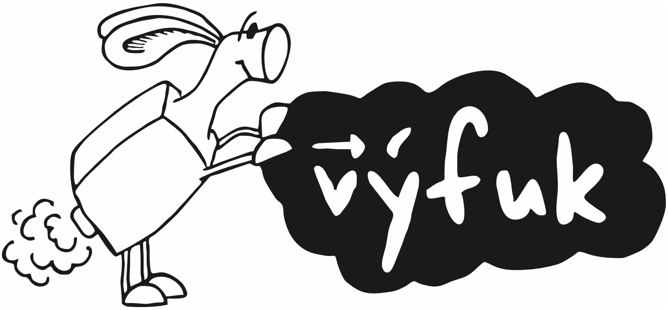


výpočty
fyzikálních
úkolů

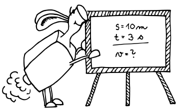
Milí kamarádi,

do rukou se vám dostala již pátá brožurka letošního ročníku. V ní čeká tradičně 7 úloh a Výfučtení tentokrát zaměřené na elektrické obvody. Mnozí z vás také spolu s brožurkou dostanou pozvánku na tábor, který se letos bude konat od 19. 8. do 1. 9. v Pelhřimově. Tradičně bude připraveno spousta her, fyziky a skvělých zážitků.

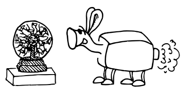
Před letním táborem nás však ještě čeká ještě Jarní setkání, jež se bude konat v termínu 27.–29. 4. v Českých Budějovicích. Opět se můžete těšit na mnoho zajímavých aktivit a víkend strávený s ostatními řešiteli a organizátory. Na obě akce se můžete přihlašovat v naší databázi.

Organizátoři

`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání V. série



Termín uploadu: 9. 4. 2018 20.00
Termín odeslání: N/A

Úloha V.1 ... Platón ❻ ❼ 5 bodů

Lidé byli již od starověku fascinováni geometrií a souměrností. Jedním ze symbolů dokonalosti byla ve starověkém Řecku takzvaná platónská tělesa. To jsou tělesa, jejichž stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a existuje jich celkem pět – čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. V antice jim byla přiřazována symbolika pěti prvků. Ovšem i ze současného pohledu mají tato tělesa některé zajímavé vlastnosti, například se velmi často objevují ve tvarech krystalů.

Na našem webu[1] můžete najít sítě těchto těles. Vaším úkolem bude nejprve vystřihnout sítě a slepit z nich tělesa (nezapomeňte poslat fotku) a poté u každého spočítat všechny vrcholy, hrany a stěny a zapsat tyto počty do tabulky. Souvisí spolu nějak tato čísla pro každé těleso? Zkuste najít jednoduchý vzorec, který je vždy spojuje.

[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/s5/platon.pdf`

matfyz

Úloha V.2 ... Babylonská ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Chceme-li vyjádřit některá čísla dostatečně přesně, musíme využít v desítkové soustavě mnoho cifer. Hodně jich ale ušetříme, použijeme-li šedesátkovou soustavu. V této soustavě počítali například staří Babyloňané. Zapište na tři „šedesátinná“ místa čísla $\sqrt{2}$ a π a zjistěte, na kolik desetinných míst v desítkové soustavě jsou takto zapsaná čísla přesná.

Nápověda: Šedesátková soustava používá místo přechodu přes desítku přechod až přes šedesátku. Správně bychom potřebovali šedesát různých číslic, avšak pokud si uvědomíme, že desetinná čísla můžeme zapsat i ve formě zlomků, na příklad $2{,}34 = 2 + 3/10 + 4/10^2$, můžeme obdobným způsobem zapisovat čísla v šedesátkové soustavě s využitím klasických číslic – ve jmenovatelích zlomků se budou vyskytovat mocniny 60 udávající „šedesátinná“ místa a čitatelé budou moci nabývat šedesáti různých „čísel“ v rozsahu 0–59. Můžete si například ověřit, že desítkové číslo 3,56 se dá zapsat 3;33,36 jako šedesátkové, kde čárkou oddělujeme šedesátkové číslice a středníkem nahrazujeme „šedesátinnou čárku“.

Úloha V.3 ... Kapesné ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Pavla zjistila, že jí stávající výše jejího kapesného nestačí. Rozhodla se, že každý rok na Silvestra (31. 12.) projde Prahou a sesbírá peníze, které lidé poztráceli. Podle jejího odhadu každý den upustí na zem jednu korunu 0,1 % (tzn. jedno promile) obyvatel Prahy, v níž žije konstantní počet 1 milion lidí. Pavla sbírá ztracené koruny pouze jediný den v roce, a proto dokáže sesbírat pouze 5% z celkového obnosu peněz, který leží na zemi. Předpokládejme, že na chodnících na začátku roku 2018 neležela jediná ztracená mince. Pavla šla poprvé sbírat ztracené mince na konci roku 2018, tedy 31. 12. 2018, a nikdo jiný než ona peníze ze země nesbírá. Kolik peněz Pavla nasbírá za 5 let? Uvažujte, že jsou všechny roky dlouhé 365 dní.

Úloha V.4 ... Vyhlídkový let ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Organizátoři Výfuku se rozhodli pro víkendový výlet v horkovzdušném balónu. Jako fyzici věří, že ho zvládnou uřídit sami, jenže právě teď nechtěně zrychleně klesají. Nenafouknutý balón i s nákladem váží $m_\mathrm{B} = 400\,\mathrm{kg}$, nafouknutý má tvar koule s poloměrem $R = 8\,\mathrm{m}$. Jde o typický balón s hořákem, který může vyměňovat vzduch s okolím (okolní vzduch má tlak $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$ a hustotu $\varrho_\mathrm{vz} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$). Na jakou teplotu T musí organizátoři hořákem zahřát vzduch v balónu, aby zastavili zrychlování směrem dolů? Mezi hustotou vzduchu v balónu a jeho teplotou platí vztah $\varrho = k \cdot p/T$, kde $k \doteq 3{,}37 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}K{\cdot}m^{-3}{\cdot}Pa^{-1}}$ a T je teplota v kelvinech.

Úloha V.5 ... Družice ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Výfučí Kosmická Agentura (VKA) se rozhodla vyslat do vesmíru svoji první sondu, která má ověřit nové technologie k návrhu druhé sondy. Mise druhé sondy už má směřovat k Marsu s cílem prozkoumat zde možnosti založení prvního trvale osídleného města. Při výzkumu za účelem splnění tohoto cíle se ukázalo, že největší problém dělá napájení družic.

1. Astronomové zjistili, že výkon Slunce je $3{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ a že je vyzařován rovnoměrně do všech směrů.[2] Jaký je výkon slunečního záření na metr čtvereční v blízkosti Země? Vzdálenost Země–Slunce je $150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$.

---
[2] Tento děj si můžeme představit jako děj velmi podobný tomu, kdy je vyzařováno světlo z žárovky.

2. Konstruktéři z VKA se rozhodli první sondu Výfučkomut 1 napájet pomocí solárních panelů. Ty jsou obdélníkového tvaru o rozměrech $5\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ a mohou se natáčet podle osy rovnoběžné se svojí delší stranou, viz obrázek **??**. Jaký výkon budou panely dodávat Výfučkomutovi 1, bude-li na ně sluneční záření dopadat po úhlem $90°, 60°, 30°$ a $0°$, a jejich účinnost je $\eta = 20\,\%$?

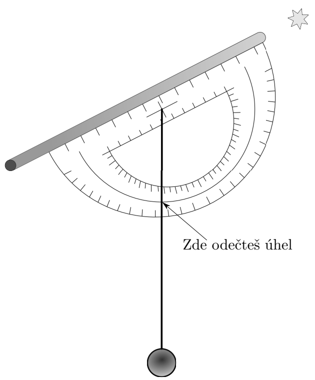
3. Z mise Výfučkomuta 1 se konstruktéři poučili, a proto pro misi k Marsu postavili Výfučkomut 2 – sondu ve tvaru pravidelného trojbokého hranolu o hraně $1\,\mathrm{m}$ a výšce $2\,\mathrm{m}$, viz obrázek **??**. Na rozdíl od první má tato solární panely (stejné účinnosti) na všech třech bočních stěnách, přičemž bude udržovat osu (tu, která prochází podstavami) kolmou na rovinu oběhu kolem Slunce. Při jakém natočení vůči Slunci má tehdy sonda nejmenší příkon?

   Konstruktéři chtěli zjistit, jestli i při tomto minimálním výkonu sonda může přežít, než se ze Země dostane na Mars. Pomozte jim a spočítejte, v jaké vzdálenosti od Slunce může sonda nejdále pracovat, pokud k fungování potřebuje stálý příkon $200\,\mathrm{W}$? Zvládne tedy cestu na Mars z energetického hlediska? Mars je od Slunce vzdálen zhruba $228 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$.

Úloha V.E ... Sextant ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

V minulém Výfučtení jsme se bavili o různých způsobech, jak v astronomii stanovit polohu tělesa. Představili jsme si nebeský souřadnicový systém. Pro astronomii však nestačí jen popis oblohy – musíme být schopni ještě polohu těles na obloze změřit. Toto se dneska provádí pomocí všemožných komplikovaných dalekohledů a teleskopů, nicméně zvládnout doma to může alespoň na základní úrovni každý! Podle následujícího návodu si proto zkuste postavit vlastní sextant, zařízení na měření úhlů vzdálených objektů, jako například hvězd.

Ačkoliv se sextantem dokážeme naměřit docela dost věcí, k jeho výrobě potřebujeme jen pár lehce dostupných předmětů – úhloměr, provázek, nějaký středně těžký předmět, který poslouží jako závaží, a brčko. Na úhloměr do středu vodorovné části připojte provázek dlouhý alespoň $30\,\mathrm{cm}$, na kterém je na konci zavěšeno malé závaží. Podél pravítka na úhloměru přilepte lepicí páskou brčko – to bude sloužit jako teleskop. Výsledek by měl potom vypadat podobně jako na obrázku vpravo. Odečet úhlové výšky provádějte tak, že namíříte brčkem na objekt, provázek volně visí k zemi (viz odkaz pod čarou). Úhel je vyznačen na (používejte hodnoty od $0°$ do $90°$) stupnici úhloměru. Úhlová výška nad obzorem je hodnota po odečtení naměřeného úhlu φ od $90°$.



Postavený sextant využijte k tomu, abyste zjistili, v jaké výšce nad obzorem se nachází Polárka. Dále kompasem změřte azimut hvězdy Castor ze souhvězdí Blíženci[3] (tj. úhlovou vzdálenost od severu) a zaznamenejte si čas měření. Změřenou hodnotu úhlů a další potřebné údaje zadejte do připravené kalkulačky na stránkách Výfuku.[4] Obdobně zkuste určit svoji pozici pomocí hvězdy Regulus ze souhvězdí Lva. Na závěr se zkuste zamyslet nad všemi možnými chybami, které do měření přispívají.

---

[3] Mapu hvězdné oblohy můžete nalézt například na `http://bit.ly/2DyuL6S`.
[4] Dostupné na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/r7/s5`.

Úloha V.C ... Bezejmenná ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček chce tentokrát vánoční světélka s dostatečným předstihem. Ví se, že je od přírody velmi šikovný, a proto se rozhodl si svá světélka svépomocí vyrobit. Nyní se nachází ve fázi, kdy má světélka už sice vyrobená, ale přemýšlí, jak je má vlastně zapojit všechny dohromady. Rozhodně nechce, aby mu z nich začaly létat jiskry a zkratem mu zapálily třeba stromeček! Ví, že každou jeho žárovičkou má procházet proud v rozmezí 0,1–3 A a na každé z nich nesmí napětí přesáhnout hodnotu 10 V. Jeho žárovičky mají odpor 10 Ω a k jejich napájení Výfuček používá ideální zdroj napětí $U = 25\,\mathrm{V}$.

1. Výfuček přemýšlí, jestli zapojit všechny žárovičky paralelně, nebo sériově. Jaké bude napětí na jednotlivých žárovičkách a jaký jimi bude procházet proud v obou zapojeních, použije-li Výfuček pouze 5 žároviček? Budou při některém z těchto zapojení žárovičky svítit?

2. Výfuček však má žároviček mnohem více, a tak přemýšlí o tom, kolik nejvíce a kolik nejméně jich může zapojit sériově. Pomozte mu a spočítejte proud a napětí pro n sériově zapojených žároviček a určete, pro jaká n žárovičky svítí.

3. Nakonec se ale rozhodl, že nejlepší bude žárovičky zapojit do tzv. R-2R sítě, jejíž schéma vidíte na obrázku **??**. Jaký je odpor této sítě, jestliže je nekonečná?

4. Výfuček s překvapením zjistil, že zapomněl na odpor drátů. Jaký je odpor celé nekonečné sítě, pokud dráty mají mezi každými dvěma uzly odpor 0,5 Ω?

Výfučtení: Elektrické obvody

V tomto Výfučtení netradičně opustíme část fyziky nám důkladně známou a podíváme se na fyzikální oblast, která se zabývá elektřinou a elektrickými obvody. Řekneme si něco málo o základních veličinách a součástkách, jejich nejčastějším zapojení a nakonec si povíme i o nekonečných obvodech.

Úvodem

Nejdříve si však připomeňme, co to vlastně je elektrický proud. S elektrickým proudem se každý v 21. století setkal, ať chce, nebo ne. Pomocí tohoto jevu poháníme mobilní telefony, počítače, některá auta a mnoho dalších zařízení. Chápání tohoto fenoménu se proto může hodit ať už se jím budeme zabývat blíže, či ne. Ve skutečnosti za během elektroniky stojí proud elektronů – částic, které se za běžných okolností nachází v atomech.[5] Někdy se však kvůli vnějším podmínkám vydají na cestu mezi jednotlivými atomy a takovému pohybu více elektronů říkáme elektrický proud.

K tomuto jevu však nemůže dojít v každé látce. Rozlišujeme vodiče, ve kterých k němu dojít může (vedou proud), nevodiče (izolanty), které proud nevedou, a polovodiče, které proud

[5] Pokud se o vnitřní struktuře atomů chcete dozvědět víc, doporučujeme Výfučtení 3. série 6. ročníku.

vedou za určitých podmínek. Typickým příkladem vodiče je měď, velmi dobrým vodičem je i zlato.[6] Asi nejběžnější izolant je plast a polovodič křemík.

Proud a napětí

Nejdříve si představíme dvě zcela základní elektrické veličiny, pomocí kterých můžeme popsat pohyb elektronů vodičem – elektrický proud a napětí.

Proudem myslíme v elektrických obvodech množství náboje (počet elektronů), který proteče vodičem (o daném průřezu) za určitý čas. Velikost procházejícího proudu se běžně značí písmenem I s jednotkou ampér, značka A. Proud definujeme jako $I = \Delta Q/\Delta t$ (coulomb / sekunda), což vyjadřuje, jak velký náboj proteče vodičem za daný časový interval. Pro snazší pochopení proudu a dalších elektrických veličin si můžete představit uspořádaný pohyb nesčetně maličkých elektronů, které dohromady tvoří elektrický proud, podobně jako uspořádaný pohyb nesčetně kapek vody (popř. molekul vody), které dohromady tvoří např. vodopád. Tato analogie, kdy si elektrický proud představíme jako tok vody, dokáže poměrně špatně představitelnou veličinu proměnit v něco, s čím máme každodenní zkušenost, a překvapivě pravdivě a dobře funguje.

Elektrické napětí představuje sílu, která tlačí náboje z jednoho bodu do druhého. Značíme ho U a má jednotku V (volt). Elektrické napětí vždy určujeme mezi dvěma body. V naší vodní analogii připodobníme elektrické napětí k výšce vodního spádu, čímž myslíme rozdíl výšek mezi dvěma body. Čím vyšší je spád, tím rychleji proudí voda, resp. tím je větší elektrický proud.

V elektrotechnice se pro zjednodušení nezabýváme všemi místy na obvodu, nýbrž jen tzv. uzly – místy, kde se vodič větví. Jedná se o významná místa, které nám obvod rozdělují do *úseků*, v nichž má zapojení stejné vlastnosti. O uzlech mluvíme také jako o místech s různým potenciálem. Potenciál je další elektrická veličina φ, kterou zde jen letmo zmíníme a v naší analogii ji připodobníme k výšce kopce v uzlu. Elektrické napětí mezi dvěma uzly se rovná rozdílu potenciálů v těchto bodech, stejně jako pomocí rozdílu dvou výšek můžeme určit spád kopce, ze kterého naše pomyslná voda teče. Proto je napětí mezi dvěma uzly o stejném potenciálu rovno nule a žádný proud mezi nimi neteče. Tuto poučku je dobré si zapamatovat, protože se často využívá pro zjednodušení složitějších obvodů. Další velmi důležitou poučkou je fakt, že proud se nikde v obvodu neztrácí ani nehromadí. To také znamená, že veškerý proud, který vteče do nějakého uzlu, z něj taky musí vytéct.

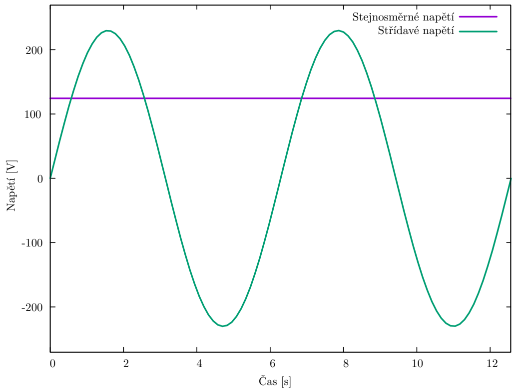
Existují dva základní typy proudu a napětí – stejnosměrné a střídavé. Stejnosměrné máme například v mobilních telefonech a v bateriích, zatímco střídavé v zásuvce.[7] Střídavé veličiny, na rozdíl od stejnosměrných, svoji velikost periodicky (tedy střídavě) mění v čase a stejnosměrné zůstávají konstantní. My se zatím pro jednoduchost budeme zabývat pouze stejnosměrným proudem.

Ohmův zákon a odpor vodiče

Každý materiál je charakterizován elektrickým odporem, odvozenou fyzikální veličinou popisující schopnost vodiče vést elektrický proud, která se značí R a má jednotku ohm Ω. Jedná se o vlastnost materiálu, která závisí na mnoha faktorech, např. na teplotě. Nicméně tyto změny

[6] Zlato má navíc značnou chemickou odolnost a prakticky nekoroduje, proto se z něj např. vyrábí lepší konektory na počítače.

[7] Těmto proudům vděčí za název také skupina ACDC (z anglických zkratek pro tzv. „Alternating Current“ a „Direct Current“).



Obr. 1: Příklad střídavého a stejnosměrného napětí

jsou velmi malé, takže pokud se pohybujeme „v rozumných mezích“, můžeme odpor považovat za konstantní. Většinou se určuje experimentálně, a to z tzv. Ohmova zákona, který nám svazuje dohromady právě elektrický odpor R, napětí U a proud I:

$$U = IR\,. \tag{1}$$

Jak můžeme vidět, tak čím větší má materiál odpor, tím méně „ochotně“ vede proud.

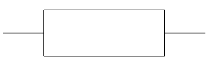
Jedna z mála výjimek, kdy umíme odpor spočítat teoreticky, je odpor *geometrického vodiče*, tedy drátu. Jeho odpor je přímo úměrný jeho délce, nepřímo úměrný jeho průřezu a samozřejmě je ovlivněn nějakou materiálovou konstantou, zapsáno rovnicí:

$$R = \varrho \frac{l}{S}\,,$$

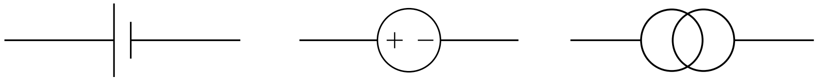
kde ϱ je tzv. měrný elektrický odpor, l je délka vodiče a S je jeho průřez. Pokud si spočteme odpor nějakého vodiče, zjistíme, že bývá typicky velmi malý, a proto ve většině případů považujeme vodiče v obvodu za ideální, tedy s nulovým odporem.

Základní elektrické součástky

Elektrické obvody se skládají z mnoha různých součástek, které mají různé vlastnosti. Ty je dobré znát, abychom mohli jednak spočítat například proudy tekoucí naším obvodem, ale hlavně bychom bez jejich znalosti nezvládli žádný obvod navrhnout.



Rezistor Rezistor je nejzákladnější elektrická součástka reprezentující odpor. Pomocí ní dokážeme regulovat protékající proud obvodem, získat různé napětí atp. Pokud máme v obvodu vodiče, které nejsou ideální, ale mají odpor R_v, můžeme je pro výpočty považovat za ideální vodiče bez odporu, na nichž je zapojen rezistor se stejným odporem jako původní drát, tedy R_v.

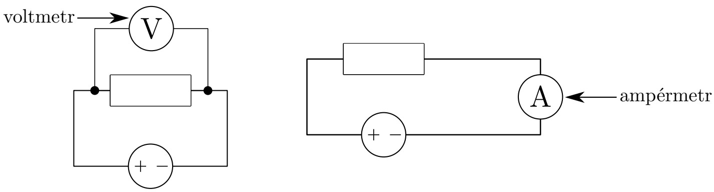


zdroje napětí zdroj proudu

Ideální zdroje Celou dobu se bavíme o napětí a proudu, ale ty se samozřejmě nevezmou „odnikud“. Aby v obvodu tekl nějaký proud, musíme v něm mít zdroj energie. Pro naše potřeby uvažujeme dva druhy takových zdrojů – ideální zdroj napětí a ideální zdroj proudu.

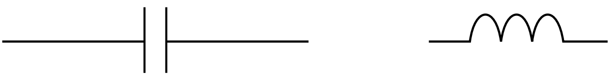
Ten první, jak název napovídá, dodává do obvodu napětí, a to nehledě na to, jaký proud z něj budeme odebírat. V ideálním případě má nulový vnitřní odpor a můžeme si ho představit jako baterku. Pokud máme reálný zdroj napětí, můžeme si ho pro jednodušší počítání opět překreslit jako ideální zdroj napětí sériově spojený s odporem.

Ideální zdroj proudu se chová velice podobně, akorát do obvodu dodává konstantní proud. V ideálním případě má nekonečný vnitřní odpor. Reálné proudové zdroje mají tedy velký vnitřní odpor. Protože se s nimi ale běžně nesetkáme, dál se zdroji proudu nebudeme zabývat.



Voltmetr a ampérmetr Je dobré teoretické výsledky podrobit experimentálnímu ověření. K tomu využíváme voltmetr a ampérmetr. Voltmetr je zařízení určené k měření napětí. V ideálním případě má nekonečný odpor a neteče jím žádný proud, připojuje se proto paralelně k měřenému prvku a obvod nijak neovlivňuje.

Oproti tomu ampérmetr, sloužící k měření protékajícího proudu, se připojuje sériově. V ideálním případě má nulový vnitřní odpor, a tedy z Ohmova zákona je zřejmé, že na něm nedochází k úbytku napětí. To také znamená, že nijak neovlivňuje měřený obvod.



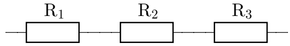
kondenzátor cívka

Další součástky Dalšími velmi důležitými součástkami jsou kondenzátor a cívka. Ideální cívka je stočený ideální vodič, v němž se ukládá „energie protékajícího proudu“. Její stěžejní vlastnost je, že se snaží udržet konstantní proud, který jí prochází. Kondenzátor se naopak skládá v nejjednodušším případě ze dvou vodivě nespojených desek, v nichž se ukládá náboj, a snaží se na svých svorkách („vývodech“) udržet konstantní napětí.

Obě dvě součástky mají velmi zajímavé vlastnosti, a to hlavně v případě střídavého proudu a napětí. V našem případě stejnosměrných veličin můžeme cívku nahradit ideálním vodičem a naopak kondenzátor rozpojenými vodiči. Je však dobré vědět, že takové součástky existují, a až se s nimi jednou potkáme blíže, nebudou pro nás takovým překvapením.

Spojování rezistorů

V elektrotechnice rozeznáváme dva typy zapojení – sériové, kdy součástky zapojujeme za sebe na jednom vodiči a všemi protéká stejný proud, a paralelní, u kterého se součástky zapojují vedle sebe mezi stejné uzly (součástky sdílejí stejné napětí). Obvody většinou chceme co nejvíce zjednodušit, a proto tato zapojení můžeme nahradit jediným odporem, který ale bude mít ekvivalentní hodnotu. Navíc můžeme tato zapojení mezi sebou libovolně kombinovat.

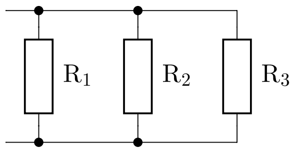


Obr. 2: Sériové zapojení

Sériové zapojení Jak jsme si již řekli, v sériovém zapojení spojujeme součástky za sebe. Díky tomu všemi součástkami teče stejný proud. Z Ohmova zákona dokážeme spočítat výsledné napětí jako

$$
\begin{aligned}
U = U_1 + U_2 + \cdots = IR_1 + IR_2 + \cdots \,, \\
\frac{U}{I} = R_1 + R_2 + \cdots \,, \\
R = R_1 + R_2 + \cdots \,.
\end{aligned}
$$

Pokud takové zapojení více odporů chceme nahradit jediným, aniž by se odpor změnil, prostě sečteme odpory jednotlivých součástek.



Obr. 3: Paralelní zapojení

Paralelní zapojení U paralelního zapojení naměříme na všech součástkách vždy stejné napětí, neboť jsou všechny zapojeny mezi dvěma stejnými uzly. Jednotlivé součástky se však liší velikostmi proudů jimi protékajícími. Pokud tedy chceme takové zapojení zjednodušit, potřebujeme spočítat celkový proud protékající mezi krajními uzly tohoto zapojení:

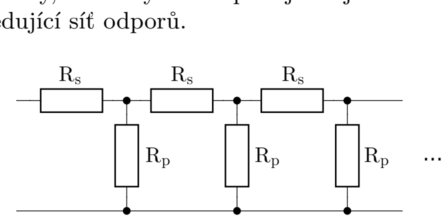
$$
\begin{aligned}
I = I_1 + I_2 + \cdots = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots \,, \\
\frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \,, \\
\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \,.
\end{aligned}
$$

Paralelní spojení rezistorů můžeme nahradit jediným rezistorem, jehož převrácená hodnota odporu je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých odporů původního zapojení.

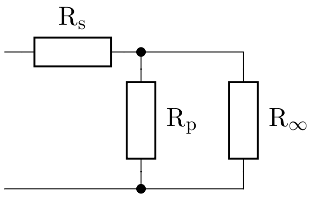
Obě tyto úlohy můžeme otočit a ptát se, jaké dva rezistory potřebujeme vzít, abychom na jednom z nich dostali nějaké napětí, resp. proud, pokud známe celkové napětí a vstupní proud, resp. vstupní napětí a celkový proud.

Nekonečné obvody

Občas se setkáme i s obvody, ve kterých se opakuje stejná část obvodu nekonečněkrát. Jako příklad tady máme následující síť odporů.



Zajímavé na nekonečných odporových sítích je, že ačkoliv jsou opravdu nekonečné, mají konečný odpor. Občas je potřeba zjistit, jaký tento výsledný odpor je. Řešením je takový malý fyzikální trik – celý nekonečný obvod chceme nahradit jediným odporem R_∞, ale jelikož tento



Obr. 4: Náhradní zapojení nekonečné odporové sítě

odpor reprezentuje celou nekonečnou síť, jeho hodnota se nijak nezmění, přidáme-li na začátek ještě jednu opakující se buňku.

Tímto krokem ale dostáváme zapojení tří odporů, o nichž víme, že jejich celkový odpor je stále R_∞. Aplikací výše popsaných pravidel pro nahrazování paralelních a sériových zapojení odporů dostáváme rovnici

$$R_\infty = R_\mathrm{s} + \frac{R_\mathrm{p} R_\infty}{R_\mathrm{p} + R_\infty}\,,$$

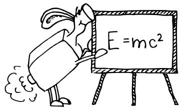
což je kvadratická rovnice o jedné neznámé (při řešení se v ní vyskytne R_∞^2). Proto si z ní můžeme po troše úprav vyjádřit hledaný celkový odpor:

$$R_\infty = \frac{R_\mathrm{s} + \sqrt{R_\mathrm{s}^2 + 4R_\mathrm{s}R_\mathrm{p}}}{2}\,.$$

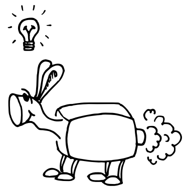
Závěr

Tímto je Výfučtení páté série u konce. Představili jsme si základní veličiny a prvky elektrických obvodů, ukázali jsme si, jak vypočítat odpor sériově či paralelně spojených rezistorů a také jsme si připomněli jeden ze základních vzorců a zákonů elektrických obvodů, Ohmův zákon, který nám vzájemně svazuje veličiny proud I, napětí U a elektrický odpor R. Společně jsme si také vysvětlili funkci známých zapojení, která nám kolikrát mohou usnadnit práci a pomoci i snadněji pochopit funkci zkoumaného obvodu. Ke konci Výfučtení jsme se podívali i na nekonečnou rezistorovou síť, která má překvapivě konečný odpor.

Josef Krška ***Lubor Čech***
cech@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Jablečný mošt

5 bodů; průměr 4,43; řešilo 7 studentů

Radka si jednoho dne vzpomněla, že když byla malá, celá její rodina připravovala na podzim jablečný mošt. Když už byl všechen mošt hotov, bylo potřeba jej přelít z obrovských demižonů do zavařovacích láhví. To se dělalo pomocí hadičky, která měla jeden konec ponořený do moštu v demižonu a druhý konec ústil v láhvi. Celé toto důmyslné zařízení nemělo žádný pohon. Přes to, pokud se láhev umístila níže než demižon a celý proces se vhodně nastartoval, se láhev po čase naplnila. Pokuste se vysvětlit, proč kapalina přetekla z jedné nádoby do druhé, když v první půli cesty jde kapalina hadičkou „do kopce“, aniž bychom jí viditelně dodávali energii?

Vysáním vzduchu z hadice v ní snížíme tlak na menší hodnotu, než je atmosferický tlak v okolí. Jinými slovy vytvoříme v hadici podtlak. Okolní (atmosférický) tlak nažene mošt do hadičky, což odpovídá onomu nastartování procesu.[8] Nyní si představme, že už jsme celou hadici naplnili moštem. Na mošt v obou částech hadice (myšleno část, kde mošt stoupá, a část, kde klesá) působí tíha jako na všechny předměty na Zemi. Pro přehlednost řekněme, že mošt stoupá v levé části a klesá v té pravé. V zadání je ale řečeno, že zavařovací lahev je položena níže než demižon. Proto má i pravá část hadice větší délku a nachází se v ní více moštu, tudíž ten je v ní těžší. Logicky na něj působí větší tíhová síla než na mošt v levé části hadice, a tak teče v pravé části hadice dolů. Proč se ale proud nerozdělí na dvě části a nesteče doleva a doprava? Kdyby se tak stalo, vytvořilo by se v ohybu hadice docela dobré vakuum a asi tušíte, že to se v přírodě jen tak nestává. Vznikl by tak bez jakékoli příčiny prostor nižšího tlaku, do kterého by okolní atmosférický tlak stejně mošt vracel.

Na mošt, který teče v hadici dolů, působí větší tíhová síla než na mošt, který teče nahoru. Aby v hadici byl pořád stejný tlak, je vtahován z nádoby do hadice, odkud vytéká do demižonu.

Za jakých podmínek bude tento „stroj“ fungovat? Tušíme, že mošt se bude přelévat do té doby, dokud se hladina moštu v demižonu nevyrovná na úroveň hladiny v nádobě. Tehdy totiž má levá i pravá část hadice stejnou délku a hmotnost a působící tíhová síla na mošt je v jejích obou dvou částech stejná. Výsledná síla je tedy nulová a mošt se přestane přelévat.

Pavla Rudolfová
pavlar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... Po stěně krychle

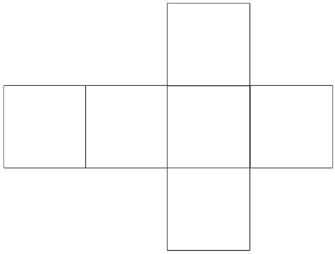
5 bodů; průměr 3,69; řešilo 45 studentů

Pepa si koupil krychli o délce hrany 2 cm *a chtěl spojit její dva protilehlé vrcholy co nejkratší čárou, která vede po jejím plášti. Pomozte Pepovi zjistit, kudy má čáru vést a jak dlouhá bude.*

Naším úkolem je zjistit, kudy povede nejkratší spojnice dvou protilehlých vrcholů krychle. Celý problém se zdá jako třírozměrný, ale všimněme si, že plášť krychle je ve skutečnosti plocha,

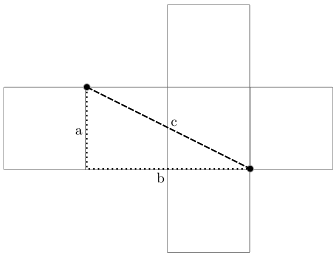
[8] Tohle vysvětlení možná zní složitě, ale jedná se o stejný jev, jako když pijeme nápoj brčkem.

která je akorát v prostoru zohýbaná. Můžeme si ji tedy „rozbalit“ do roviny, a to jako tzv. „síť krychle“. Podívejme se tedy, jak taková síť vypadá.



Vidíme, že naším úkolem se stalo najít co nejkratší spojnici dvou bodů v rovině. Jak jistě víme, nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je úsečka.

Nejprve si tedy načrtneme síť krychle, na které najdeme dva protilehlé vrcholy a spojíme je úsečkou.



Nyní nám stačí spočítat délku této úsečky, kterou si nazvěme pro přehlednost c.

Z náčrtu je patrné, že naše hledaná spojnice vrcholů (v náčrtu čárkovaně) spolu se stranami krychle tvoří pravoúhlý trojúhelník se stranami a, b a c. Tím pádem délku c můžeme snadno vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Naší neznámou je přepona c, délky odvěsen (v náčrtu tečkovaně) jsou nám známé. Z náčrtku vidíme, že strana a má délku jedné hrany krychle, b má délku dvou hran krychle. Jak se dočteme v zadání, strana krychle, kterou si označíme l, měří 2 cm. Tedy $a = l$ a $b = 2l$. Nyní pouze do rovnice dosadíme:

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + (2a)^2 \,,\\
c &= \sqrt{5a^2} \,,\\
c &= \sqrt{5 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2} \,,\\
c &\doteq 4{,}47\,\mathrm{cm} \,.
\end{aligned}$$

Nejkratší možná čára, kterou bude Pepa moct nakreslit, měří tedy 4,47 cm. Na síti má tvar úsečky mezi dvěma protilehlými vrcholy krychle.

Eva Vochozková
eva@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... Hladový lis

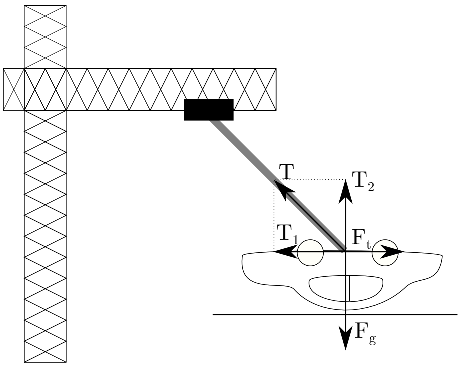
6 bodů; průměr 3,52; řešilo 23 studentů

Na šrotišti si naštvaný jeřábník pohazuje s auty. Někdy je vláčí po zemi, jindy je zase vytahuje do výšky. Jednou mu odbrzděné auto o hmotnosti 1 234 kg *ujelo a převrátilo se, takže jej musel vytahovat zpět pod úhlem* 45° *vůči zemi. Jakou minimální tažnou sílu musel jeřáb vyvinout na rozpohybování auta, jestliže koeficient tření mezi autem a zemí činí $f = 0{,}2$? Odlepí se přitom auto od země?*

Pro zdárné vyřešení této úlohy je nejdříve potřeba se zamyslet nad tím, jaké síly na naše auto působí. Největší síla je samozřejmě tažná síla T, kterou působí jeřáb na auto pod úhlem 45° vůči zemi a jejíž velikost máme za úkol vypočítat. Tato síla také dává auto do pohybu. Proti pohybu působí třecí síla, kterou vypočítáme jako

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} f\,,$$

kde F_n je normálová (tj. kolmá) síla, která tlačí auto k povrchu, na němž dochází ke tření, a f je koeficient tření, který známe ze zadání. Nakonec na auto, stejně jako na každé jiné těleso na Zemi, působí tíhová síla F_G.



Každá z těchto sil ale působí jiným směrem. Tíhová síla působí dolů, třecí proti směru pohybu vozidla a tažná síla na naše auto působí pod úhlem 45°. Jelikož je síla vektorová veličina, tedy má kromě velikosti i směr, můžeme využít principu superpozice[9] a síly rozložit takovým způsobem, že budeme moci počítat jen s jejich velikostmi.

Tažnou sílu můžeme rozložit na dvě k sobě kolmé složky – na sílu T_1, která působí přesně opačným směrem než třecí síla, a na sílu T_2, která působí přesně opačným směrem než síla tíhová. Obě dvě složky jsou navzájem kolmé a s původní silou T svírají úhel 45°. Aby jejich

[9]Princip superpozice nám říká, že pokud rozložíme sílu na více jiných sil/složek tak, že původní síla je jejich výslednicí neboli součtem těchto sil, bude výsledný účinek totožný.

složením vznikla původní síla T, je zřejmé, že síly T_1 a T_2 musí být stranami čtverce, kde síla T je úhlopříčkou.

V jakémkoliv čtverci se stranou a platí, že jeho úhlopříčka má délku $a \cdot \sqrt{2}$. Proto pro velikosti sil T_1 i T_2 platí, že:

$$T_1 \cdot \sqrt{2} = T \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = \frac{T}{\sqrt{2}} \,.$$

K výpočtu třecí síly potřebujeme znát sílu, kterou je auto tlačeno do země, tedy normálovou sílu. Intuitivně předpokládáme, že se auto nenadzvedne, a proto můžeme normálovou sílu určit jako výslednici všech svisle působících sil, tedy

$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{G} - T_2 \,.$$

Pokud by náš předpoklad byl špatný a auto se ve skutečnosti nadzvedlo, což ověříme ve druhé otázce ze zadání, tak by nedocházelo ke tření a museli bychom počítat, že $F_\mathrm{n} = 0\,\mathrm{N}$. My ale dopředu prozradíme, že se auto skutečně nenadzvedne a tato rovnice platí. Minimální síla, kterou musí jeřáb působit, je taková síla, jejíž vodorovná složka překoná třecí sílu. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} T_1 &= F_\mathrm{t} \,, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= F_\mathrm{n} f \,, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= (F_\mathrm{G} - T_2)\, f \,, \\ \frac{T}{\sqrt{2}} &= \left(mg - \frac{T}{\sqrt{2}}\right) f \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mgf\sqrt{2}}{1+f} \,. \end{aligned}$$

Nyní pouze dosadíme do rovnice číselné hodnoty ze zadání:

$$T = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(1\,234\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\right) \cdot 0{,}2}{1 + 0{,}2} \doteq 2\,909\,\mathrm{N} \,.$$

Už stačí jen ověřit, že auto se doopravdy neodlepí od země a že náš výpočet je platný. To zjistíme velmi jednoduše, a to tak, že působí-li výslednice svislých sil do země, tak se auto neodlepí, neboť je přitlačováno k zemi. Zapsáno rovnicí, potřebujeme ověřit platnost

$$F_\mathrm{G} - T_2 \geq 0 \,.$$

Do tohoto vztahu můžeme dosadit již několikrát výše zmiňované vztahy, čímž dostáváme

$$mg - \frac{T}{\sqrt{2}} = 1\,234\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - \frac{2\,909\,\mathrm{N}}{\sqrt{2}} \doteq 10\,283\,\mathrm{N} \geq 0 \,.$$

Vidíme tedy, že auto se od povrchu určitě neodlepí. Naše úvahy byly tedy správné a můžeme konstatovat, že k rozpohybování auta musí jeřáb působit silou alespoň 2 909 N.

Karolína Letochová

Úloha III.4 ... Míč pod vodou

6 bodů; průměr 3,62; řešilo 21 studentů

Kuba během hodiny dějepisu vzpomínal na léto, kdy trávil hodně času v bazénu. Vzpomněl si, jak si hrál s nafukovacím míčem o poloměru 10 cm, *který nořil pod vodu, kde ho po chvilce pustil a sledoval, jak míč vyplouval a vyskakoval nad hladinu. Jelikož je Kuba zvídavý, začal počítat. Pomůžete mu spočítat odpovědi na následující otázky?*

1. *Jakou silou musel působit na míč, aby zůstal ponořený 1 metr pod vodní hladinou?*
2. *Jaká maximální odporová síla na míč působila, když se přibližoval k hladině? Víte, že odpor je přímo úměrný rychlosti.*
3. *Jakou maximální rychlostí se míč pohyboval, jestliže si Kuba našel, že pro velikost odporové síly platí vztah* $F_\mathrm{o} = 0{,}5C\varrho S v^2$, *kde* ϱ *je hustota prostředí,* S *je průřez tělesa,* v *je jeho rychlost a* C *je odporový koeficient, který je pro míč* $C = 0{,}5$?

Deformaci míče v důsledku působících sil a změnu jeho objemu z důvodu změn okolního tlaku zanedbejte.

1. Na míč působí 3 síly – ve směru dolů tíhová síla F_G, námi hledaná a Kubou vyvinutá síla F a proti nim působí vztlaková síla F_vz. Jelikož se míč nepohybuje, všechny tři síly musí být v rovnováze. V zadání není uvedena hmotnost míče, kterou nutně potřebujeme znát pro výpočet tíhové síly. Pokud se zamyslíme, dojdeme k závěru, že tíhovou sílu můžeme zanedbat, neboť hmotnost míče je méně než 100 g a tíhová síla v porovnání se vztlakovou silou je řádově menší. Jejím zanedbáním ovlivníme výsledek minimálně.[10] Hledaná síla F je tedy
$$F = F_\mathrm{vz}\,.$$
O vztlakové síle z Archimédova zákona víme, že je rovna tíze vytlačené kapaliny, tedy
$$F_\mathrm{vz} = V\varrho g\,,$$
kde V je objem míče, ϱ hustota vody a g tíhové zrychlení. Vzpomeneme-li si na to, jak se počítá objem koule a hmotnost z hustoty, můžeme přímo určit:
$$F = F_\mathrm{vz} = V\varrho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g\,,$$
což po dosazení přibližně dá:
$$F = F_\mathrm{vz} = \frac{4}{3}\pi(0{,}1\,\mathrm{m})^3 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 41{,}1\,\mathrm{N}\,.$$
Aby míč zůstal ponořený pod vodní hladinou, musí Kuba působit silou $F \doteq 41{,}1\,\mathrm{N}$.

2. Druhý úkol je spíše o rozvaze fyzikálně významných jevů a jeho řešení je obecné. Na míč opět působí pouze tři síly – tíhová, odporová a již spočítaná vztlaková. Podotkněme, že odporová síla působí proti směru pohybu, takže v případě, kdy se míč vynořuje, působí ve stejném směru jako síla tíhová.

[10] Pokud si najdeme hmotnost míče a ve výpočtech budeme dále uvažovat i tíhovou sílu, nejedná se rozhodně o chybu.

Nyní se zamysleme nad tím, co se během vzestupu míče děje. Míč nejdříve zrychluje, až dosáhne nějaké rychlosti, kde se zastaví jeho zrychlování a již putuje konstantní rychlostí. V momentě zastavení zrychlování musely podle Newtonových zákonů být síly v rovnováze, a můžeme si tedy sestavit rovnici

$$F_\mathrm{G} + F_\mathrm{o} = F_\mathrm{vz}\,.$$

Platnost této rovnice je odůvodněna 1. Newtonovým zákonem – stoupající míč vlivem vztlakové síly zrychluje, přičemž na něj působí stále větší odpor kapaliny[11] a navíc je celou dobu stahován dolů silou tíhovou. Odpor se zvětšuje, až dokud není dosažena v této rovnici zachycená rovnováha. Ta nemůže být překročena, protože by jinak míč znenadání začal zpomalovat.

Jak jsme zmiňovali v předchozím bodě, tíhovou sílu je možno zanedbat. Rovnice se nám tedy zjednoduší na vztah:

$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{vz}\,.$$

Jelikož se odporová síla po vyrovnání vztlakové už nezvětšovala, můžeme říci, že maximální odporová síla je rovna vztlakové síle.

3. Nakonec ve třetím úkolu dosadíme za odporovou sílu nám dodaný vztah

$$F_\mathrm{o} = 0{,}5C\varrho Sv^2\,,$$

a pouze si v něm vyjádříme obsah kruhu $S = \pi r^2$ jakožto průřez míče. Dostáváme vztah

$$F_\mathrm{o} = 0{,}5C\varrho\pi r^2 v^2\,.$$

Nyní jej můžeme dosadit do zmíněné rovnosti mezi odporovou a vztlakovou silou z předchozího bodu:

$$0{,}5C\varrho\pi r^2 v^2 = F_\mathrm{vz} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{F_\mathrm{vz}}{0{,}5C\varrho\pi r^2}}\,,$$

z něhož po číselném dosazení dostáváme výslednou maximální rychlost míče:

$$v = \sqrt{\frac{41{,}1\,\mathrm{N}}{0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\cdot\pi(0{,}1\,\mathrm{m})^2}} \doteq 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Míč se vynořoval maximálně rychlostí $v \doteq 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

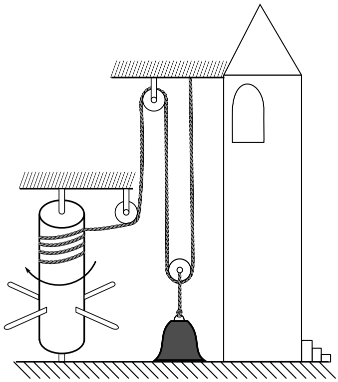
[11] Jak víme ze zadání, odporová síla je přímo úměrná rychlosti, tj. s rostoucí rychlostí roste i odporová síla.

Úloha III.5 ... Věž kostela

6 bodů; průměr 4,30; řešilo 37 studentů

Na věž kostela Sv. Jakuba je vytahován nový zvon o hmotnosti 2,5 t*. Zvon je vytahován středověkou metodou – pomocí rumpálu, lidskou silou přes soustavu pevných a jedné volné kladky. Rumpál je válec o poloměru* 40 cm*, na nějž se namotává lano. Otáčí jím čtyři statní muži, kteří působí silou na konce držadel ve vzdálenosti* 2,5 m *od osy otáčení rumpálu. Zvon je na lano zavěšen pomocí volné kladky.*

1. *Jakou nejmenší silou musí každý statný muž působit na konec držadla, aby se jim povedlo zvon vytáhnout na vrchol věže?*
2. *Kolikrát se otočí rumpál kolem své osy, je-li zvon vytahován do výšky* 30 m*?*



1. Zvon má hmotnost m, tedy na něj působí tíhová síla o velikosti

$$F = mg\,.$$

Jelikož je zvon zavěšen na volné kladce, stačí ho vytahovat poloviční silou, než je jeho tíha. Zapsáno rovnicí

$$F_1 = \frac{mg}{2}\,.$$

Touto silou[12] také působí provaz na válec rumpálu ve vzdálenosti r_1 od osy otáčení, tedy momentem

$$M = F_1 \cdot r_1 = \frac{1}{2} mgr_1\,.$$

Aby statní muži zvon vytáhli, musí na rumpál působit momentem síly o stejné velikosti. Jelikož působí ve vzdálenosti r_2 od osy otáčení, musí dohromady působit silou

$$F_2 = \frac{M}{r_2} = \frac{1}{2} mg \frac{r_1}{r_2}\,.$$

[12] Resp. podle Newtonových zákonů silou stejné velikosti, ale opačného směru.

Na rumpál působí každý ze čtyř mužů stejně velkou silou F. Každý z nich tedy působí čtvrtinovou silou v porovnání s celkovou potřebnou silou F_2:

$$F = \frac{F_2}{4} = \frac{1}{8} mg \frac{r_1}{r_2} \,.$$

Číselným dosazením hodnot ze zadání do této rovnice dostáváme

$$F = \frac{1}{8} 2\,500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot \frac{0{,}4\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m}} \,,$$
$$F \doteq 490{,}5\,\mathrm{N} \,.$$

Aby zvon vytáhli, každý z mužů musí působit silou $F = 490{,}5\,\mathrm{N}$. Pro představu, každý musí působit takovou silou, jako kdyby zdvihal padesátilitrový barel vody, což je rozhodně v lidských možnostech.

2. Když vytahujeme závaží pomocí volné kladky, působíme pouze poloviční silou, ale zato musíme působit na dvojnásobné dráze, tedy musíme přitáhnout dvojnásobnou délku lana. Vyplývá to buď z geometrie soustavy nebo z vykonané práce, která je součinem působící síly a dráhy. Práce potřebná k vytažení zvonu je stále stejná $W = Fs = mgh$, tudíž když působíme poloviční silou $F = mg/2$, potřebujeme provaz o dvojnásobku výšky $2h$. Na rumpál tedy musíme namotat $2 \cdot 30\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$ lana. Obvod rumpálu je

$$o = 2\pi r_1 \doteq 2{,}51\,\mathrm{m} \,.$$

Abychom na něj namotali 60 m lana, musíme ho tedy otočit

$$n = \frac{l}{o} = \frac{2h}{2\pi r} = \frac{60\,\mathrm{m}}{2{,}51\,\mathrm{m}} \doteq 23{,}9\text{krát} \,.$$

Ve skutečnosti by se, dokud by to rumpál umožňoval, lano namotávalo tak, aby se nepřekrývalo – tedy do spirály. Tyto výpočty by však už byly složitější a záležely by na průměru lana. Nicméně můžeme předpokládat, že průměr lana je v porovnání s průměrem rumpálu zanedbatelný a tento výsledek je tak srovnatelný s tím, který bychom dostali, kdybychom uvažovali namotávání lana po spirále.

Kateřina Rosická
`kackar@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.E ... Tuha mikrotužky

8 bodů; průměr 5,20; řešilo 25 studentů

Andřejka byla jednou v galerii, kde měli obraz různě tlustých čar. Tento obraz ji uchvátil natolik, že začala přemýšlet, jaká může být jejich průměrná výška.[13] *Pomozte Andřejce v jejích úvahách a změřte, jak vysoká je čára, kterou kreslí tuha do mikrotužky. Předpokládejte, že nakreslená čára má tvar kvádru a že objem tuhy se nemění. Měření zkuste provést alespoň 5krát a spočtěte chybu měření. Nezapomeňte uvést, jaký typ a tloušťku tuhy jste použili.*

Celý experiment provedeme tak, že narýsujeme čáru o známé délce a zjistíme, kolik tuhy nám ubude. V našem případě jsme použili čáru o délce $l = 1\,\mathrm{m}$, přičemž byla rozdělena na pět

[13] Výškou myslíme doopravdy výšku, tedy směr kolmý k rovině papíru.

úseků po 20 cm tak, aby se vešla na papír. Délku tuhy mikrotužky jsme změřili pomocí přesného posuvného měřidla, slangově šuplery, před a po narýsování této čáry. Úbytek mikrotuhy označme h. Část tuhy, která nám po narýsování čáry ubyla, můžeme považovat za malý válec, jehož objem je

$$V_\mathrm{t} = \pi r^2 h\,.$$

Zde platí, že $r = d/2$, kde $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ je průměr náplně uvedený výrobcem. Úpravou dostáváme

$$V_\mathrm{t} = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h\,.$$

Předpokládáme, že narýsovaná čára má tvar velmi dlouhého kvádru, jehož objem vypočítáme ze vzorce:

$$V_\mathrm{k} = ldx\,,$$

kde l je délka kvádru (čáry), d je jeho šířka a x je námi hledaná výška kvádru. Všimněme si, že šířka čáry d odpovídá průměru náplně do mikrotužky, který známe od výrobce. Za předpokladu, že se při rýsování žádná hmota náplně neztrácí (zanedbáme to, že při rýsování podle pravítka se kus tuhy přenese na pravítko) ani žádná nepřibývá a že její objem je konstantní, musí platit:

$$V_\mathrm{t} = V_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad \pi \frac{d^2}{4} h = ldx\,.$$

Odtud již snadno vyjádříme námi hledanou výšku čáry:

$$x = \frac{\pi d h}{4l}\,. \tag{2}$$

Nyní nám zbývá provést samotné měření a určit odchylku měření, viz níže.

Naměřené hodnoty

Provedeme pět měření náplní do mikrotužky typu HB o průměru $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Délku čáry vždy zvolíme $l = 1\,\mathrm{m}$.

Tab. 1: Naměřené hodnoty úbytku tuhy h s dopočtenými x

$\frac{h}{\mathrm{mm}}$	$\frac{x}{10^{-8}\,\mathrm{m}}$
0,100	3,93
0,125	4,91
0,150	5,89
0,140	5,50
0,100	3,93

Hodnoty zprůměrujeme a dostaneme tak průměrnou výšku spotřebované tuhy $\overline{h} \doteq 0{,}123\,\mathrm{mm}$ a průměrnou vypočítanou výšku narýsované čáry $\overline{x} \doteq 4{,}83 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$.

Nepřesnost měření

Během experimentu jsme měřili jen dvě délky. Jako první metrovou čáru rozdělenou na pět dílků pomocí pravítka. Odchylku měření každé části odhadujeme na velikost poloviny nejmenšího měřitelného dílku, tedy 0,5 mm. Protože jsme však měřili délku čáry na pětkrát, může být celková odchylka naměřené délky čáry nejvýše pětkrát větší, tedy $\Delta l = 2{,}5\,\mathrm{mm}$. Můžeme tedy bezpečně říct, že měřená délka čáry byla 1 m s relativní chybou nejvýše 0,25 %.

Oproti tomu úbytek tuhy jsme měřili posuvným měřítkem, jehož nepřesnost byla 0,025 mm. Tato malá nepřesnost je ale v porovnání s naměřenými hodnotami úbytku tuhy podstatná. To znamená, že relativní (procentuální) nepřesnost odhadu výšky narýsované čáry, kterou vypočítáme jako podíl absolutní nepřesnosti měření[14] ku naměřené hodnotě, bude již podstatně velká. V praxi pomocí relativní nepřesnosti[15] dokážeme zohlednit, jestli jsme na měřenou veličinu použili dostatečně přesné měřidlo. Pokud například stůl měříme svinovacím metrem, máme menší relativní nepřesnost, než když jím měříme zrnko prachu, a můžeme tedy lépe ohodnotit přesnost měření. Vidíme, že relativní nepřesnost měření narýsované čáry metrem dosahuje hodnoty

$$\delta l = \frac{\Delta l}{\bar{l}} = \frac{0{,}25\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{cm}} = 0{,}25\,\%\,,$$

což je málo, a to i když jsme uvažovali maximální možnou nepřesnost. Průměr náplně d nám udal výrobce a budeme ji považovat za přesnou. Zbývá tedy nepřesnost měření úbytku tuhy h. Tu můžeme opět vypočítat z absolutní chyby, kterou jsme určili dříve jako nepřesnost posuvného měřidla. Musíme si však uvědomit rozdíl mezi veličinou h a l. Celková délka čáry l byla spočtena jako součet délek z několika měření a mělo tedy smysl nepřesnosti každého měření sčítat. Naproti tomu výšku tuhy h jsme dostali jako průměr z několika hodnot tabulky, a každá hodnota byla obdržena se stejnou nepřesností 0,025 mm. Průměrně se tedy nepřesnost výsledku Δh rovná nepřesnosti jedné hodnoty. Pro relativní chybu tedy dostáváme

$$\delta h = \frac{\Delta h}{\bar{h}} = \frac{0{,}025\,\mathrm{mm}}{0{,}123\,\mathrm{mm}} \doteq 20\,\%\,.$$

Jak si můžeme všimnout, relativní chyba určení délky narýsované čáry je zanedbatelná v porovnání s relativní chybou určeného úbytku náplně. Můžeme ji tedy zanedbat, čímž dostáváme výslednou výšku čáry jako funkci jediné proměnné zatížené chybou, a to právě úbytku náplně. Procentuální chyba určené výšky čáry se tedy shoduje s chybou určeného úbytku náplně, protože x závisí na h skrze vztah (2), ve kterém se h pouze násobí konstantami, které bereme jako přesné. Pokud je tedy chyba h určena jako Δh procent ze své hodnoty, musí být procentuální chyba x rovněž Δh procent ze své hodnoty.

Zapsáno rovnicí:

$$\delta x = \delta h\,.$$

Z vypočtených nepřesností vidíme, že metrová čára je ve skutečnosti málo a pro přesnější měření by bylo vhodné udělat delší čáru, čímž by se zvětšilo množství vypotřebované náplně a tedy výška vypsané tuhy, která by se nám měřila lépe.

[14] Značí se tak, že před měřenou veličinu napíšeme Δ (velká delta).
[15] Značí se tak, že před měřenou veličinu napíšeme písmeno δ (malá delta).

Závěr

Z experimentů jsme určili výšku měřené čáry jako $x = (4{,}8 \pm 1{,}0) \cdot 10^{-8}$ m a s relativní chybou $\delta x = 20\,\%$ (což odpovídá právě napsané absolutní chybě $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m).

Je však ještě nutné zmínit, že náš výsledek bychom měli interpretovat spíše jako řádový odhad, protože se skutečná výška bude od našeho výsledku znatelně lišit. Tuha si při přenesení na papír nebude zachovávat svůj objem v důsledku porušení vazeb mezi jednotlivými vrstvami uhlíku, dále čára nebude ideální kvádr, ale lze předpokládat, že na okrajích bude nižší než ve svém středu, povrch papíru není na mikroskopické úrovni vůbec rovný atp. Pochopitelně v přesnosti výsledku hraje velkou roli i výše vypočítaná relativní chyba při měření výšky vypotřebované tuhy. Ta by se dala zmenšit již zmíněným měřením delší čáry s větším úbytkem náplně, případně jinou pokročilejší metodou měření délky tuhy, které bychom ale mohli využít pouze v laboratoři se sofistikovaným vybavením. Nakonec, pro přesnější reprodukci tohoto experimentu můžeme doporučit také zaznamenat druh papíru, na kterém čáru zanecháváme. Přilnavost tuhy se může značně lišit v závislosti na zvoleném materiálu.

Marek Božoň
marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.C ... Pro rybáře pružné

6 bodů; průměr 4,32; řešilo 28 studentů

Káťa si koupila dva vlasce z neznámých materiálů. První má délku $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ a průměr $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, druhý má délku $l_2 = 2\,\mathrm{m}$ a průměr $d_2 = 0{,}4\,\mathrm{mm}$. Aby Káťa zjistila, z jakých materiálů vlasce jsou, rozhodla se změřit jejich Youngův modul pružnosti v tahu. K tomu si obstarala dvě závaží o shodné hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$.

a) První vlasec se po zavěšení závaží prodloužil o $\Delta l_1 = 6\,\mathrm{cm}$, druhý o $\Delta l_2 = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte moduly pružnosti v tahu prvního i druhého vlasce.

b) S pomocí tabulek či internetu[16] pomozte Kátě určit, o jaké materiály se jedná. Napovíme, že moderní vlasce se vyrábějí především z polymerů.

Začneme se vzorcem Hookova zákona, který byl zmíněn v seriálu, a vyjádříme si z něj modul pružnosti E

$$E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon}\,.$$

Pro normálové napětí σ_n máme z Výfučtení vzorec

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}$$

a pro relativní prodloužení ε máme

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\,.$$

Dosazením těchto dvou vztahů do prvního a jejich úpravou dostáváme výsledný vztah

$$E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon} = \frac{F_p/S}{\Delta l/l_0} = \frac{F_p l_0}{S\Delta l}\,.$$

[16] Nezapomeňte uvést zdroj.

Reakční síla F_p se rovná tíhové síle a průřez S se rovná průřezu vlasce, tedy $S = \pi d^2/4$. Dosazením tedy dostáváme

$$E = \frac{4mgl_0}{\pi d^2 \Delta l}\,.$$

Nyní nám jen stačí dosadit hodnoty a vypočítat moduly pružnosti. Pro první vlasec je roven:

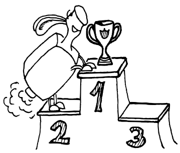
$$E_1 = \frac{4mgl_1}{\pi d_1^2 \Delta l_1} = \frac{4 \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 1\,\mathrm{m}}{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} \doteq 0{,}83\,\mathrm{GPa}\,.$$

Stejným způsobem budeme počítat i u druhého vlasce:

$$E_2 = \frac{4mgl_2}{\pi d_2^2 \Delta l_2} = \frac{4 \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{m}}{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} \doteq 3{,}12\,\mathrm{GPa}\,.$$

V tabulkách nebo na internetu[17] můžeme dohledat, že první vlasec bude vyrobený z polyethylenu s vysokou hustotou, který má modul pružnosti $E = 0{,}8\,\mathrm{GPa}$, a druhý vlasec bude pravděpodobně z nylonu,[18] který má $E = 2 - 4\,\mathrm{GPa}$.

Miroslav Jarý
Jason@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	6	8	6	**42**	**127**
1.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	5	3	–	4	8	–	**24**	**73**
2.	*Patrik Rosenberg*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	4	–	–	1	–	–	**8**	**32**
3.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	2	–	–	–	–	–	**7**	**17**
4.	*Jakub Bouberle*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	5	4	–	–	–	5	–	**14**	**14**
5.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**12**
6.	*Marie Hebertová*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
7.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	6	8	6	**42**	**127**
1.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	5	5	3	5	6	6	6	**36**	**112**
2.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	4	–	–	6	3	4	**22**	**68**
3.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	4	4	3	1	3	6	5	**26**	**67**
4.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	4	–	–	6	–	3	**13**	**29**
5.	*Šimon Dalecký*	ZŠ a MŠ Klíč s.r.o. Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
6.	*Martin Ondruška*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
7.	*Barbora Tuháčková*	G Františka Křižíka, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus#Approximate_values

[18] Samozřejmě, podle údajů by to spíš mohl být např. polystyren, nicméně vlasce z polystyrenu nejsou běžné a nylon se pro tyto účely hodí více.

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	6	8	6	**37**	**112**
1.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	4	6	6	6	7	6	**35**	**106**
2.	*Jakub Ježek*	G B. Němcové, HK	–	5	3	6	3	8	4	**29**	**97**
3.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	–	4	3	6	6	4	6	**29**	**93**
4.	*Jiří Antoňů*	G, Špitálská, Praha	–	5	–	6	6	6	6	**29**	**92**
5.	*Zuzana Lisztwanová*	ZŠ a MŠ Třinec - Staré Město	–	4	6	6	4	6	5	**31**	**85**
6.	*Anna Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	6	6	6	5	5	**32**	**75**
7.	*František Račický*	ZŠ Jemnice	–	2	3	1	3	8	5	**22**	**73**
8.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	3	3	2	3	7	–	**18**	**58**
9.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**49**
10.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	4	–	–	6	–	–	**10**	**48**
11.	*Veronika Nečadová*	ZŠ Jemnice	–	2	3	1	4	3	3	**16**	**46**
12.–13.	*Martin Haikl*	G Týn nad Vltavou	–	3	–	–	3	6	1	**13**	**33**
12.–13.	*Tomáš Veselý*	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	4	–	2	4	–	5	**15**	**33**
14.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	3	–	–	5	–	–	**8**	**22**
15.	*Anna Gryčová*	ZŠ Husova, Liberec 5	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
16.	*Barbora Šišáková*	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
17.	*Jolana Chylíková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	6	8	6	**37**	**112**
1.	*Eva Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	6	7	6	**36**	**109**
2.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	–	5	3	6	6	6	5	**31**	**106**
3.	*Adam Šebesta*	Masarykovo G, Plzeň	–	4	3	4	6	–	6	**23**	**93**
4.	*Kateřina Zavadilová*	ZŠ Jílovská, Praha	–	4	3	2	6	5	6	**26**	**86**
5.	*Adam Krška*	G, Mikulov	–	5	–	–	4	6	5	**20**	**85**
6.	*Filip Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	3	6	–	5	5	5	**24**	**83**
7.	*Aleš Opl*	Gymnázium Praha 3	–	5	–	–	5	–	–	**10**	**71**
8.	*Adam Mára*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	2	2	3	4	0	2	**13**	**59**
9.–10.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	–	4	6	–	3	6	1	**20**	**56**
9.–10.	*Tereza Preclíková*	G Dobruška	–	2	–	–	5	–	–	**7**	**56**
11.	*Ondřej Valášek*	G, Nový Bydžov	–	2	1	1	2	1	4	**11**	**55**
12.	*Jakub Pelc*	G, Benešov	–	3	2	2	5	1	4	**17**	**53**
13.	*Sára Byšková*	ZŠ nám.Jiřího z Poděbrad, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**49**
14.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**44**
15.	*Natálie Křivancová*	G, Český Krumlov	–	4	2	–	4	–	6	**16**	**40**
16.–17.	*Luboš Petráň*	Biskupské G, České Budějovice	–	4	3	–	4	–	–	**11**	**35**
16.–17.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	–	4	–	2	–	5	–	**11**	**35**
18.	*Lukáš Tomoszek*	G, Třinec	–	4	–	–	3	–	3	**10**	**33**
19.	*Klára Barnatová*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
20.	*Alex Rosenbergová*	ZŠ a MŠ, Březová	–	4	–	–	2	–	–	**6**	**27**
21.	*Kryštof Rakovský*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
22.	*Vojtěch Stránský*	ZŠ a MŠ Osová Bítýška	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**20**
23.	*Aleš Manuel Papáček*	G, Třeboň	–	4	–	–	2	–	–	**6**	**19**
24.	*Kryštof Pravda*	G Mensa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
25.	*Markéta Bečvářová*	G, Písek	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**16**
26.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	–	3	–	–	–	–	2	**5**	**14**
27.	*Adam Baroš*	ZŠ Valašská Polanka	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**13**
28.	*Martin Klučka*	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	3	2	2	2	–	2	**11**	**11**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.