quad (6)$$

Třetí síla zde nepůsobí, neboť součinitel tření se rovná nule. Dosazením z výrazu pro třetí sílu a rovnic (5), (6) do rovnice (4) dostáváme

$$\begin{aligned} F_3 &= F - F_t - F_{\text{lano}} , \\ m_1 a_3 &= F - (m_1 + m_2)gf - m_2 a_3 , \\ a_3 &= \frac{F - (m_1 + m_2)gf}{m_1 + m_2} . \end{aligned}$$

Číselným dosazením dopočítáme velikost zrychlení  $a_3 \doteq 3,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Dostáváme tedy stejný výsledek jako v předchozí podúloze. To je v naprostém pořádku, protože pokud se podíváme na celý systém pořádně, můžeme si všimnout, že se v něm nic nezměnilo, pouze se otočil směr pohybu horního kvádry.

Poslední podúloha (4), kde hledané zrychlení označíme  $a_4$ , je nejsložitější. U kvádry 1 je stále platná rovnice z minulé podúlohy

$$F_3 = F - F_t - F_{\text{lano}} . \quad (7)$$

Za jednotlivé síly ale bude třeba dosadit odlišné výrazy. U kvádry 2 vstupuje totiž do hry ještě tření mezi stykovými plochami kvádrů, jehož součinitel označujeme  $f_k$ . Toto tření kvádr 2 zpomaluje a v pohybových rovnicích se to projeví jako

$$F_{\text{lano}} = m_2 a_4 + m_2 g f_k .$$

Co je však podstatné – tato třetí síla působí i na kvádr 1. Jejím původcem je v tomto případě přítlak kvádry 2 shora:

$$F_t = (m_1 + m_2)gf + m_2 g f_k ,$$

čímž se nyní setkáváme s očekávaným ošemetným třením – ne vždy musí být jeho příčinou styk s podložkou pod tělesem ale i styk s dalším tělesem nad ním.

Nyní opět můžeme provést „velké dosazování“ do rovnice (7), podobně jako v předchozí podúloze. Dostáváme tedy

$$m_1 a_4 = F - (m_1 + m_2)gf - m_2 g f_k - m_2 a_4 - m_2 g f_k .$$

Vyjádřením neznámého zrychlení  $a_4$  pak

$$a_4 = \frac{F - (m_1 + m_2)gf - 2m_2 g f_k}{m_1 + m_2} .$$

Po dosažení všech hodnot získáme velikost  $a_4 \doteq 1,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

K tomu, abyste vypočítali poslední podúlohu, bylo třeba vědět, jak se počítají podúlohy nad ní. Pokud bychom ji dostali za úkol hned na začátku, nevyhnuli bychom se většině z rovnic, které jsme použili i nyní.

Nakonec hlavním fyzikálním ponaučením všech podúloh je, že podložka nemusí být za tření zodpovědná vždy a svou roli hrají ve skutečnosti veškeré normálové síly, které v soustavě vystupují.

Fyzikální situace, které se zdají být složité, lze někdy rozřešit pouze tím, že si je zjednodušíme do podoby více menších úloh, které zvládneme vyřešit. Poté můžeme postupně přidávat po menších stravitelných krůčcích na obtížnosti malých úloh, až se dobereme k výsledku úlohy původní. Paradoxně tedy někdy může být jednodušší řešit více otázek než méně.

*Klára Stefanová*

klarka@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.