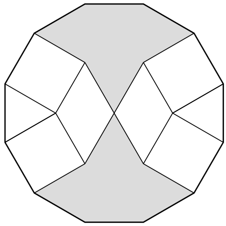
Úloha I.2 ... Podlaha

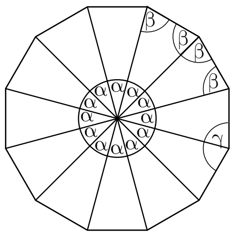
5 bodů; (chybí statistiky)

Na obrázku je základní obrazec zámecké podlahy. Všechny úsečky v něm jsou stejně dlouhé a měří 12 cm. *Vypočtěte obsah šedé části.*



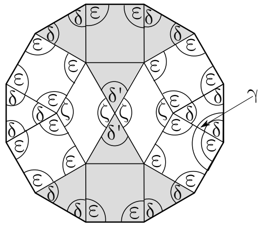
K obsahu šedé plochy je možné se dostat dvěma způsoby: nějak jej spočítat přímo anebo zjistit obsah celého obrazce a od něj odečíst obsah bílých částí. My si ukážeme ten přímý způsob.

Když si pozorně prohlédneme tento obrazec, zjistíme, že se jedná o pravidelný dvanáctiúhelník. O pravidelných n-úhelnících víme, že mají stejně dlouhé všechny strany a také mají shodné obvodové úhly, tj. úhly svírané stranami. Například ve čtverci, což je pravidelný čtyřúhelník, jsou všechny obvodové úhly 90°. Velikost obvodového úhlu spočítáme tak, že si 12-úhelník rozdělíme na shodné rovnoramenné trojúhelníky jako na obrázku a uvědomíme si, že celý kruh je 360°. To znamená, že úhel při hlavním vrcholu každého z těchto trojúhelníků bude mít velikost $\alpha = 360°/12 = 30°$. Dále je dobré si pamatovat, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° a úhly rovnoramenného trojúhelníku při základně jsou shodné. Z toho odvodíme, že velikost každého z úhlů při základně našich trojúhelníků je $\beta = (180° - 30°)/2 = 75°$. Obvodový úhel je složen ze dvou těchto úhlů, proto jeho velikost je $\gamma = 2 \cdot \beta = 2 \cdot 75° = 150°$.



Obr. 1: Výpočet obvodového úhlu dvanáctiúhelníku

Zároveň si můžeme šedé plochy rozdělit čarami jako na obrázku. Přestože se jeví vzniklé úsečky stejně dlouhé jako ty původní, nemůžeme toto zdání automaticky přijmout jako pravdu a je třeba si to nějak ověřit. O původních úsečkách víme, že jsou všechny stejně dlouhé. Z toho vyplývá, že jimi vytyčené trojúhelníky jsou rovnostranné. Takové trojúhelníky mají všechny vnitřní úhly stejně velké a to $\delta = 180°/3 = 60°$. Pokud od obvodového úhlu dvanáctiúhelníku odečteme tento úhel, získáme $\varepsilon = \gamma - \delta = 150° - 60° = 90°$ a máme tudíž jistotu (s vědomím shodnosti úseček), že zbylé bílé části při obvodu jsou čtverce. Všimněme si, že všude při obvodu (nejen v bílé části) tedy máme střídající se čtverce (s úhly ε) a rovnostranné trojúhelníky (s úhly δ). O bílých částech při středu dokážeme říct zatím pouze to, že se jedná o kosočtverce (ze shodnosti úseček), a tudíž mají shodné protilehlé úhly. Nicméně úhel ζ dokážeme spočítat: $\zeta = 360° - \delta - 2 \cdot \varepsilon = 360° - 60° - 2 \cdot 90° = 120°$. Proto dokážeme určit i úhly $\delta' = (360° - 2 \cdot 120°)/2 = 60°$. Jelikož strany trojúhelníků při tomto vrcholu jsou stejně dlouhé, na zbylé dva úhly zbývá $180° - \delta' = 180° - 60° = 120° = 2 \cdot 60°$, jedná se tedy také o rovnostranné trojúhelníky.



Obr. 2: Rozebrání jednotlivých úhlů v obrazci

Šedá plocha se tedy skládá z celkem 6 rovnostranných trojúhelníků o straně $a = 12\,\mathrm{cm}$ a dvou čtverců o téže straně. Obsah jednoho čtverce spočítáme pomocí vzorečku: $S_{\text{čtverec}} = a^2 = (12\,\mathrm{cm})^2 = 144\,\mathrm{cm}^2$. K výpočtu obsahu rovnostranného trojúhelníku potřebujeme znát jeho výšku, kterou lze spočítat z Pythagorovy věty:

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{144\,\mathrm{cm}^2 - 36\,\mathrm{cm}^2} = \sqrt{108}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}\,.$$

Obsah trojúhelníku pak vypočítáme: $S_{\text{trojúhelník}} = a \cdot v_a/2 = (12\,\mathrm{cm} \cdot 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm})/2 = 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Konečně se dostáváme k obsahu celé šedé části, který je: $S = 6 \cdot S_{\text{trojúhelník}} + 2 \cdot S_{\text{čtverec}} = 216\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 + 288\,\mathrm{cm}^2$.

Pokud bychom chtěli počítat druhým způsobem, museli bychom si spočítat obsah celého dvanáctiúhelníku (nejlépe z trojúhelníků z prvního obrázku), poté bychom podobnou úhlovou úvahou došli k tomu, že bílé kosočtverce jsou složeny ze dvou rovnostranných trojúhelníků shodných se všemi ostatními v obrazci. Pomocí čtverců a trojúhelníků bychom poté dokázali spočítat celkový obsah bílé části, ten odečíst od obsahu dvanáctiúhelníku, a dostali bychom tak stejný výsledek.

Simona Gabrielová
simca@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.