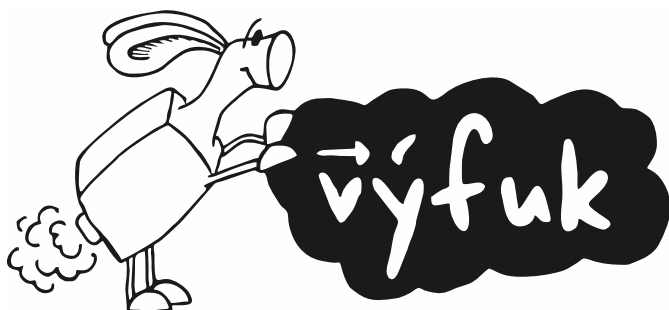




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

S blížícím se koncem školního roku přichází i poslední brožurka sedmého ročníku Výfuku, ve které najdete nové úlohy. Těšit se můžete na Výfučení o polovodičích, záludné problémy i na cachťání si rukou při měření hustoty.

Právě se také koná naše *Jarní setkání* v Českých Budějovicích. Článek o něm si budete moci přečíst na webu.¹

Pokud máte strach, že se vám přes prázdniny bude po nové várce fyzikálních a matematických úloh stýskat, přihlaste se na náš *letní tábor*. Tam na vás čeká již tradičně dvoutýdenní program se spoustou zábavy, her, poutavých přednášek a kamarádů. Přihlášku i další informace taktéž naleznete na našem webu.²

Hodně zábavy při řešení této série vám přeji

Organizátoři

`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



¹<http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/setkani/jaro2018>

²<http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/tabor>



matfyz



Zadání VI. série



Termín uploadu: 21. 5. 2018 20.00

Termín odeslání: N/A

Úloha VI.1 ... Osmisměrka ⑥ ⑦

5 bodů

Fyzika je poměrně rozsáhlý vědní obor, který zkoumá prakticky vše kolem nás. Pod jeho objevy se podepsalo mnoho velmi chytrých lidí, tím nejznámějším je zřejmě Albert Einstein. Ve dvacátém prvním století však žil vědec, o kterém se můžete dočíst, že je považován za Einsteinova nástupce. Jeho jméno najdete v tajence následující osmisměrky. Napište nám, jaká slova jsou v ní ukrytá, vyškrtajte je a o vědci, který vám vyjde, si zjistěte pár informací. O tu, která vás nejvíc zaujme, se s námi podělte.

M	A	A	N	I	L	A	P	A	K	S
A	I	T	N	E	P	L	T	T	A	W
T	S	O	V	I	T	Í	V	S	J	E
E	L	H	N	E	Ř	S	E	O	O	I
M	E	N	P	H	F	T	U	R	A	G
A	C	L	J	A	B	L	K	O	N	R
T	O	Č	R	D	E	I	I	E	Y	E
I	W	A	K	Ě	M	I	L	N	L	N
K	D	S	G	V	T	L	O	V	P	E

Slova ukrytá v osmisměrce: (1) Název vektorové veličiny, která se obvykle značí $\vec{F}$ (2) Systematické poznávání světa kolem nás i v nás (3) Ideální je nestlačitelná (4) Ideální je bez vnitřního tření (5) Neustále se mění, je jí stále stejně, ale není to hmota (6) Tomuto ovoci údajně vděčíme za objev gravitačního zákona (7) Předpona znamenající tisíckrát (8) Vědec, bez jehož práce by se fyzici ani chemici neobešli (9) Jednotka výkonu (10) Umí se sálat, zářit i vést (11) Vyrábí se z uhlí i vody (12) Jednotka práce (13) Veličina, jejíž jednotka je pojmenována po svíče (14) Předpona značící jednu miliontinu (15) Nikdy se nezastaví (16) Jednotka elektrické kapacity (17) Teplota zkapalnění dusíku je -196 stupňů... (18) Elektricky nabitý atom nebo molekula (19) Jednotka napětí

Úloha VI.2 ... Pizza ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Pavel si koupil podivnou pizzu ve tvaru kvádra o stranách délky $a = 3$ dm a $b = 4$ dm. Výška pizzy je $h = 1$ cm. Pavel si nejprve naznačil na pizzu jednu úhlopříčku. Následně vedl řezy kolmé na tuto úhlopříčku, a to tak, že ji rozdělil v poměru $1 : 2 : 1 : 1$. V jakém poměru jsou tyto 4 obsahy podstav dílků pizzy?

Úloha VI.3 ... Tiskárna ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Radka seděla ve své laboratoři v budově ve výšce 15 metrů, když vtom uviděla za oknem padat tiskárnu. Podařilo se jí změřit, že na zem dopadla za jednu sekundu od průletu kolem jejího okna. Z jaké výšky nad zemí byla tiskárna puštěna?

Úloha VI.4 ... Šetři naftu ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Marta se dozvěděla, že výhřevnost paliva udává, kolik energie se uvolní spálením 1 kg dané palivové směsi. Výhřevnost benzínu je 50 MJ/kg a jeho hustota $700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Během cesty na dovolenou měl motor jejího auta průměrný výkon 30 koní a spotřebu 7 l na 100 km. Jaká byla její průměrná rychlost, jestliže motor spaluje palivo s 25% účinností?

Úloha VI.5 ... Katapult ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

6 bodů

Jindra se rozhodl, že si postaví katapult. Použil k tomu prkno dlouhé $l = 5 \text{ m}$ se zanedbatelnou hmotností, které podložil ve vzdálenosti $l_0 = 4 \text{ m}$ od místa pro kámen podpěrou vysokou $h = 0,8 \text{ m}$. K výstřelu použil kámen o hmotnosti $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, který vystřelil tak, že na druhý konec prkna položil závaží o hmotnosti $m_2 = 25 \text{ kg}$ a předtím kámen ukotvil, aby prkno opustil kolmo k jeho délce.

1. Jak vysoko (od země) se musí Jindra natáhnout, aby položil závaží na druhý konec katapultu? V jaké výšce bude kámen těsně před výstřelem?
2. Jakou rychlostí katapult vystřelí kámen? (Nezapomeňte na vliv závaží na druhé straně katapultu.)
3. Za jak dlouho po oddělení od prkna kámen dopadne na zem?
4. Do jaké vzdálenosti od bodu výstřelu by měl kámen dopadnout na zem? Přeletí vůbec celý katapult?

Úloha VI.E ... Hlavně to nerozbít ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Všichni máte doma jistě nádoby z více různých materiálů: porcelánu, skla, sklokeramiky, plastu... Pokuste se co nejpresněji změřit hustotu co největšího množství materiálů, ze kterého je nádoba vyrobena a porovnejte je s tabulkovými nebo jinak zjištěnými hodnotami (nezapomeňte uvést zdroj).

Všimněte si, že vaše měření např. u keramiky může být ovlivněno odlišnou hustotou vrstvy glazury, která je tvořena jiným materiálem. Popište všechny podobné zdroje nepřesností ve vašem měření a pokuste se odhadnout, do jaké míry vaše výsledky ovlivnily. Nezapomeňte popsat postup měření, aby kdokoli mohl podle vašeho popisu experiment zopakovat.

Úloha VI.C ... Z poloviny vodiče ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

1. Vyhledejte si po jednom příkladu materiálu, který vykazuje vlastnosti vodiče, který vykazuje vlastnosti izolantu, a nakonec i materiálu vykazujícího vlastnosti polovodiče. Také uveďte jejich odpory za běžných podmínek (např. při pokojové teplotě, za atmosférického tlaku apod.).

- Seřadte látky z předchozího úkolu podle elektrického odporu a toto запиšte pomocí nerovností. Napište, která látka má největší a která nejmenší odpor. Zamyslete se nad tím,³ proč je nutné uvažovat při srovnávání hodnot odporů stejné podmínky?
- Vypište, jak se jmenují nositelé náboje v polovodičích. Jak se nazývají procesy jejich vzniku a zániku? Co je nutno dodat, aby tito nositelé vznikli?
- Zkuste vlastními slovy popsat, jak se liší vlastní a příměsová vodivost? Jaký je rozdíl mezi polovodiči typu N a P?
- Na obrázku ?? je nakreslený tzv. usměrňovací můstek (tvořen čtyřmi diodami) zapojený do obvodu se žárovkou. Nakreslete, kudy poteče proud, když k jedné elektrodě připojíme kladný pól zdroje napětí a ke druhé pól záporný. Na další obrázek nakreslete, kudy bude procházet proud, pokud póly vyměníme.



Výfučení: Polovodiče

Polovodiče – základ kompaktní elektroniky

Každý z nás si už určitě někdy položil otázku, jak vlastně funguje veškerá elektronika, která nás obklopuje. Přestože se na obrazovky chytrých telefonů a televizí díváme často i mnoho hodin denně, alespoň základům jejich stavby rozumí jen nemnoho z nás. A právě tomu, jak fungují integrované obvody – paměti a mikroprocesory, které tyto obrazovky oživují – bude věnováno poslední Výfučení v tomto školním roce. Klíčem k pochopení všeho jsou právě polovodiče – úžasné materiály, jejichž vlastností se naplno začalo využívat ve druhé polovině dvacátého století. Základem elektroniky se tehdy stal tranzistor, za který jeho vynálezce v roce 1956 obdržel Nobelovu cenu.⁴ Jeho hlavní výhodou jsou kompaktní rozměry, neboť na jednotku plochy jich dokážeme naskládat velké množství. V dnešní době mikroprocesory a paměti nejvýkonnějších počítačů i chytrých telefonů obsahují několik miliard těchto revolučních součástek.

Téměř stejně důležitým vynálezem byla LED dioda, která najde uplatnění nejen jako zdroj osvětlení, ale používá se také u některých typů displejů. I ona si prošla miniaturizací, takže například ve špičkových chytrých telefonech najdeme skutečně velké množství LED diod na ploše jednoho centimetru čtverečního. I zde byla udělena Nobelova cena, a to v roce 2014 za vynález modré LED diody.⁵

Na následujících řádcích se tak pokusíme vyložit základní principy fungování pozoruhodných materiálů, které umožnily vývoj moderní výpočetní techniky. Ukážeme si, jakým způsobem jsou sestaveny nejjednodušší polovodičové součástky, přičemž nezapomeneme zahrnout ani výše zmiňovaný tranzistor a LED diodu.

Vnitřní struktura a princip polovodičů

Nejprve si připomeneme rozdíl mezi vodičem a izolantem. Zatímco ideální vodiče proud vedou, izolanty tuto vlastnost nemají. U všech materiálů také můžeme zavést veličinu zvanou *elektrický*

³A nezapomeňte to napsat. =)

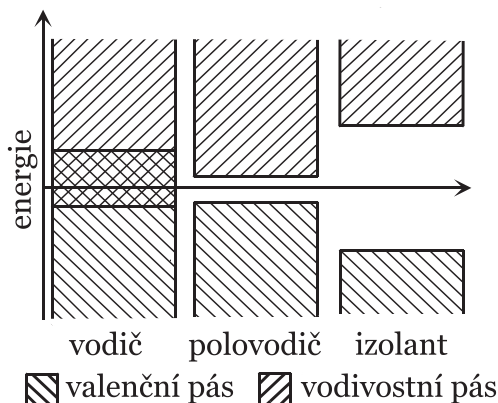
⁴https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1956/

⁵https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2014/

odpor R , který popisuje, jak moc daná látka brání průchodu elektrického proudu. U izolantů bude elektrický odpor obrovský a u vodičů malý. U kovových vodičů také často pozorujeme růst elektrického odporu, když je zahříváme.

Elektrický odpor u polovodičů zpravidla nabývá hodnoty, která není tak vysoká jako u izolantů, nicméně je vyšší než v případě vodičů. Polovodičový odpor vykazuje také jiné teplotní chování – pokud polovodič zahříváme, jeho odpor klesá.

Abychom pochopili, jak polovodiče fungují, podíváme se malinko podrobněji na jejich vnitřní strukturu. Všechna hmota kolem nás se skládá z atomů, které jsou složeny z kladně nabitého jádra a záporně nabitého elektronového obalu. I samotný elektronový obal má další strukturu,⁶ pro naše potřeby se však budeme zabývat pouze elektrony s největší energií, které sídlí v tzv. *valenčním pásu*.⁷ Valenční elektrony jsou k atomu vázané, pokud však tyto elektrony získají více energie, mohou se odtrhnout a přeskočit do tzv. *vodivostního pásu*. Množství energie, jež je k takovému přeskočení potřebné, se liší, přičemž nejmenší je u vodičů, vyšší většinou u polovodičů a nejvyšší u izolantů, viz obrázek 1.



Obr. 1: Znázornění tří různých případů, které běžně nastávají pro tři druhy materiálů – vodiče, polovodiče a izolanty. Zatímco u vodičů má část vázaných elektronů vždy dostatečnou energii k tomu se podílet i na vodivosti, u izolantů tomu tak není a energetická bariéra, kterou by musely překonat, je velká. Polovodiče jsou na rozhraní a potřebná energie je pro vázané elektrony dosažitelná běžnými procesy.

Jako příklad typického polovodiče nám nyní poslouží křemík. Jeden jeho atom má celkem čtrnáct elektronů, z nichž čtyři jsou valenční. Polovodič ale netvoří jen jediný atom, nýbrž jejich vhodné uspořádání. V případě křemíku se jedná o pravidelnou krystalickou mřížku, kde každý atom sdílí všechny své valenční elektrony s dalšími čtyřmi atomy. Valenční vrstva je proto zaplněna osmi sdílenými elektrony.

⁶Podrobněji se o ní můžete dočíst v loňském Výfuctení „Návštěva do mikrosvěta atomů a elektronů“ na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r6/vyfucteni/vyfucteni_3.pdf.

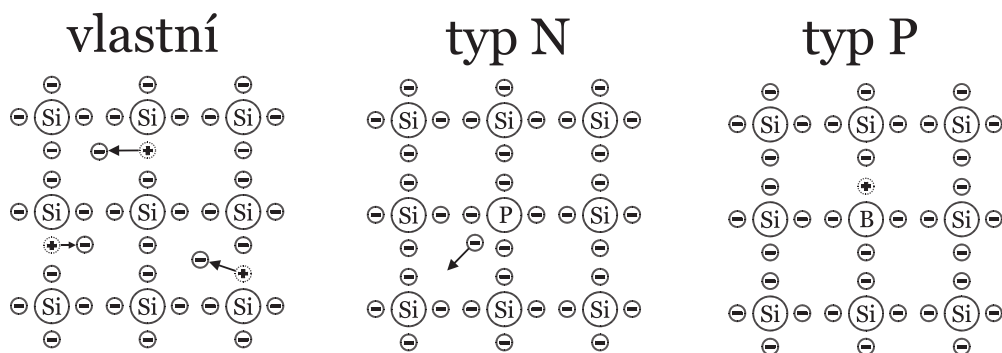
⁷Energetický pás se vytvoří tehdy, pokud se k sobě atomy přiblíží natolik, že se atomární orbitály (ty si můžeme představit jako jakési domečky pro elektrony) začnou překrývat. Vlivem Pauliho vylučovacího principu pak dojde k přeuspořádání energetických hladin a vytvoření energetického pásu (což si můžeme představit tak, že všechny ty elektrony nemusí bydlet v jednom malém domečku, ale postaví si velký panelák s mnoha byty).

Při nižších teplotách zůstávají tyto elektrony na svých místech, a krystal křemíku tedy neobsahuje žádné volné elektrony. Elektrický proud však není nic jiného než pohyb elektronů. V krystalu křemíku se nenacházejí žádné elektrony, které by se mohly hýbat, a proto se chová jako izolant. Pokud mu však dodáme energii, např. tím, že jej zahřejeme (pro většinu polovodičů je dostatečná už i pokojová teplota), mohou se některé elektrony uvolnit. Tyto elektrony se pak mohou stát nositeli elektrického náboje, tj. umožňují v tomto krystalu vést elektrický proud. Logicky platí, že čím více energie dodáme, tím více volných elektronů získáme a tím menší hodnoty nabude elektrický odpor.

Uvolněné elektrony však po sobě zanechávají prázdná místa, která se chovají jako kladně nabitě částice a nazývají se *díry*. Proces, při kterém vznikne pár elektron–díra,⁸ se jmenuje *generace*. *Volný elektron* se nějakou dobu může volně pohybovat v krystalu, ale jen do té doby, než spadne do nějaké (jiné) díry po dalším elektronu. Volný elektron a díra tak zaniká, čemuž se říká *rekombinace*.

Co se stane, pokud takovýto polovodič připojíme ke zdroji elektrického napětí? Záporně nabitě volné elektrony se samozřejmě začnou okamžitě pohybovat směrem ke kladnému pólu zdroje. Pokud po cestě krystalickou mřížkou narazí na díru, spadnou do ní a spolu zaniknou. Poněvadž ale generace a rekombinace jsou do jisté míry náhodné procesy, může pár elektron–díra opakovaně vznikat a zanikat na mnoha místech v krystalu. Díky tomu dochází i ke zdánlivému pohybu děr k zápornému pólu. Vedení proudu v křemíkovém polovodiči tak probíhá odlišným způsobem než u vodičů.⁹

Výše popsaných mechanismus se označuje jako *vlastní vodivost*.



Obr. 2: Vlastní vodivost je spojena se vznikem párů elektron–díra, zatímco příměsi jiných prvků mohou způsobit přebytek nebo nedostatek elektronů.

Příměsové polovodiče

Dalším typem vodivosti je *vodivost příměsová*, kdy např. v křemíkovém krystalu nahradíme některé atomy jiným prvkem s odlišným počtem elektronů ve valenční vrstvě.

⁸Rozmyslete si, že nikdy nemůže vzniknout jen volný elektron nebo jen díra.

⁹U vodičů jsou nositeli náboje pouze elektrony.

Pokud použijeme například fosfor s pěti valenčními elektrony, účastní se čtyři elektrony vazeb s okolními křemíky. Pátý elektron se žádné vazby neúčastní a bude na svém místě velmi slabě vázaný. K uvolnění tohoto elektronu je potřeba ještě méně energie než k vytvoření páru elektron–díra, proto budou při vzniku elektrického proudu elektrony převažovat. Hovoříme zde o *elektronové vodivosti* způsobené zápornými (negativními) nositeli náboje – elektrony. Látky s touto vodivostí nazýváme polovodiče *typu N*.

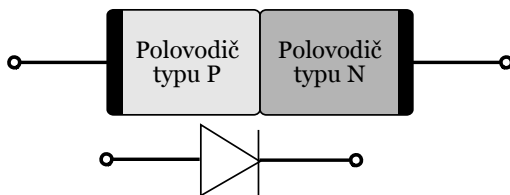
Ve druhém případě, kdy při vedení elektrického proudu hrají hlavní roli díry, vyměníme některé atomy křemíku např. za atomy bóru. Bór má ve valenční vrstvě pouze tři elektrony, přičemž všechny vytvoří s okolními křemíkovými elektrony vazbu. Na místě čtvrtého elektronu zůstane prázdné místo – díra, odtud hovoříme o *vodivosti děrové* způsobené kladnými (pozitivními) nositeli náboje. Takové polovodiče se označují jako polovodiče *typu P*.

PN přechod Polovodiče typu P a N je možné spojit. Dostaneme tak jednu oblast s přebytkem elektronů a druhou s přebytkem děr. Rozhraní oblastí se nazývá PN přechod a dochází zde k rekombinaci „nadbytečných“ elektronů a děr. Bez volných nositelů náboje se PN přechod chová jako izolant.

Pokud k polovodiči typu P připojíme záporný pól zdroje napětí a k polovodiči typu N pól kladný, budou díry v polovodiči typu P tlačeny od PN přechodu směrem k zápornému pólu. Podobně elektrony v polovodiči typu N se budou pohybovat od PN přechodu ke kladně nabitému pólu. Oblast bez volných nositelů náboje se tak zvětší a po ustálení obvodem nebude procházet proud.

V opačném případě připojíme k polovodiči typu P kladný pól zdroje napětí a k polovodiči typu N záporný pól. Díry v polovodiči typu P i elektrony v polovodiči typu N tak budou tlačeny směrem k PN přechodu a budou postupně zmenšovat oblast bez volných nábojů. Tímto mechanismem nastane pokles elektrického odporu a elektrony následně začnou přecházet přes PN přechod směrem ke kladnému pólu a po ustálení poteče takovýmto obvodem elektrický proud. Ve zkratce, PN přechod propouští elektrický proud jen jedním směrem.

Pokud PN přechod chceme zapojit do obvodu, hledáme součástku nazývanou se *polovodičová dioda*.



Obr. 3: PN přechod jako spojení polovodičů různých typů vodivosti. Dole je schematické znázornění polovodičové diody, pro níž je propustný směr zleva doprava.

Využití PN přechodu

Usměrnění proudu Na předchozích řádcích jsme si řekli pár slov o tom, co se děje v diodě (či PN přechodu) v případě, kdy jej připojíme ke zdroji napětí, respektive proudu. Pokud diodou po zapojení do obvodu proud teče, říkáme, že je zapojena v *propustném směru*. Když ji

zapojíme naopak a proud diodou nepoteče, mluvíme o zapojení v *závěrném směru*. Tento jev se využívá všude tam, kde je potřeba, aby elektrický proud procházel pouze jedním směrem.¹⁰

Dioda a světlo V části, kde jsme si povídali o vnitřní struktuře polovodičů, jsme psali o tom, že ke vzniku páru elektron–díra musíme polovodiči dodat energii například tím, že jej zahřejeme. To však není jediný způsob, poněvadž potřebnou energii lze dodávat i v podobě světla, respektive fotonů. Toho se využívá například u fotovoltaiických článků a nejrůznějších fotodetektorů.

K přesně opačnému jevu dochází u LED diod,¹¹ kdy při vhodně zvoleném napětí dochází na PN přechodu k zániku páru elektron–díra a zároveň dojde k vyzáření světla – fotonu o určité energii.¹² Vyzářená energie je dána použitými materiály a je určující pro barvu, kterou bude LED dioda svítit.

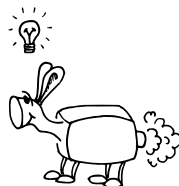
Revoluční tranzistor Nakonec si povíme pár slov o tranzistoru – součástce, která se i v množství několika miliard kusů nachází v běžném integrovaném obvodu. Tranzistor je tvořen dvojicí PN přechodů za sebou. Vzniká tak přechod typu NPN, případně PNP. Tyto součástky se využívají jako spínače, či zesilovače¹³ a jejich různým skládáním za sebou lze vytvořit obvody, které mohou provádět matematické logické operace. Odtud už není příliš dlouhá cesta k mikropočítačům, které se dnes nacházejí v každém chytřejším zařízení.

Viktor Materna

Radka Štefaníková
radka@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Na prášky

5 bodů; průměr 4,57; řešilo 7 studentů

Tomáš je nemocný a dostal od lékaře čistou účinnou látkou ve formě prášku, ze kterého si má připravit kapky s maximální koncentrací $15 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$. Tomáš si kapky připravuje tak, že vezme 5 g prášku a rozpustí ho ve 100 ml vody. Následně polovinu roztoku odlijí a zbytek dopustí čistou vodou. V dalším kroku odlijí $3/4$ roztoku a roztok dopustí vodou do původního množství. Ale protože má pocit, že už jsou kapky moc naředěné, přisype ještě 1 g prášku, odlijí 20 % roztoku a naposledy naředí vodou. Jakou koncentraci má výsledný roztok? Dodrží Tomáš maximální koncentraci předepsanou lékařem?

¹⁰V zásuvkách totiž máme pouze proud střídavý, jehož směr se v čase mění! Všechny naše digitální přístroje však pracují na proud stejnosměrný.

¹¹LED – light-emitting diode, neboli elektroluminiscenční dioda, dioda, která vyzařuje světlo.

¹²Podrobněji se o tomto jevu můžete dočíst v jednom z minulých Výfuctení „Fotoelektrický jev“ na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf.

¹³Přesněji nejde o zesilovače proudu, ale o zesilovače změny proudu. Tranzistor umožňuje vzájemně propojit dva obvody tak, že malá změna v proudu jednoho obvodu řídí násobně větší změnu v mnohem větším proudu obvodu jiného.

U úlohy, která se skládá z několika kroků, je vždy nejjednodušší postup daný příklad počítat postupně a pomocí průběžných výsledků dojít k tomu správnému. Proto si celý Tomův proces chystání léků rozdělíme na části a přidáváním či ubíráním vody a prášků se dopočítáme ke koncentraci, kterou měly kapky na konci.

Po prvním rozmíchávání, tedy po přidání 5 g léku do 100 ml vody, byla koncentrace, vyjádřená jako součin hmotnosti prášku a objemu vody, $5 \text{ g} \cdot 100 \text{ ml}^{-1}$. Zatím je jednodušší počítat v těchto „jednotkách“, až na konci si hodnotu převedeme na $\text{g} \cdot \text{l}^{-1}$, abychom ji mohli srovnat s maximální koncentrací, kterou léky mohou mít.

Další krok, který Tom udělal, je prosté odlítí půlky roztoku. Koncentrace roztoku se tehdy nezměnila, protože kvůli pečlivému zamíchání byla koncentrace v jeho celém objemu stejná. Nicméně celkové množství účinné látky a vody se změnilo. Po prvním odlítí obsahoval roztok 2,5 g účinné látky (tedy polovinu původního množství) a už jen 50 ml vody. Při dolití do původního množství přidal Tom do roztoku 50 ml čisté vody, a koncentrace je tedy $2,5 \text{ g} \cdot 100 \text{ ml}^{-1}$. Stejně musíme postupovat i při dalším odlití a přilití. Při odlití $3/4$ účinné látky a vody a následném přidání vody zůstane v roztoku 100 ml vody, ale už jen čtvrtina z posledního množství účinné látky, tedy 0,625 g. Proto dostaneme jen čtvrtinovou koncentraci, tedy $0,625 \text{ g} \cdot 100 \text{ ml}^{-1}$. Dále Tom koncentraci naopak zvýšil přidáním gramu léku na koncentraci $1,625 \text{ g} \cdot 100 \text{ ml}^{-1}$. V posledním kroku zbylo pouze 80 % účinné látky, tedy $0,8 \cdot 1,625 \text{ g} = 1,3 \text{ g}$.

Tomovy kapky měly koncentraci $1,3 \text{ g} \cdot 100 \text{ ml}^{-1}$, což je po převodu $13 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$. Maximální hodnota koncentrace, na kterou si mohl Tomáš naředit kapky, byla $15 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$. To znamená, že Tomáš dodrží maximální koncentraci předepsanou lékařem.

Karolína Letochová

Úloha IV.2 ... Káji stan

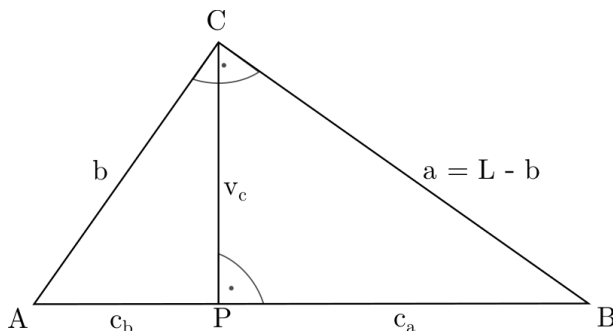
5 bodů; průměr 4,74; řešilo 38 studentů

Kája si chtěla postavit jednoduchý stan s trojúhelníkovým vchodem, pro který zatluče do země dva kolíky na sousedních rozích plachty a mezi ně kůl, na který plachtu vyzvedne. Zapomněla si doma metr, ale i přes to chtěla svůj stan postavit dokonale přesně. Proto jí nezbylo než měřit vše v pídích.¹⁴ Do země kolmo zabodla kůl o výšce $h = 12$ pídí a zatloukla první kolík ve vzdálenosti $c_b = 9$ pídí od kůlu po zemi na jednu stranu. V jaké vzdálenosti c_a od kůlu (v pídích) musí Kája zatlouci druhý kolík na opačné straně, aby se plachta, která má délku strany $L = 35$ pídí, mezi kolíky na vzpřímeném kůlu napjala?

Nejprve si, jak při geometrických úlohách bývá zvykem, načrtneme náskres hledané situace napjatého stanu (vizte obrázek 4). Pro větší přehlednost výšku kůlu h přeznačíme na výšku trojúhelníku nad stranou c , tj. v_c .

Dva kolíky si představme jako body A, B, a kůl mezi nimi považujeme za úsečku PC, kde bod P (neboli pata výšky) leží na úsečce AB, a bod C je třetím vrcholem trojúhelníku ABC. Úsečka PC je tedy výška na stranu c a dělí trojúhelník na dva menší pravoúhlé trojúhelníky. První z nich je trojúhelník APC, kde víme, že strana $|AP| = c_b = 9$ pídí a strana $|PC| = v_c =$

¹⁴Píď je stará jednotka odvozená od vzdálenosti mezi konci malíčku a palce na roztažené ruce. Právě odměřování vzdálenosti pomocí „chůze“ ruky do strany na malíčku a palce se říká „pídění“.



Obr. 4: Vchod do Káji stanu

= 12 pídí. Délku $|AC| = b$ neznáme, budeme ji ale potřebovat pro pozdější výpočty, a proto ji spočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$b = \sqrt{c_b^2 + v_c^2} = 15 \text{ pídí}.$$

Druhý z nich je trojúhelník BCP, u kterého známe stranu $|PC| = v_c = 12$ pídí, $|BC| = a$ sice neznáme, ale ze zadání víme, že délka strany plachty tvořící stan je $L = 35$ pídí. Odečtením a od L zjistíme, že délka strany $|BC| = a = 20$ pídí. Konečně tedy známe vše potřebné pro to, abychom mohli vypočítat stranu PB, což je zároveň námi hledaný úsek c_a . Pro výpočet opět použijeme Pythagorovu větu:

$$c_a = \sqrt{a^2 - v_c^2}.$$

Poté, co dosadíme do vzorce, zjistíme, že délka úseku $|PB| = c_a = 16$ pídí.

Marek Božon

marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Oktávia ide stovkou

6 bodů; průměr 5,44; řešilo 27 studentů

Ve vytrvalostním automobilovém závodě se závodníci Pepa a Lukáš předhánějí na posledních několika kilometrech cílové rovinky. Pepa věří, že má vítězství v kapse, a proto jede jen rychlostí $v_P = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. I když ho Lukáš předjíždí rychlostí v_L o $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ větší, Pepa nepřidává plyn a do cíle je pevně rozhodnut dojet stálou rychlostí. A opravdu! Když je Lukáš 1 km před Pepou, selhává mu motor a Lukáš tak rovnoměrně zpomaluje celou bolestnou 1 min. Takto Lukáš zpomalí až na nejmenší rychlost v , při které mu však motor opět naskočí a on náhle se stejně velkým zrychlením opět zrychluje až na svou původní rychlost v_L . Právě když dosáhne této rychlosti, přijíždí do cíle, a to právě ve stejný okamžik jako Pepa, který po celou dobu zachovával chladnou hlavu. Je to sice remíza pro Pepu, ale velké štěstí pro Lukáše! Na jakou nejmenší rychlost Lukáš zpomalil kvůli selhání motoru?

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co bychom k řešení úlohy mohli využít. Pravděpodobně budeme muset získat nějakou rovnici zahrnující hledanou rychlost v , kterou z ní následně vyjádříme.



Oba závodníci jedou po stejné dráze s totožnou délkou, dáme proto do rovnosti dráhy, které oba ujeli. Vyplatí se popsat pohyby obou závodníků zvlášť a následně je porovnat.

Na situaci se podíváme ve chvíli, kdy Lukáš začne zpomalovat. Velikost jeho zpomalení si označíme a . Abychom mohli provést obecné řešení, označíme si čas, po který Lukášovo auto zpomaluje, jako $t = 1$ min. Pepu prozatím sledovat nebudeme. Spočítáme si pomocí vzorce pro zrychlený pohyb,¹⁵ jakou dráhu s_1 Lukáš urazí za dobu zpomalování:

$$s_1 = v_L t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Také si určíme zpomalení (které je ve fyzikálním smyslu vlastně záporné zrychlení) a . Vypočítáme ho jednoduše jako změnu rychlosti za určitý čas.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_L - v}{t}.$$

Lukáš zpomalil na rychlost v a opět ji zvyšuje se stejně velkým zrychlením jako předchozí zpomalení, tedy a . Spočítáme čas, po který bude zrychlovat (mělo by to logicky trvat stejně dlouho, jelikož změna rychlosti je stejná a zrychlení také, ale lepší je přesvědčit se i analyticky):

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_L - v}{(v_L - v)/t} = t.$$

Zrychlovat bude tedy opět stejný čas t . Nyní můžeme vypočítat dráhu s_2 , kterou urazí Lukáš, než dosáhne konečné rychlosti v_L :

$$s_2 = vt + \frac{1}{2} a t^2.$$

A celková dráha s_L , kterou urazil, je součet s_1 a s_2 :

$$s_L = s_1 + s_2 = v_L t - \frac{1}{2} a t^2 + vt + \frac{1}{2} a t^2 = v_L t + vt.$$

Celkový čas t_c , po který se Lukáš pohyboval, je součet času, během kterého zpomaloval a času, během kterého zrychloval, tedy $t_c = t + t = 2t$.

Tímto jsme Lukášův pohyb dopočítali, ale co Pepa? Ten zachoval chladnou hlavu a celou dobu se pohyboval rovnoměrným přímočarým pohybem o rychlosti v_P . Ujel tedy celkovou dráhu s_P :

$$s_P = v_P t_c = 2v_P t.$$

Nyní můžeme dát obě dráhy do rovnosti, ale musíme k dráze Lukáše přičíst $d = 1$ km, protože začínal o kilometr dále, takže ujel méně:

$$\begin{aligned} s_P &= s_L + d, \\ 2v_P t &= v_L t + vt + d. \end{aligned}$$

¹⁵Pokud nejste se zrychleným pohybem dostatečně seznámeni, můžete si projít Výfučení 1. série 4. ročníku na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r4/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf.

Odtud po vyjádření rychlosti v získáme vzorec, do kterého již dosadíme známé hodnoty (avšak pozor, v základních jednotkách):

$$\begin{aligned} v &= \frac{2v_{\text{P}}t - v_{\text{L}}t - d}{t} \\ &= \frac{2 \cdot (100/3,6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 60 \text{ s} - (130/3,6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 60 \text{ s} - 1\,000 \text{ m}}{60 \text{ s}} \\ &\doteq 2,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \end{aligned}$$

Lukáš mohl zpomalit na nejmenší rychlost $v \doteq 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Poznámky k došlým řešením

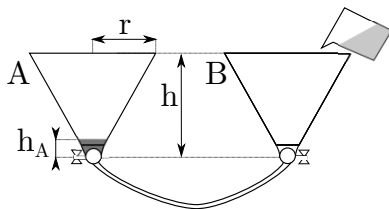
Valná většina z vás se dopracovala ke správnému výsledku, za každé takové řešení jsme dali plný počet bodů. Nejvíce se vyskytovalo řešení pomocí určení průměrné rychlosti Lukášova zpomaleného pohybu a následný výpočet minimální rychlosti ze znalosti, že u zrychleného pohybu se průměrná rychlost rovná průměru maximální a minimální rychlosti. Tento způsob samozřejmě dodá správný výsledek, ale dejte si pozor, průměrování rychlostí může být velmi často ošidné, protože ne vždy platí, že průměrnou rychlost můžeme spočítat jako prostý průměr rychlostí. Kdyby například jezdec na nějaký čas zastavil, již bychom pro výpočet průměrné rychlosti museli postupovat jinak.

Robert Gemrot

Úloha IV.4 ... A co takhle rtuť

6 bodů; průměr 3,85; řešilo 34 studentů

Danovi zbyly dva velké nevyužité trychtýře A a B ve tvaru kuželu, oba s poloměrem podstavy $r = 12,5 \text{ cm}$ a výškou $h = 15 \text{ cm}$. Danovi také zbylo hodně rtuti od posledního pokusu o výrobu tlakoměru a rozhodl se trochu experimentovat s hydrostatickým tlakem. Trychtýře upevnil vedle sebe do stejné výšky, ústími dolů, přičemž je spojil tenkou hadičkou s uzavřenými ventily na koncích. Do trychtýře A potom začal nalévat rtuť o hustotě $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, dokud její hladina nebyla $h_{\text{A}} = 1 \text{ cm}$ nad ústím. Jaký objem vody V_{B} o hustotě $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ musí Dan nalít do trychtýře B, aby po ustálení a otevření ventilů na hadičce nedošlo k jakékoli změně výšky hladin v trychtýřích? Objem, o který je kužel zkrácen na svém ústí, a objem hadičky zanedbejte.



Hledáme objem kuželu tvořeného vodou, u kterého neznáme výšku h_B , ani poloměr podstavy r' . Tyto veličiny na sobě však závisí, a proto nám stačí si vypočítat např. pouze výšku a poloměr z ní dopočítat.

Jak ale výšku zjistíme? Vyjdeme z jednoduché, ale zato účinné úvahy – pokud má zůstat soustava dvou spojených trychtýřů, částečně naplněných kapalinami v klidu, musí být hydrostatický tlak při ústí hadičky pro obě kapaliny stejný. Tato úvaha je vlastně v jistém smyslu obdobou Newtonova prvního zákona.

Pro určení hydrostatického tlaku¹⁶ použijeme vztah, který nám říká, že jeho velikost je součinem hloubky od hladiny kapaliny, hustoty kapaliny a tíhového zrychlení. K výpočtu výšky hladiny vody nad ústím nám pak stačí znát jen hustoty obou kapalin, které jsou uvedeny v zadání úlohy. Dostaneme tedy tento vzorec:

$$h_A \varrho_{Hg} g = h_B \varrho g.$$

Z výchozího vztahu můžeme vykrátit tíhové zrychlení g a následně z něj vyjádříme výšku hladiny vody nad ústím h_B :

$$\begin{aligned} h_B \varrho &= h_A \varrho_{Hg}, \\ h_B &= h_A \frac{\varrho_{Hg}}{\varrho}. \end{aligned}$$

Ještě musíme spočítat poloměr podstavy kuželu r' , k čemuž použijeme nám již známou výšku h_B . Víme totiž, že trychtýř ve tvaru kužele je podobný kuželu vody, takže je to jeho zmenšenina. V podstatě můžeme říci, že všechny rozměry kužele vody jsou několikrát menší, než odpovídající rozměry trychtýře. Proto platí, že $r/r' = k$, kde k je nějaké číslo (kolikrát má trychtýř větší poloměr než voda) a také $h/h_B = k$. Nyní smíme uplatnit poměrně logickou úvahu, že když se dva výrazy rovnají jednomu výrazu, pak se také ony dva výrazy rovnají sobě navzájem. Matematicky řečeno:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_B} &= \frac{r}{r'}, \\ \frac{h_B}{h} &= \frac{r'}{r}, \\ r' &= \frac{h_B r}{h}. \end{aligned}$$

Výšku kužele vody ale nemáme vyjádřenou pomocí nám známých hodnot, proto použijeme výsledek předchozího výpočtu a dosadíme za h_B a složený zlomek upravíme:

$$r' = \frac{h_A \varrho_{Hg} r}{\varrho h}.$$

Teď už víme vše, co k výpočtu potřebujeme. Zbývá tedy dosadit známé hodnoty do vzorce pro výpočet objemu kužele:

$$V_B = \frac{1}{3} \pi r'^2 h_B = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h_A \varrho_{Hg} r}{\varrho h} \right)^2 \frac{h_A \varrho_{Hg}}{\varrho}.$$

¹⁶Více o hydrostatickém tlaku najdete ve Výfuctení 2. série 3. ročníku na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf.

Který nakonec ještě zjednodušíme:

$$V_B = \frac{\pi h_A^3}{\varrho_{\text{Hg}}^3 r^2} 3 \varrho^3 h^2.$$

Tím jsme se dostali k obecnému vzorci, do kterého už jen stačí dosadit konkrétní hodnoty uvedené v zadání. Obvykle to provádíme v základních jednotkách, ovšem my to můžeme udělat i v jiných, pokud budou u všech veličin stejné. Hustotu tedy dosadíme v $\text{g}\cdot\text{cm}^3$ a výšky s poloměry v cm. Proto dostaneme výsledek v cm^3 .

$$V_B = \frac{\pi \cdot 1^3 \text{ cm} \cdot 13,6^3 \text{ g}\cdot\text{cm}^3 \cdot 12,5^2 \text{ cm}}{3 \cdot 1^3 \text{ g}\cdot\text{cm}^3 \cdot 15^2 \text{ cm}} \doteq 1\,800 \text{ cm}^3.$$

Dan tak musí do druhého trychtýře nalít vodu o celkovém objemu asi $1\,800 \text{ cm}^3$. Všimněme si, o jak veliké množství se jedná, když je třeba na vyvážení pouze jednoho centimetru výšky rtuti. Tomuto jevu říkáme *hydrostatický paradox(on)* – hydrostatický tlak závisí pouze na svislém sloupci kapaliny nad místem působení a nijak se nezvětší tím, že ho bude obklopotovat větším množstvím kapaliny např. v poloměru kužele. Tohoto paradoxu si všimli lidé už dříve – například Blaise Pascal díky němu dokázal prasknout sud jen přilítím sklenice vody (která ovšem měla díky tenké trubičce velkou výšku).

Viktor Materna

Úloha IV.5 ... Twilight

7 bodů; průměr 5,17; řešilo 18 studentů

Gravitační přitažlivost tělesa popisujeme gravitačním zrychlením, jehož hodnotu můžeme určit z jeho hmotnosti a naší vzdálenosti od tělesa. Když se však na Zemi postavíme na váhu, jí udaný výsledek neovlivňuje jen zrychlení gravitační, ale i tíhové, do něhož je přičten také vliv odstředivého zrychlení způsobeného rotací planety. Nezapomínejme však na vliv ostatních nebeských těles!

- (1) Bez uvažování přitažlivosti Měsíce a Slunce, spočítejte povrchová tíhová zrychlení na pólu a na rovníku Země.
- (2) Jaké bude toto zrychlení na rovníku, pokud ho budeme určovat při zatmění Slunce s oběma tělesy v zenitu (přímo nad hlavou)?¹⁷
- (3) A jak se změní při zatmění Měsíce, kdyby zůstal v zenitu a Slunce se objevilo v nadiru, tj. přímo pod nohama?
- (4) Kolikrát dále by se musel Měsíc vzdálit od Země v předchozím úkolu, aby nám váha, když se na ni na rovníku postavíme, ukazovala stejnou hodnotu, jako za podmínek z prvního úkolu?

- (1) Pro nalezení řešení si musíme uvědomit, jak přesně vypadá gravitační a odstředivé zrychlení na daných místech Země.

Při určování gravitačního zrychlení určitě použijeme Newtonův zákon popisující gravitační sílu F_g , kterou na sebe vzájemně působí dvě tělesa s hmotnostmi m_1 a m_2 ve vzdálenosti r .

¹⁷Uvažujte zde i v dalších úkolech tabulkové střední vzdálenosti mezi tělesy.

V něm značí $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ gravitační konstantu.¹⁸ Zákon ve tvaru platícím pro velikost výsledné síly vypadá takto:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

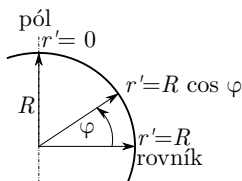
Odstředivou sílu F_{od} , která popisuje sílu působící na těleso rotující se vzdáleností r' od osy otáčení rychlostí v , resp. úhlovou rychlostí ω (neboli o jaký úhel se těleso otočí za čas) a mající hmotnost m , vyjádříme takto:

$$F_{\text{od}} = \frac{mv^2}{r'} = m\omega^2 r'.$$

Pomocí dosazení do těchto dvou vztahů můžeme vyjádřit tíhové zrychlení g_1 . To provedeme tak, aby m_1 , resp. m , byla hmotnost zrychleného tělesa a m_2 hmotnost planety Země. Vzdálenost r ve vzorci gravitační síly doplníme za poloměr Země R . U odstředivého zrychlení si však musíme dát pozor na to, že r' ve vyjádření odstředivé síly značí vzdálenost *od osy otáčení*, která závisí na naší zeměpisné šířce φ – člověk na rovníku se otáčí rychleji než člověk na pólu, který se neotáčí vůbec.

$$g_1 = \frac{F_g - F_{\text{od}}}{m_1} = \frac{Gm_2}{R^2} - \omega^2 R \cos \varphi$$

Zde je kosinus (cos) jedna z tzv. goniometrických funkcí, se kterými jste se možná ještě nesetkali.¹⁹ Pro výpočet však stačí vědět, že pro $\varphi = 0^\circ$ (na rovníku) vychází $\cos \varphi$ jako 1 a pro $\varphi = 90^\circ$ (na pólech) vychází jako 0. Toto dává fyzikální smysl, jelikož na rovníku působí odstředivá síla nejvíce a na pólu naopak vůbec. K výpočtu vlastně tyto funkce ani nepotřebujeme znát, jen na rovníku sílu započítáme celou a na pólu vůbec. V obou těchto speciálních případech tedy není nutné kosinus ani psát. My jsme jej však v řešení pro úplnost zmínili.



Následně potřebujeme zjistit úhlovou rychlost ω . Tu vypočítáme jako podíl plného úhlu²⁰ 2π a periody úhlové rotace Země $24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$:

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400 \text{ s}} \doteq 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

¹⁸V učebnicích se tato konstanta často označuje pomocí κ (malá řecká kappa), avšak G se používá častěji ve skutečné fyzice.

¹⁹Pro úvod do goniometrických funkcí doporučujeme přečíst Výfuctení 4. série 2. ročníku, dostupné na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_4.pdf.

²⁰Pozn.: zde musíme úhel vyjadřovat v tzv. radiánech, což je bezrozměrná jednotka, pro kterou platí $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$. Více o radiánech najdete ve Výfuctení 5. ročníku, 6. série na adrese http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r5/vyfucteni/vyfucteni_6.pdf.

Alternativně můžeme počítat s rychlostí, kterou s poloměrem Země R vypočítáme takto:

$$v = \frac{2\pi R}{86\,400\text{ s}} \doteq R \cdot 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Oba tyto způsoby vedou ke stejné výsledné velikosti síly. Z fyzikálních tabulek můžeme dále zjistit poloměr Země $R = 6\,378,1 \text{ km}$ (Zemi považujeme za kouli) a její hmotnost $m_2 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Tím pádem máme veškeré potřebné hodnoty a nyní jen stačí dosadit do vzorce pro pól (g_p) a rovník (g_r):

$$\begin{aligned} g_p &= G \frac{m_2}{R^2} \\ &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6\,378\,100^2} \text{ m/s}^2 \doteq 9,8049 \text{ m/s}^2 \\ g_r &= G \frac{m_2}{R^2} - \omega^2 R \\ &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6\,378\,100^2} \text{ m/s}^2 - \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} 6\,378\,100 \text{ m/s}^2 \\ &\doteq 9,7712 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

- (2) Zde použijeme předchozí výpočet, jen ho trochu upravíme, doplníme do něj hodnoty nejdříve pro Slunce a pak i pro Měsíc. Gravitační vlivy obou těles v nadhlavníku člověka nadlehčují, a proto jejich gravitační síly musíme odečíst od síly, kterou jsme vypočítali minule. Gravitační síly obou těles vyjádříme tedy takto:

$$\begin{aligned} F_m &= G \frac{m_1 m_m}{(r_m)^2}, \\ F_s &= G \frac{m_1 m_s}{(r_s)^2}. \end{aligned}$$

Pokud budeme chtít vypočítat zrychlení, jednoduše vzorce výše vydělíme hmotností zrychleného tělesa m_1 :

$$\begin{aligned} g_m &= G \frac{m_m}{(r_m)^2}, \\ g_s &= G \frac{m_s}{(r_s)^2}. \end{aligned}$$

Zde index „m“ značí Měsíc a index „s“ Slunce. Rychlým pohledem do tabulek opět nalezneme potřebné hodnoty, a to hmotnost $m_m = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ a vzdálenost $r_m = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ Měsíce od Země, nápodobně i údaje spojené se Sluncem, tedy $m_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $r_s = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Samotný poloměr Země a jeho vliv je vůči použitým vzdálenostem zanedbatelný. Nyní jen stačí odečíst od minulého zrychlení $(F_m + F_s)/m_1$, dostaneme tak zrychlení, které nás nadlehčuje. Pro hledané zrychlení g_2 získáme takovýto vzorec:

$$\begin{aligned} g_2 &= g_r - \frac{F_m + F_s}{m_1} = g_r - (g_m + g_s) = g_r - G \left(\frac{m_m}{r_m^2} + \frac{m_s}{r_s^2} \right) \\ &= 9,7712 \text{ m/s}^2 - (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}) \left(\frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} + \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \right) \\ &\doteq 9,7652 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

- (3) U této podúlohy bude postup stejný jako výše, jen nebudeme zrychlení od Slunce odčítat, nýbrž přičítat, jelikož působí ve stejném směru jako to zemské. Pro výsledné zrychlení g_3 dostaneme:

$$\begin{aligned} g_3 &= g_r - G \left(\frac{m_m}{r_m^2} - \frac{m_s}{r_s^2} \right) \\ &= 9,7712 \text{ m/s}^2 - (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}) \left(\frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} - \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \right) \\ &\doteq 9,7771 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

- (4) Protože chceme, aby bylo zrychlení stejné jako v prvním úkolu, musí se gravitační síly Měsíce a Slunce vyrovnat (resp. výslednice těchto dvou sil musí být nulová). Nutně proto platí $F_m = F_s$, což vyplývá z Newtonova prvního zákona. Zapišeme si tedy rovnici, kde srovnáme tyto dvě síly, které jsme si již dříve vyjádřili. Předtím v nich však byly všechny veličiny známe konstanty, nyní považujeme vzdálenost Měsíce od Země za neznámou. Dostáváme tedy jednu rovnici o jedné neznámé r_m , kterou umíme vyřešit. Jelikož r_m má značit skutečnou vzdálenost Měsíce od Země, označíme si hypotetickou vzdálenost jiným jménem r_M . Nyní už ji můžeme řešit, abychom zjistili, v jaké vzdálenosti se Měsíc od Země musí nacházet:

$$\begin{aligned} F_s &= F_m \\ G \frac{m_1 m_s}{r_s^2} &= G \frac{m_1 m_m}{r_M^2} \\ r_M^2 &= r_s^2 \frac{m_1 m_m}{m_1 m_s} \\ r_M &= r_s \sqrt{\frac{m_m}{m_s}} = (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}) \sqrt{\frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = 2,88 \cdot 10^7 \text{ m}. \end{aligned}$$

Teď chceme zjistit, kolikrát musí být R_M větší než R_m . Rozmyslete si, proč tento poměr n vypočteme takto:

$$n = \frac{R_M}{R_m} = \frac{2,88 \cdot 10^7 \text{ m}}{3,84 \cdot 10^8 \text{ m}} \doteq 0,075.$$

To znamená, že by se Měsíc měl postavit asi 0,075krát dále, neboli $1/n \approx 13$ krát blíže.

Miroslav Jarý

Jason@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Rozmrzni!

7 bodů; průměr 6,06; řešilo 18 studentů

Jak jistě víte, k roztání ledu je potřeba určité množství tepla, které je závislé na jeho hmotnosti. Změřte měrné skupenské teplo tání ledu pomocí rychlovarné konvice, a to tak, že nejprve ohřátím daného množství vody určité její výkon, a poté ohřátím vody s ledem určíte měrné skupenské teplo tání ledu. Pokud nemáte rychlovarnou konvici, nezoufejte! Měření můžete provést i ohřátím vody na sporáku, avšak musíte si dát pozor, abyste neměnili jeho výkon během jednotlivých měření. Nezapomeňte pokus několikrát opakovat a uvážit chybu měření. Na závěr se zkuste zamyslet nad jejími příčinami.

Teorie

Při měření výkonu konvice využijeme toho, že známe množství tepla, které musí voda o počáteční teplotě t_0 přijmout, aby se začala vařit. Toto teplo vypočítáme $Q = mc(t_v - t_0)$, kde t_v značí teplotu varu, pro vodu je to 100°C . Výkon definujeme jako poměr dodané energie za čas τ_1 potřebný k přivedení vody k varu, tedy:

$$P = \frac{mc(t_v - t_0)}{\tau_1},$$

kde uvažujeme měrnou tepelnou kapacitu vody $c = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Při měření měrného skupenského tepla tání ledu l použijeme led o hmotnosti m_l , který necháme předtím chvíli při pokojové teplotě (pro přesnější výsledky můžeme led rozdrtit, abychom zajistili, že se nestane to, že uvnitř ledu bude teplota nižší než 0°C), takže jeho teplotu můžeme považovat za $t_l = 0^\circ\text{C}$ a ne nižší. Poté vložíme led do vody o teplotě t_1 a hmotnosti m_v a vzniklou směs necháme přivést k varu ve varné konvici. Tentokrát je potřeba dodat teplo k roztátí ledu o hmotnosti m_l , teplo k ohřátí vzniklé vody o hmotnosti m_l o $t_v - t_l$ a vody o hmotnosti m_v o $t_v - t_1$. Potřebné teplo tedy je

$$Q = m_l l + m_l c(t_v - t_l) + m_v c(t_v - t_1).$$

Protože výkon konvice považujeme za konstantní, trvá nyní ohřívání směsi delší čas τ_2 .

$$P = \frac{m_l l + m_l c(t_v - t_l) + m_v c(t_v - t_1)}{\tau_2}$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit hledané měrné skupenské teplo tání pomocí výkonu, který jsme změřili v minulém experimentu:

$$l = \frac{P\tau_2 - m_l c(t_v - t_l) - m_v c(t_v - t_1)}{m_l}.$$

Měření

Na začátku jsme museli zjistit výkon konvice. Toto měření probíhalo tak, že jsme do kuchyňské odměrky nalili určitý objem vody a spočítali její hmotnost pomocí vzorce $m = \rho V$, kde hustota vody je přibližně $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Dále jsme teploměrem určili její počáteční teplotu t_0 a nechali vodu vařit v konvici.²¹ Čas jsme měřili stopkami a za okamžik varu jsme považovali automatické vypnutí konvice. Mezi jednotlivými pokusy bylo potřeba nějakou dobu počkat, než konvice vychladne, jinak by bylo měření ovlivněno těmi předchozími. Naměřené hodnoty jsme zapsali do tabulky a vypočítali výkon varné konvice.

Z výsledných pěti hodnot jsme spočítali aritmetický průměr $\bar{P} = 1786,6 \text{ W}$, se kterým budeme dále počítat. Při měření měrného skupenského tepla jsme postupovali obdobně, pouze jsme navíc zvážili led dodaný do vody. Během celého měření bylo třeba postupovat rychle, aby voda či led přijímaly co nejméně tepla od okolí. Výsledné hodnoty jsme zanesli do tabulky 2.

Z vypočtených hodnot vidíme, že ta čtvrtá se od ostatních velmi výrazně liší, tedy nejspíš se bude jednat o nějakou hrubou chybu (například špatné odečtení z měřicích přístrojů), a proto ji do dalších výpočtů nezahrneme a průměr budeme počítat pouze pro zbylé čtyři hodnoty.

²¹Počáteční teplotu vody je potřeba určovat u každého měření zvlášť, protože z kohoutku vytéká voda pokaždé jinak teplá.

Tab. 1: Měření výkonu varné konvice

č. měření	1	2	3	4	5
m/kg	1	0,8	0,6	1	0,75
$t_0/^\circ\text{C}$	14	11	15,5	10	17
τ_1/s	199,8	165,2	121,8	201,4	150,9
P/W	1 799	1 801	1 740	1 868	1 724

Tab. 2: Měření měrného skupenského tepla tání

č. měření	1	2	3	4	5
m_v/kg	1	0,8	0,6	0,5	0,75
m_l/kg	0,03	0,061	0,055	0,055	0,153
$t_1/^\circ\text{C}$	12	12	13	18	15
τ_2/s	218,0	186,8	147,4	128,1	221,8
$l/\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$	303 142	230 073	401 858	628 080	430 173

Spočítáme tedy aritmetický průměr těchto čtyř hodnot $\bar{l} = 341\,311\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$, a poté takzvanou standardní odchylku σ_l , která se počítá tak, že rozdíl každého výsledku od průměru umocníme na druhou, tyto umocněné rozdíly sečteme, vydělíme $n(n-1)$ (kde n je počet měření) a na konec odmocníme. Těm, co znají symboliku sumy, prozradíme, že vzorec vypadá takto:

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{l} - l_i)^2}{n(n-1)}}$$

a náš výsledek činí $\sigma_l = 46\,001\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$. Zapišeme výsledek s odchylkou a nezapomeneme správně zaokrouhlit. Běžně se zaokrouhluje odchylka na dvě platné číslice a průměr na stejný počet desetinných míst, tedy:

$$l = (341 \pm 46)\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Na závěr ještě vypočteme tzv. relativní chybu, která udává, o kolik procent se může skutečná hodnota lišit od našeho výsledku. Je užitečné toto číslo znát, protože lépe popisuje, jak moc přesného výsledku jsme vlastně dosáhli. Absolutní nepřesnost je sice také dobré vědět, ale pokaždé hraje jinou roli. Uvažte sami, že kdybychom například naměřili hodnotu $1\,\text{kJ}$, tak by chyba $\pm 46\,\text{kJ}$ dosahovala 46krát větší hodnoty než výsledek, a nemohli bychom si jím tedy být vůbec jisti. Tuto chybu vypočítáme jako $\delta = \sigma_l/l = 46/341 \doteq 13\,\%$.

Tabulková hodnota měrného skupenského tepla tání ledu je $l = 334\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, což je velmi blízko naší naměřené hodnotě, ale vzhledem k velikosti relativní chyby se to stalo spíše náhodou než přesností našeho měření. Nepřesnosti měření mohou být dány tím, že výkon konvice nemusí být stále stejný nebo automatickým vypnutím konvice dříve či později, než je dosaženo bodu varu. Další podstatnou nepřesností je, že nemůžeme přesně změřit teplotu ledu a musíme ji tedy pouze odhadovat na $0\,^\circ\text{C}$ po dostatečném odstátí.

Kateřina Rosická

kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.C ... Sluneční

7 bodů; průměr 3,67; řešilo 9 studentů

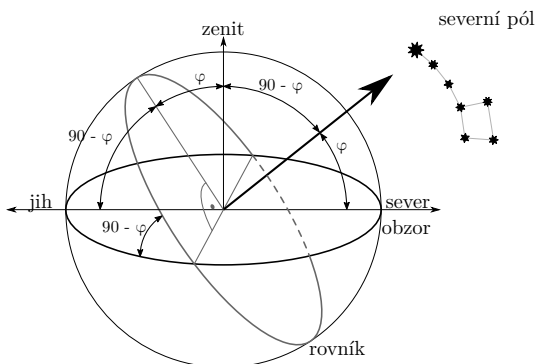
Výfuček si pořídil sextant²² a říkal si, co by tak mohl změřit. Podíval se přesně jižním směrem, kde spatřil Slunce a jeho odraz na vodní hladině. Změřil proto úhel mezi nimi a zjistil, že je přesně 60 stupňů.

- (1) Určete maximální výšku nad obzorem nebeského rovníku, víte-li, že pozoroval z Prahy.
- (2) Určete deklinaci Slunce v době pozorování.
- (3) Víme také, že to bylo v druhé polovině kalendářního roku. Určete datum pozorování z tabulek na internetu.²³
- (4) Nakonec určete rektascenzi Slunce a místní hvězdný čas v době pozorování.
- (5) Pokud by Výfuček pozoroval celý rok, jaký největší úhel Slunce nad obzorem by naměřil?

- (1) Jak je vidět z obrázku 5, největší výšku nad obzorem má rovník přímo nad jihem, a to

$$h = 90 - \varphi,$$

kde φ je zeměpisná šířka místa, odkud pozorujeme. Praha leží na zeměpisné šířce 50 stupňů, maximální výška rovníku nad obzorem je proto 40 stupňů.

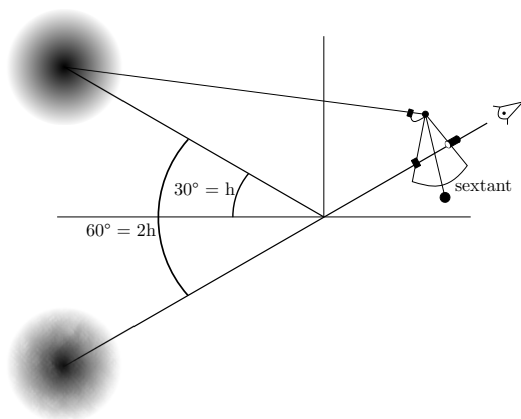


Obr. 5: Nebeský rovník na obzorníkové sféře. Napravo je vyznačen Malý vůz s Polárkou, ke které míří zemská osa.

- (2) Nejdříve určíme, jak vysoko nad obzorem Slunce bylo (obrázek 6). Úhel mezi Sluncem a obzorem je roven jedné polovině úhlu mezi Sluncem a jeho zdánlivým odrazem na vodní hladině (jak je vidno z obrázku), proto zadaný úhel vydělíme dvěma. Slunce je 30 stupňů nad obzorem ve chvíli, kdy je přesně nad jihem, tedy 10 stupňů pod nebeským rovníkem. Úhel sevřený mezi bodem na obloze a nebeským rovníkem je definicí deklinace, která je tedy v daný okamžik $\delta = -10$ stupňů. Je-li bod nad rovníkem, to znamená na severní nebeské polokouli, je jeho deklinace kladná, deklinace rovníku je nula a body pod rovníkem, tedy na jižní nebeské polokouli, mají deklinaci zápornou.
- (3) Podíváme-li se do hvězdářské ročenky, zjistíme, že nejlépe deklinaci -10 stupňů odpovídá pátek 19. října (obr. 7).

²²Sextant je přenosný přístroj pro měření úhlové vzdálenosti dvou objektů.

²³Užitečnou tabulku můžete nalézt na <http://rocenka.observatory.cz/download/hr2018.pdf>



Obr. 6: Výfučkově pozorování Slunce nad obzorem.

- (4) Podle ročenky v pátek 19. října mělo Slunce rektascenzi 13 h 34 min. Ukazovali jsme si, že

$$\vartheta = t + \alpha.$$

Naším úkolem je si uvědomit, že hodinový úhel t pro bod ležící na poledníku (meridiánu) je 0. Poté zjistíme, že

$$\vartheta = \alpha,$$

tedy 13 h 34 min.

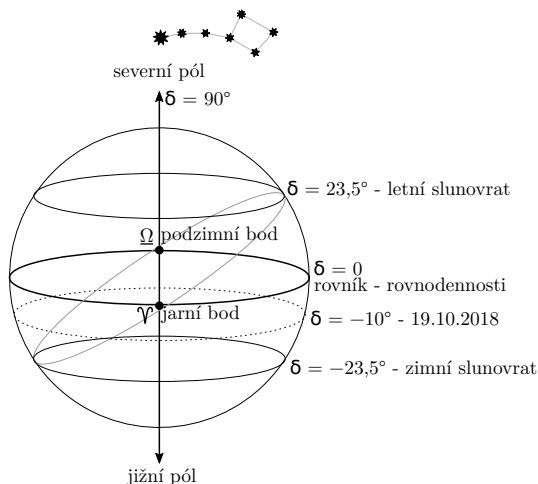
- (5) Slunce v průběhu roku nabírá deklinace od $-23,5$ do $23,5$ stupně. Nejvýše na obloze severní polokoule vystoupá v den letního Slunovratu, když má deklinaci $23,5$ stupně. Okamžik, kdy se na obloze nachází nejvýše, nastává samozřejmě v pravé poledne toho dne. Tuto výšku spočteme jako součet výšky rovníku nad jihem a deklinace. V Praze, s $\varphi = 50$ stupňů, se tato výška rovná $90^\circ - \varphi + 23,5^\circ = 63,5^\circ$ (obr. 8).

Marco Souza de Joode
joode@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků



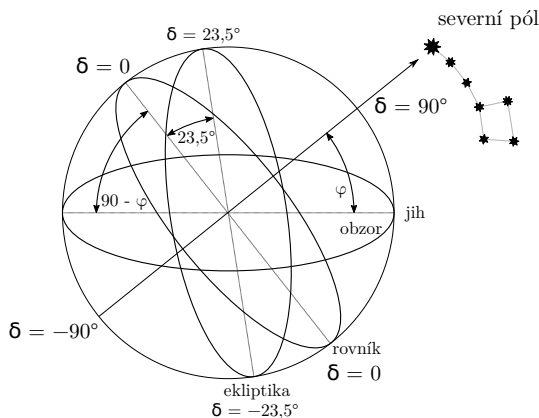
Obr. 7: Meze pohybu Slunce v průběhu roku.

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	170
1. Pavel Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	5	1	6	–	–	–	–	12	85
2. Patrik Rosenberg	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	5	–	1	–	–	–	9	41
3. Daniel Rýpar	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	4	5	–	–	–	–	–	9	26
4. Kateřina Stefanová	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	4	–	–	–	–	–	4	16
5. Jakub Boubertle	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	–	–	–	–	–	–	–	14
6. Marie Hebertová	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	5
7. Václav Prachar	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	4

Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	170
1. Anežka Čechová	G, Mikulov	5	5	6	6	6	6	6	40	152
2. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	5	5	6	6	–	6	–	28	95
3. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	5	6	1	–	–	–	17	85
4. Zuzana Weisová	ZŠ Židlochovice	5	1	–	5	–	–	–	11	40
5. Šimon Dalecký	ZŠ a MŠ Klíč s.r.o. Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	14
6. Martin Ondruška	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	13
7. Barbora Tuháčková	G Františka Křížíka, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	10

Kategorie osmých ročníků



Obr. 8: Moment nejvyšší deklinace. Všimněte si, že v nejvyšším bodě činí skutečně 63,5°.

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	150
1. Pavel Provazník	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	5	–	6	5	7	–	23	129
2. Martin Kysela	G, Český Krumlov	–	5	6	2	7	7	2	29	122
3. Jakub Ježek	G B. Němcové, HK	–	5	3	2	5	6	–	21	118
4. Zuzana Lisztwanová	ZŠ a MŠ Trinec - Staré Město	–	5	6	6	5	4	–	26	111
5. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	5	6	6	5	33	108
6. Jiří Antoňů	G, Špitálská, Praha	–	5	3	3	–	–	–	11	103
7. František Račický	ZŠ Jemnice	–	5	2	4	3	6	3	23	96
8. Dominik Blaha	G, Uherské Hradiště	–	5	6	2	7	–	–	20	78
9. Martin Švanda	Arcibiskupské G, Praha	–	4	6	1	5	6	5	27	76
10. Tomáš Veselý	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	5	6	6	6	7	–	30	63
11. Veronika Nečadová	ZŠ Jemnice	–	5	4	1	1	–	1	12	58
12. Tereza Dvořáková	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	48
13. Martin Haíkl	G Týn nad Vltavou	–	5	6	1	–	–	–	12	45
14. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	5	–	1	–	–	–	6	28
15. Anna Gryčová	ZŠ Husova, Liberec 5	–	5	–	–	–	–	–	5	26
16. Barbora Šišáková	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	–	–	–	–	–	–	–	–	5
17. Jolana Chylíková	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	–	4

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	150
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	7	7	5	36	145
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	–	5	6	6	7	6	6	36	142
3. <i>Filip Brázda</i>	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	6	6	5	6	–	28	111
4.–5. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	–	5	6	2	6	6	–	25	110
4.–5. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	6	–	–	–	17	110
6. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	–	5	6	1	6	–	–	18	89
7. <i>Kateřina Zavadilová</i>	ZŠ Jilovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	86
8. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	–	5	6	2	5	6	–	24	77
9. <i>Ondřej Valášek</i>	G, Nový Bydžov	–	5	6	1	1	5	0	18	73
10. <i>Jan Hyžák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	5	–	5	–	5	–	15	71
11. <i>Adam Mára</i>	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	–	–	–	–	–	–	59
12. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	56
13. <i>Adam Korběl</i>	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	5	–	6	–	–	–	11	55
14. <i>Sára Byšková</i>	ZŠ nám. Jiřího z Poděbrad, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	49
15.–16. <i>Filip Temiak</i>	G, Český Krumlov	–	5	3	1	–	–	–	9	44
15.–16. <i>Lukáš Tomoszek</i>	G, Třinec	–	5	–	6	–	–	–	11	44
17. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	–	5	6	6	–	7	–	24	43
18. <i>Luboš Petráň</i>	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	6	–	–	–	6	41
19. <i>Natálie Křivancová</i>	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	40
20. <i>Alex Rosenbergová</i>	ZŠ a MŠ, Březová	–	5	–	6	–	–	–	11	38
21. <i>Klára Barnatová</i>	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	29
22. <i>Markéta Bečvářová</i>	G, Písek	–	5	6	–	–	–	–	11	27
23. <i>Kryštof Rakovský</i>	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	–	–	–	–	–	–	22
24. <i>Vojtěch Stránský</i>	ZŠ a MŠ Osová Bítýška	–	–	–	–	–	–	–	–	20
25.–26. <i>Adam Hůstava</i>	European School Luxembourg II	–	5	6	6	–	–	–	17	17
25.–26. <i>Kryštof Pravda</i>	G Mensa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	17
27. <i>Jakub Dornák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	14
28. <i>Adam Baroš</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	13
29. <i>Martin Klučka</i>	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	11



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.