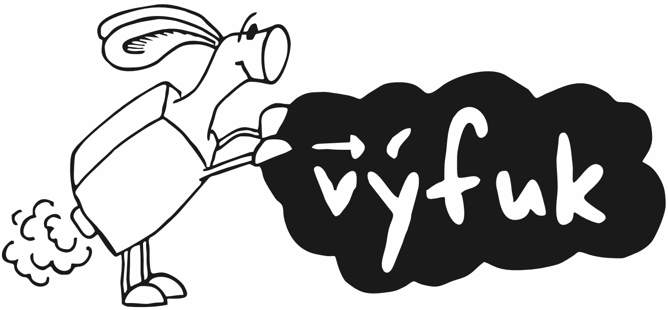


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

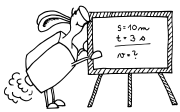
právě v rukou držíte již čtvrtou brožurku se zadáním nové série Výfuku. Také v ní naleznete Výfučtení o astronomických souřadnicích, pořadí a vzorová řešení druhé série.

Nezapomeňte se také v nadcházejících týdnech podívat do sekce *Pořadí* na našem webu – pokusíme se co nejdříve opravit vaše řešení třetí série, která rozhodnou o tom, zda budete na tábor pozváni řádně, nebo jako náhradníci.

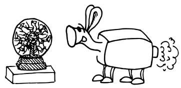
V poslední řadě bychom se chtěli omluvit za chybu, která se vyskytla v řešení páté úlohy v první sérii u koeficientu tření. Opravené vzorové řešení je již nahráno na webu a všechna vaše řešení byla znovu obodována.

Hodně zábavy s novou dávkou úloh vám přejí

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání IV. série



Termín odeslání: 5. 3. 2018 20.00

Úloha IV.1 ... Na prášky ❻ ❼ — 5 bodů

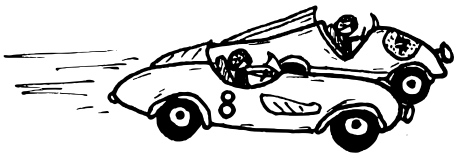
Tomáš je nemocný a dostal od lékaře čistou účinnou látkou ve formě prášku, ze kterého si má připravit kapky s maximální koncentrací $15\,\mathrm{g{\cdot}l^{-1}}$. Tomáš si kapky připravuje tak, že vezme $5\,\mathrm{g}$ prášku a rozpustí ho ve $100\,\mathrm{ml}$ vody. Následně polovinu roztoku odlije a zbytek dopustí čistou vodou. V dalším kroku odlije $3/4$ roztoku a roztok dopustí vodou do původního množství. Ale protože má pocit, že už jsou kapky moc naředěné, přisype ještě $1\,\mathrm{g}$ prášku, odlije $20\,\%$ roztoku a naposledy naředí vodou. Jakou koncentraci má výsledný roztok? Dodrží Tomáš maximální koncentraci předepsanou lékařem?

Úloha IV.2 ... Káji stan ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Kája si chtěla postavit jednoduchý stan s trojúhelníkovým vchodem, pro který zatluče do země dva kolíky na sousedních rozích plachty a mezi ně kůl, na který plachtu vyzvedne. Zapomněla si doma metr, ale i přes to chtěla svůj stan postavit dokonale přesně. Proto jí nezbylo než měřit vše v pídích.[1] Do země kolmo zabodla kůl o výšce $h = 12$ pídí a zatloukla první kolík ve vzdálenosti $c_\mathrm{b} = 9$ pídí od kůlu po zemi na jednu stranu. V jaké vzdálenosti c_a od kůlu (v pídích) musí Kája zatlouci druhý kolík na opačné straně, aby se plachta, která má délku strany $L = 35$ pídí, mezi kolíky na vzpřímeném kůlu napjala?

Úloha IV.3 ... Oktávia ide stovkou ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Ve vytrvalostním automobilovém závodě se závodníci Pepa a Lukáš předhánějí na posledních několika kilometrech cílové rovinky. Pepa věří, že má vítězství v kapse, a proto jede jen rychlostí $v_\mathrm{P} = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. I když ho Lukáš předjíždí rychlostí v_L o $30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ větší, Pepa nepřidává plyn a do cíle je pevně rozhodnut dojet stálou rychlostí. A opravdu! Když je Lukáš 1 km před Pepou, selhává mu motor a Lukáš tak rovnoměrně zpomaluje celou bolestnou 1 min. Takto Lukáš zpomalí až na nejmenší rychlost v, při které mu však motor opět naskočí a on náhle se stejně velkým zrychlením opět zrychluje až na svou původní rychlost v_L. Právě když dosáhne této rychlosti, přijíždí do cíle, a to právě ve stejný okamžik jako Pepa, který po celou dobu zachovával chladnou hlavu. Je to sice remíza pro Pepu, ale velké štěstí pro Lukáše! Na jakou nejmenší rychlost Lukáš zpomalil kvůli selhání motoru?



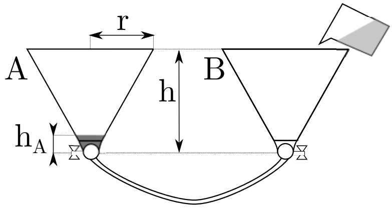
Úloha IV.4 ... A co takhle rtuť ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Danovi zbyly dva velké nevyužité trychtýře A a B ve tvaru kuželu, oba s poloměrem podstavy $r = 12{,}5\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 15\,\mathrm{cm}$. Danovi také zbylo hodně rtuti od posledního pokusu o výrobu tlakoměru a rozhodl se trochu experimentovat s hydrostatickým tlakem. Trychtýře upevnil vedle sebe do stejné výšky, ústími dolů, přičemž je spojil tenkou hadičkou s uzavřenými ventily na koncích. Do trychtýře A potom začal nalévat rtuť o hustotě $\varrho_\mathrm{Hg} = 13\,600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, dokud její hladina nebyla $h_\mathrm{A} = 1\,\mathrm{cm}$ nad ústím. Jaký objem vody V_B o hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ musí Dan nalít do trychtýře B, aby po ustálení a otevření ventilů na hadičce nedošlo k jakékoli změně výšky hladin v trychtýřích? Objem, o který je kužel zkrácen na svém ústí, a objem hadičky zanedbejte.

Úloha IV.5 ... Twilight ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Gravitační přitažlivost tělesa popisujeme gravitačním zrychlením, jehož hodnotu můžeme určit z jeho hmotnosti a naší vzdálenosti od tělesa. Když se však na Zemi postavíme na váhu, jí udaný

[1] Píď je stará jednotka odvozená od vzdálenosti mezi konci malíčku a palce na roztažené ruce. Právě odměřování vzdálenosti pomocí „chůze“ ruky do strany na malíčku a palci se říká „pídění“.



výsledek neovlivňuje jen zrychlení gravitační, ale *tíhové*, do něhož je přičten také vliv odstředivého zrychlení způsobeného rotací planety. Nezapomínejme však na vliv ostatních nebeských těles!

(1) Bez uvažování přitažlivosti Měsíce a Slunce, spočtěte povrchová tíhová zrychlení na pólu a na rovníku Země.
(2) Jaké bude toto zrychlení na rovníku, pokud ho budeme určovat při zatmění Slunce s oběma tělesy v zenitu (přímo nad hlavou)?[2]
(3) A jak se změní při zatmění Měsíce, kdyby zůstal v zenitu a Slunce se objevilo v nadiru, tj. přímo pod nohama?
(4) Kolikrát dále by se musel Měsíc vzdálit od Země v předchozím úkolu, aby nám váha, když se na ni na rovníku postavíme, ukazovala stejnou hodnotu, jako za podmínek z prvního úkolu?

Úloha IV.E ... Rozmrzni! ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Jak jistě víte, k roztání ledu je potřeba určité množství tepla, které je závislé na jeho hmotnosti. Změřte měrné skupenské teplo tání ledu pomocí rychlovarné konvice, a to tak, že nejprve ohřátím daného množství vody určíte její výkon, a poté ohřátím vody s ledem určíte měrné skupenské teplo tání ledu. Pokud nemáte rychlovarnou konvici, nezoufejte! Měření můžete provést i ohřátím vody na sporáku, avšak musíte si dát pozor, abyste neměnili jeho výkon během jednotlivých měření. Nezapomeňte pokus několikrát opakovat a uvážit chybu měření. Na závěr se zkuste zamyslet nad jejími příčinami.

Úloha IV.C ... Sluneční ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček si pořídil sextant[3] a říkal si, co by tak mohl změřit. Podíval se přesně jižním směrem, kde spatřil Slunce a jeho odraz na vodní hladině. Změřil proto úhel mezi nimi a zjistil, že je přesně 60 stupňů.

(1) Určete maximální výšku nad obzorem nebeského rovníku, víte-li, že pozoroval z Prahy.
(2) Určete deklinaci Slunce v době pozorování.
(3) Víme také, že to bylo v druhé polovině kalendářního roku. Určete datum pozorování z tabulek na internetu.[4]
(4) Nakonec určete rektascenzi Slunce a místní hvězdný čas v době pozorování.
(5) Pokud by Výfuček pozoroval celý rok, jaký největší úhel Slunce nad obzorem by naměřil?

[2] Uvažujte zde i v dalších úkolech tabulkové střední vzdálenosti mezi tělesy.
[3] Sextant je přenosný přístroj pro měření úhlové vzdálenosti dvou objektů.
[4] Užitečnou tabulku můžete nalézt na `http://rocenka.observatory.cz/download/hr2018.pdf`

Výfučtení: Astronomické souřadnice

Představme si naši oblíbenou hvězdu, kterou chceme ukázat našemu kamarádovi. Kamarád je ale zrovna na dovolené, a tak mu ji nemůžeme ukázat přímo. Rádi bychom mu tedy popsali, kde se naše oblíbená hvězda nachází, aby ji byl schopný najít. Jak to ale udělat?

Obzorníkové souřadnice

Nejjednodušší způsob jak změřit polohu hvězdy na obloze je změřit její výšku nad obzorem h a azimut A. Obě tyto veličiny jsou úhlové a udávají se ve stupních. Výška nad obzorem nabývá od 0° pro horizont až po 90° pro zenit.[5] Azimut si zase bere za výchozí (referenční) směr sever a přibývá na východ kolem dokola rovnoběžně s horizontem. Tedy, co je od pozorovatele přesně na východ, má azimut 90°, co je na jih, tak má $A = 180^\circ$, atd.[6]

Představme si, že se naše hvězda nachází 40° nad obzorem přímo na jihu, tedy s azimutem 180°. Pokud náš kamarád bude pozorovat na stejné zeměpisné šířce ve „vhodný“ čas,[7] pak s těmito informacemi naši oblíbenou hvězdu správně nalezne. Pokud by se náš kamarád na oblohu podíval o něco později, dojde mezi tím k pootočení hvězdné oblohy a na místě, které jsme mu popsali, se bude nacházet úplně jiná hvězda. Neboť, stejně jako zapadá a vychází Slunce, tak se i noční obloha otáčí, a proto potřebujeme kromě toho, kam se má kamarád koukat, říci i kdy se koukat. Podobný problém nastává, pokud by se nacházel na místě s jinou zeměpisnou šířkou.

Obzorníkové souřadnice jsou sice relativně lehké na popis, ale zároveň jsou v čase i místě proměnné. Proto je nutné ke každému popisu přidávat informaci o místě a čase pozorování, abychom si mohli souřadnice přepočítat pro jiná pozorování s rozdílným místem na Zemi či časem. Jak jistě sami nahlédnete, takové souřadnice nejsou pro pozorování příliš praktické a bylo by dobré si zavést takové souřadnice, které se nebudou měnit s místem ani časem pozorování.

Rovníková soustava souřadnic

Možná jste si všimli, že celá obloha se v noci točí kolem osy, která prochází velice blízko Polárky. Čím dále se pozorovaná hvězda nachází od Polárky, tj. čím větší je úhel mezi pozorovanou hvězdou a Polárkou, tím na obloze opisuje větší kružnici.

Chceme tedy v první řadě vymyslet něco jako analogii zeměpisné šířky, ale na obloze, protože takové souřadnice budou záviset na poloze pozorovatele. Obdobně jako na Zemi se měří zeměpisná šířka od rovníku, potřebujeme podobnou referenci i při měření na hvězdné obloze. Můžeme tedy zavést *nebeský rovník*, a to jako průmět zemského rovníku na nebeskou sféru. Představme si, že doprostřed Země umístíme žárovku a v místě, kde je rovník, bude tenká

[5] Zenit, neboli nadhlavník, je bod na obloze, který se nachází přímo nad pozorovatelem.

[6] Používají se i jiné systémy – v česky psané literatuře se často setkáme naopak s jihem jako referenčním směrem a pro něj je pak $A = 0^\circ$, nicméně ve zbytku Výfučtení i v úloze C budeme vycházet z dohody na směru výše uvedené.

[7] Ve stejný místní astronomický čas. Tento pojem vysvětlíme později, zatím si tedy vystačíme s „vhodným“ časem.

škvíra, kterou bude moct světlo vycházet ven, čímž se na hvězdné obloze vykreslí nebeský rovník. Budeme-li tedy na Zemi na jednom z pólů, uvidíme nebeský rovník přímo na horizontu, naopak, budeme-li na Zemi stát přímo na rovníku, nebeský rovník nám bude procházet přímo nad hlavou a bude kolmý k horizontu.

Nyní můžeme zavést **deklinaci**, tedy analogii zeměpisné šířky. Měříme ji ve stupních vůči nebeskému rovníku a značí se δ. Body na nebeském rovníku mají tedy deklinaci $\delta = 0°$, severní nebeský pól má deklinaci $\delta = +90°$ a jižní $\delta = -90°$. Nebeské póly jsou myšlené body na obloze, kterými prochází osa rotace. Leží přímo nad zemskými póly – budeme-li na severním pólu, přímo nad hlavou budeme mít severní nebeský pól s Polárkou. Otáčení hvězdné oblohy vnímáme kvůli rotaci Země, takže osa otáčení Země je doopravdy shodná s osou otáčení nebeské sféry. Podotkněme, že podobně jako Zemi můžeme rozdělit na severní a jižní polokouli, i hvězdnou oblohu rozdělujeme podle nebeského rovníku na severní a jižní.

Pojďme se podívat, jaké hvězdy nám prochází přímo nad hlavou v závislosti na tom, odkud pozorujeme. Budeme-li stát přímo na rovníku, nebeský rovník budeme mít přímo nad sebou, za 24 hod nám tedy zenitem projdou úplně všechny hvězdy, které na něm leží. Tyto hvězdy, jak jsme si již řekli, mají deklinaci $\delta = 0°$. Pokud budeme stát na severním pólu, v zenitu budeme mít pouze hvězdy s deklinací $\delta = 90°$. Není tedy složité si domyslet, že budeme-li stát na zeměpisné šířce φ, můžeme v zenitu pozorovat hvězdy s deklinací $\delta = \varphi$.

Aby naše souřadnice byly kompletní, musíme zavést ještě analogii zeměpisné délky, kterou nazveme **rektascenze** a značíme ji α. Samozřejmě budeme používat poledníky, které budou kolmé k nebeskému rovníku, ale jak určíme ten nultý?

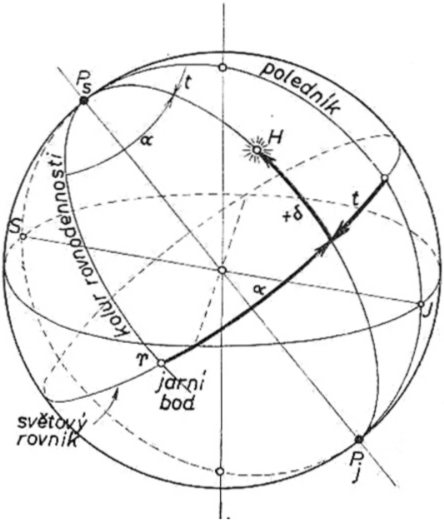
Zatím jsme si definovali rovinu nebeského rovníku, nicméně ta není jediná významná. Jak možná víte, zemská osa otáčení je vůči rovině oběhu Země okolo Slunce pootočena o 23,5°. Pokud bychom celý rok zaznamenávali každý den ve stejný čas polohu Slunce na hvězdné obloze vůči ostatním hvězdám, zjistili bychom, že se vůči nim pohybuje po kružnici, která je oproti nebeskému rovníku pootočena o 23,5°, stejně jako je vychýlení zemské osy. To mimo jiné znamená, že deklinace Slunce se v průběhu roku mění v rozmezí $-23{,}5°$ a $23{,}5°$. Kružnice, kterou na obloze opisuje, se nazývá ekliptika. Ta má s nebeským rovníkem dva průsečíky – jarní a podzimní bod. Pokud na Zemi nastává jarní rovnodennost, nachází se Slunce přímo v jarním bodě, a protože se tak děje na jaře, je zřejmé, odkud pochází označení tohoto bodu. Jelikož se poloha těchto dvou bodů vůči ostatním hvězdám nemění, tak nebeský poledník, který prochází jarním bodem, se volí jako *ten referenční*, tedy nultý.

Rektascenze se typicky neměří ve stupních, ale udává se v hodinách, minutách a sekundách. Měří se proti směru otáčení oblohy a za předpokladu, že máme jarní bod, resp. nultý poledník, v nějakém bodě na obloze, nám říká, za jak dlouho nám daným bodem na obloze projde i naše hvězda. Přepočet rektascenze na stupně je jednoduchý, neboť za 24 hod se opíše celý kruh (360°), a tak jedné hodině odpovídá 15°.

Rovníková soustava souřadnic se tedy velice podobá té, kterou používáme pro popis na Zemi. Má dvě souřadnice – **deklinaci**, která je ekvivalentem zeměpisné šířky, a **rektascenzi**, která je ekvivalentem zeměpisné délky. Její největší výhodou je, že oproti azimutálním souřadnicím jsou tyto souřadnice absolutní, což znamená, že se nemění v závislosti na místě ani času pozorování.

Hodinový úhel a místní hvězdný čas

Poledník, který prochází místem odkud pozorujeme, lze vyznačit i na obloze. Jedná se o nebeský poledník, který prochází zenitem a označuje se jako *meridián* neboli místní poledník. **Hodinový**



Obr. 1: Rovníkové souřadnice. Vyznačen jarní bod, meridián (v obr. jen jako *poledník* (tento pojem vysvětlíme později), rektascenze α, deklinace δ a hodinový úhel t pozorované hvězdy H. Podotkněme, že pozorovatel se nachází ve středu této nebeské sféry a nemůže ji pozorovat celou, neboť část je zakrytá Zemí. Zdroj obrázku: Základy astronomie v příkladech, J. Široký, M. Široká

úhel t je úhel mezi meridiánem a poledníkem, který prochází měřeným bodem. Stejně jako rektascenze se měří v hodinách a říká nám, před jakou dobou měřený bod procházel meridiánem. A protože hvězdy na obloze opisují kružnice, dokážeme lehce nahlédnout, že při průchodu meridiánem budou nejvýše nad obzorem.

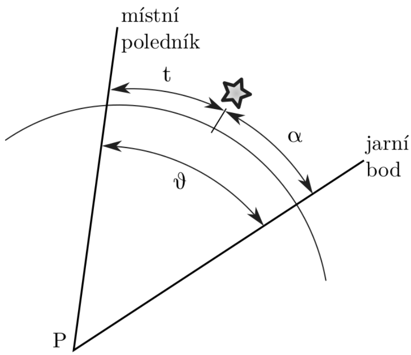
Místní hvězdný čas je hodinový úhel jarního bodu a budeme jej značit ϑ. To znamená, že nachází-li se jarní bod přímo nad jihem, tedy na místním poledníku, je místní hvězdný čas 0 h. Jarní bod leží na rovníku, takže když zapadá, tak je místní hvězdný čas 6 h (šest hodin poté, co prošel meridiánem), a když vychází, tak je 18 h (tedy za šest hodin projde meridiánem).

Jak jsme již řekli, rektascenze hvězdy je její vzdálenost měřená po rovníku od jarního bodu, její hodinový úhel udává její vzdálenost k místnímu poledníku, a protože hodinový úhel jarního bodu udává místní hvězdný čas, je roven jejich součtu, tedy

$$\vartheta = t + \alpha\,.$$

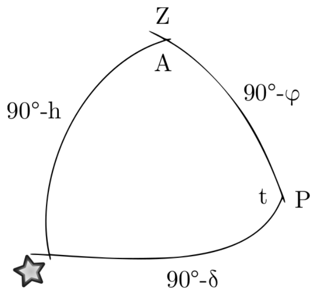
Převod mezi obzorníkovými a rovníkovými souřadnicemi

Jak jsme si ukázali, obzorníkové souřadnice jsou velmi jednoduché a jednoduše se měří, ale závisí na tom, odkud a kdy měříme. Oproti tomu rovníkové souřadnice se špatně měří, ale mají tu výhodu, že jsou na celém světě stejné. Toho lze využít a z měření polohy hvězd lze určit, kde se na Zemi nacházíme.



Obr. 2: Místní hvězdný čas ϑ, rektascenze α měřené hvězdy a její hodinový úhel t. Pozorovatel se nachází v bodě P.

Základním prvkem pro převod mezi těmito souřadnicemi je tzv. nautický sférický trojúhelník, viz obrázek 3. Jedná se trojúhelník sestrojený na hvězdné obloze, v jehož jednom vrcholu je Polárka, ve druhém je zenit pozorovatele a ve třetím je pozorovaná hvězda. Jak jsme již ukázali, pól je bod význačný pro souřadnice rovníkové, zatímco zenit je význačný pro ty obzorníkové.



Obr. 3: Nautický trojúhelník: Z je zenit, P je severní pól; ve třetím vrcholu pak leží pozorovaná hvězda.

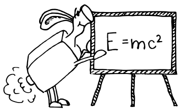
Nesmíme zapomenout, že nebeská sféra je koule. Geometrie na kouli se zásadně liší od té v rovině, se kterou jsme dobře obeznámeni – např. pro tento trojúhelník neplatí, že součet jeho vnitřních úhlů je 180°. Obecně vzato, geometrie na kouli je mnohem složitější, a proto tu nebudeme odvozovat žádné vztahy. Pokud bychom ale taková odvození provedli, zjistili bychom, že ze známé polohy hvězd v rovníkových souřadnicích, ze změření polohy stejných hvězd v obzorníkových souřadnicích a ze známého času dokážeme přesně určit svoji polohu. Toho hojně využívali mořeplavci, kteří si s sebou vždy vezli přesné hodiny a každou noc měřili polohu známých hvězd, aby věděli, kde se nachází. Od tohoto využití onoho trojúhelníku také pochází jeho název nautický, což znamená námořní. Stejný způsob lokalizace používali ještě v nedávné době dokonce i piloti během dlouhých letů přes moře.

Závěr

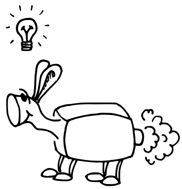
Ukázali jsme si dva základní souřadnicové systémy používané v astronomii. Nejsou rozhodně jediné, existuje jich ještě několik dalších, nicméně my jsme si ukázali ty nejdůležitější. Jak jsme zmínili na konci Výfučtení, znalost těchto dvou souřadnicových systémů byla do nedávné historie velmi důležitá, neboť jako jediná umožňovala přesné určování polohy v místech, kde poloha jinak určit nešla. Jednalo se o velmi přesnou metodu, která se používala od středověku až do druhé poloviny 20. století a byla překonána až příchodem GPS.

Podotkněme také, že Slunce se v průběhu roku vůči ostatním hvězdám pohybuje, avšak v krátkém časovém intervalu (typicky jeden den) je jeho pohyb vůči hvězdám tak malý, že ho můžeme zanedbat a předpokládat, že se během něj vůči nim nepohybuje. To ale pak znamená, že všechny výše zmiňované vztahy platí i pro Slunce.

Na závěr ještě upřesněme, že navigace pomocí hvězd tak, jak jsme ji popsali výše, je na Zemi možná jen díky tomu, že uražená vzdálenost na Zemi je v porovnání se vzdálenostmi ve vesmíru zanedbatelná, a tak se nám hvězdy jeví jako nehybné. Pokud bychom se pohybovali vesmírem na velké vzdálenosti vesmírnou lodí, polohy hvězd vůči sobě by se měnila a navigace pomocí nich by byla mnohem složitější, než jak jsme si ji popisovali v případě mořeplavců.



Řešení II. série



Úloha II.1 ... Opisování knih

5 bodů; průměr 4,11; řešilo 9 studentů

Tři středověcí mniši dostali za úkol opsat 600 stran Bible. Jeden zvládne přepsat za 3 dny 2 strany, druhý za 2 dny 3 strany a třetí za 4 dny 6 stran. S přepisováním začali ve středu a od pondělí se k nim přidal další mladý mnich, který dokáže opsat za 1 den jen 0,5 *strany. Vypočítejte, za kolik dnů od středy společně opíší všechny stránky.*

Spočtěme, kolik stránek denně jsou mniši schopni opsat. První mnich denně přepíše 2/3 stránky, třetinu toho, co za tři dny. Píše tedy rychlostí 2/3 stran/den. Druhý mnich přepíše za jeden den 3/2 strany, polovinu toho, co za dva dny. Píše tedy rychlostí 3/2 stran/den. Třetí mnich přepíše za jeden den 3/2 strany – čtvrtinu toho co za čtyři dny. Píše tedy rychlostí 3/2 stran/den.

V zadání se mluví o tom, že čtvrtý mnich v průběhu jednoho dne přepíše jen 1/2 strany, a tak píše rychlostí 1/2 stran/den.

Opisují-li pouze první tři mniši, jejich rychlosti se sčítají, a proto opíší ve stranách/den:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{11}{3}\,.$$

Opisují-li všichni čtyři mniši, jejich rychlost je:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{25}{6}\,.$$

Označme počet dní, které mniši potřebují k opsání celé Bible, jako neznámou x. Ze zadání víme, že prvních pět dní (od středy do neděle) opisují pouze tři mniši rychlostí 11/3 stran/den. Po zbylých $x-5$ dní opisují všichni rychlostí 25/6 stran/den. Již z pohledu na jednotky nás může napadnout, že pokud chceme dostat počet opsaných stran při práci mnichů za určitý počet dnů, musíme vynásobit počet jimi opsaných stran za den (rychlost) počtem dní (časem). Celkem opíší 600 stran. Zapsáno pomocí rovnice

$$5\,\mathrm{dní}\cdot\frac{11}{3}\,\mathrm{stran/den}+(x-5\,\mathrm{dní})\cdot\frac{25}{6}\,\mathrm{stran/den}=600\,\mathrm{stran}\,.$$

Z této rovnice není již složité vyjádřit celkový počet dní x, které mniši potřebují k opsání celé Bible. Dostáváme tedy:

$$x=\left(600-5\cdot\frac{11}{3}\right)\frac{6}{25}+5\,\mathrm{dní}\,,$$
$$x=144{,}6\,\mathrm{dní}\,.$$

Tímto jsme zjistili, že mniši potřebují k přepsání celé Bible $x=144{,}6$ dní, s opisováním tedy skončili za 145 dní.

Během výpočtů si můžeme všimnout paralely s počítáním běžné rychlosti. Pokud počítáme například pohyb auta, figuruje nám ve výpočtech jeho rychlost v, čas t a uražená vzdálenost s a platí: $s/v=t$. Nyní místo vzdálenosti s máme počet stran (jelikož stránky jsou stejně široké, můžeme to doslova interpretovat jako napsanou vzdálenost), místo rychlosti v máme rychlost opisování mnichů a čas zůstává stejný. Proto jsme čas vypočítali podobně, a to sice jako napsanou vzdálenost vydělenou rychlostí opisování mnichů.

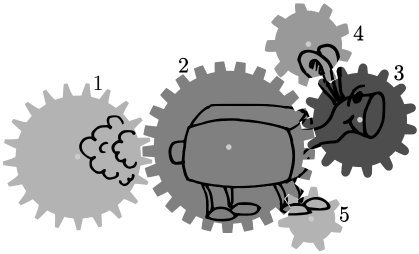
Viktor Materna

Úloha II.2 ... Spojená kolečka

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 37 studentů

Na Matfyzu si velmi váží Výfuku, a proto se rozhodli sestrojit pohybující se soustavu ozubených kol s obrázkem Výfučka, která bude zdobit hlavní budovu. První kolečko bude mít 21 zubů, druhé 25 zubů, třetí 15 zakulacených zubů, čtvrté kolečko bude s 9 zuby. Poslední páté kolečko má mít pouhých 7 zubů. Všechna kolečka se mají točit zároveň a zapadat do sebe podle obrázku. Kolikrát se otočí každé z nich, než si budeme moci opět prohlédnout Výfučka jako na začátku?

Jelikož do sebe kolečka musí zapadat a pořád se dotýkají, trvá otočení o jeden zub na všech kolečkách stejnou dobu. Abychom si mohli prohlédnout Výfučka jako na začátku, musí se každé



kolečko otočit o celočíselný počet otáček. Aby se kolečko otočilo kolem dokola, musí se otočit o všechny svoje zuby.

Všechna kolečka se logicky musí otočit o stejný počet zubů. Chceme tedy, aby tento celkový počet zubů byl dělitelný počtem zubů každého kolečka a zároveň chceme, aby toto číslo bylo nejmenší možné. Dosáhneme toho tak, že počet zubů, o který jsme soustavu otočili, vydělený jakýmkoliv z počtu zubů na kolečkách, bude celé číslo, což znamená, že se všechna kolečka otočila o celý počet otáček. Námi hledané číslo se nazývá nejmenší společný násobek, v tomto případě hledáme nejmenší společný násobek čísel udávající počet zubů na jednotlivých kolečkách.

Abychom ho mohli spočítat, rozložíme jej na prvočísla (tzn. hledáme taková prvočísla, která po vynásobení dají rozkládané číslo).

$$\begin{aligned} 21 &= 3 \cdot 7 \\ 25 &= 5 \cdot 5 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \\ 9 &= 3 \cdot 3 \\ 7 &= 7\,. \end{aligned}$$

Nejmenší společný násobek čísel je takové číslo, z jehož prvočíselného rozkladu dokážeme poskládat všechna původní čísla a přitom v něm není žádné další prvočíslo navíc. Lze ho tedy spočítat jako součin nejvyšších možných mocnin všech prvočísel ze všech prvočíselných rozkladů. Pro naše čísla vidíme, že např. 3 se v prvočíselném rozkladu nejmenšího společného násobku musí objevovat minimálně dvakrát, stejně jako 5. Pro násobek n dostáváme tedy

$$n = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1\,575\,.$$

Každé kolečko se tedy otočí o 1 575 zubů. Nyní tento počet pouze vydělíme počtem zubů jednotlivých kol, čímž zjistíme, kolikrát se každé kolečko otočilo:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1\,575}{21} = 75\,, \\ n_2 &= \frac{1\,575}{25} = 63\,, \\ n_3 &= \frac{1\,575}{15} = 105\,, \\ n_4 &= \frac{1\,575}{9} = 175\,, \\ n_5 &= \frac{1\,575}{7} = 225\,. \end{aligned}$$

Abychom mohli Výfučka opět vidět v jeho plné kráse, musí se první kolo otočit 75krát, druhé kolo 63krát, třetí 105krát, čtvrté 175krát a poslední páté 225krát.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... Roztavená kulka

6 bodů; průměr 4,94; řešilo 31 studentů

Tom viděl na nedávné pouti podivný magický trik. Zdejší kouzelník naládoval pušku olověnou kulkou, zamířil na obrovský terč a vystřelil. Ačkoliv obecenstvo dosvědčilo, že náboj puška skutečně vystřelila, po nárazu nebylo po kulce ani stopy.

Toma po chvilce přemýšlení napadlo, že by trik mohl být způsoben tím, že se olověná kulka jednoduše roztavila. Pomozte Tomovi vypočítat minimální rychlost kulky v okamžiku nárazu do terče, jestliže zjistil, že kulka váží $0{,}5\,\mathrm{g}$, *měrná tepelná kapacita olova je* $129\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, *měrné skupenské teplo tání olova je* $23{,}2\cdot 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$, *teplota tání olova je* $328\,^\circ\mathrm{C}$ *a okolní teplota je* $20\,^\circ\mathrm{C}$. *Také pro zjednodušení uvažujte, že terč byl tak pevný, že se s ním nic nestalo, a proto se všechna kinetická energie přeměnila na teplo, které kulku ohřálo.*

Na počátku našeho řešení si musíme uvědomit, jak velkou energii kulka má a jak se během jejího pohybu mění jeden druh energie na druhý.

Po výstřelu získá kulka kinetickou energii, kterou má každé těleso, které je v pohybu. Spočítáme ji jako $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, kde m je hmotnost a v rychlost kulky. Při dopadu na terč se veškerá kinetická energie přemění na teplo,[8] díky kterému se kulka roztaví.

Výpočet tepla potřebného k roztavení kulky se skládá ze dvou částí – z tepla Q_1, které musí kulka přijmout, aby se ohřála na svou teplotu tání (teplotu tání olova), a na skupenské teplo tání L_t potřebné přímo k samotnému roztavení. Teplo Q_1 spočteme jako

$$Q_1 = mc\Delta t\,,$$

pro skupenské teplo tání máme vzoreček

$$L_\mathrm{t} = ml_\mathrm{t}\,,$$

kde m je hmotnost kulky, c je měrná tepelná kapacita olova, l_t je měrné skupenské teplo tání a Δt nám říká, o kolik stupňů se kulka ohřála. Jedná se tedy o rozdíl teploty kulky před výstřelem a její teploty po nárazu, tedy teploty tání olova. Nezapomeňme, že kulka má na začátku stejnou teplotu jako její okolí.

Protože zanedbáváme odpor vzduchu, v průběhu letu kulky se energie nikde neztrácí, takže kinetická energie kulky na počátku musí být rovna teplu na konci, proto můžeme napsat rovnici

$$\frac{1}{2}mv^2 = mc\Delta t + ml_\mathrm{t}\,.$$

Dosazením za $\Delta t = t_1 - t$ můžeme následně vyjádřit rychlost v, čímž dostaneme vzorec pro výpočet minimální rychlosti kulky, aby se po nárazu roztavila

$$v = \sqrt{2(c(t_1 - t) + l_\mathrm{t})}\,.$$

[8] Ve skutečnosti platí zákon zachování hybnosti, nicméně jak nám říká zadání, můžeme předpokládat, že se přemění veškerá kinetická energie na teplo. V tomto případě se dopouštíme pouze zanedbatelné chyby.

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že minimální rychlost ocelové kulky při výstřelu by musela být $v \doteq 354{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Ve skutečnosti by rychlost musela být výrazně vyšší, protože kulka by se musela pohybovat nadzvukovou rychlostí. Odporové síly, které by při nadzvukové rychlosti na kulku působily, by byly relativně velké, a proto by se značná část kinetické energie kulky „spotřebovala" na jejich překonání. Dále, při takhle velkých rychlostech bychom nemohli zanedbat energii, která by se „spotřebovala" na deformaci terče. Museli bychom vzít do úvahy zákon zachování hybnosti, z něhož bychom zjistili, že potřebná rychlost kulky by byla ještě vyšší. Kulky se běžně takovými rychlostmi nepohybují, a proto by kouzelníkův trik musel fungovat na jiném principu.

Karolína Letochová

Úloha II.4 ... Koupelnový bojler

6 bodů; průměr 4,79; řešilo 33 studentů

Peťa se vrátila z procházky celá zmrzlá a ráda by si dala horkou koupel. V koupelně má bojler s účinností $\eta = 80\,\%$, který je připojen do zásuvky s efektivním napětím $U_\mathrm{ef} = 230\,\mathrm{V}$ a při svém provozu spotřebovává proud o efektivní hodnotě $I_\mathrm{ef} = 10\,\mathrm{A}$.[9] Peťa si napustí ze studny do bojleru $100\,\mathrm{l}$ vody o teplotě $15\,^\circ\mathrm{C}$. Chtěla by koupel o teplotě $40\,^\circ\mathrm{C}$. Za jak dlouho se jí ohřeje voda na napuštění vany, jestliže ji napouští pouze z bojleru? Tepelné ztráty do okolí zanedbejte.

Nejdříve si spočteme, jakou energii musíme dodat $100\,\ell$ vody, aby se ohřála na $40\,^\circ\mathrm{C}$. Budeme vycházet ze vztahu pro teplo

$$Q = mc\Delta t\,,$$

kde je Q dodaná energie, m hmotnost ohřívané vody, c je měrná tepelná kapacita vody a Δt je změna teploty vody. Hmotnost vody spočteme jednoduše pomocí hustoty, která činí $\varrho = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, jako

$$m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^3} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m^3} = 100\,\mathrm{kg}\,.$$

Měrná tepelná kapacita je konstanta a je dána druhem látky, kterou ohříváme. U vody je známo, že má hodnotu zhruba $c = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Dále potřebujeme spočítat teplo, které dodá bojler vodě. Víme, že bojler je napájen ze sítě s napětím $U_\mathrm{ef} = 230\,\mathrm{V}$ a proudem $I_\mathrm{ef} = 10\,\mathrm{A}$. Jde o střídavé napětí a proud, nicméně v obou případech máme zadány jejich efektivní hodnoty. Tedy hodnoty stejnosměrného napětí a proudu takových, že za stejný čas vykonají stejnou práci jako skutečné střídavé napětí a proud. Pro elektrický výkon bojleru můžeme psát

$$P_\mathrm{ef} = U_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef}\,.$$

Bojler má účinnost pouze $\eta = 80\,\%$, na ohřev vody se použije tedy pouze $80\,\%$ z jeho výkonu. Teplo, které dodá bojler vodě za čas T, můžeme tedy vyjádřit jako

$$Q = \eta P_\mathrm{ef} T\,.$$

[9] Ve skutečných zásuvkách máme tzv. střídavý proud, kterému se v čase periodicky mění velikost napětí a proudu. Abychom nemuseli počítat s časově proměnnými napětími a proudy, zavádí se efektivní hodnoty napětí a proudu. Tyto efektivní hodnoty nám říkají velikost stejnosměrného napětí, resp. proudu, se stejným průměrným výkonem jako původní časově proměnné napětí, resp. proud. Můžeme tedy uvažovat, že elektřina v zásuvce má konstantní napětí i proud, jejichž velikost odpovídá efektivním hodnotám.

Dosazením z těchto rovnic do první a vyjádřením času T dostáváme konečný vztah, do kterého už můžeme dosadit známé hodnoty:

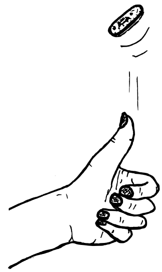
$$T = \frac{mc\Delta t}{\eta U_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef}} = \frac{100\,\mathrm{kg}\cdot 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}\cdot 25\,^\circ\mathrm{C}}{0{,}8\cdot 230\,\mathrm{V}\cdot 10\,\mathrm{A}} \doteq 5\,679\,\mathrm{s} \doteq 1\,\mathrm{h}\,34\,\mathrm{min}\,39\,\mathrm{s}\,.$$

Peti se tedy voda na napuštění vany ohřeje za asi hodinu a půl.

Robert Gemrot

Úloha II.5 ... Vyhazování mincí

7 bodů; průměr 4,95; řešilo 22 studentů



Při čekání na ústní část zkoušky si Simča chtěla zkrátit dlouhou chvíli, a tak si pohazovala mincí vážící $m = 10\,\mathrm{g}$. Za chvilku ji napadlo, jak vysoko by musela mincí hodit, aby jí po 10 minutách, kdy Simči začíná zkouška, spadla do druhé dlaně.

(a) *Jak vysoko musí mince vyletět, aby Simči spadla za 10 minut do druhé dlaně, která je od házející dlaně vzdálena 15 centimetrů? Uvažujte, že tíhové pole se podél celé dráhy letu mince nebude měnit.*

(b) *Jaká bude počáteční rychlost mince ve svislém a ve vodorovném směru?*

(c) *Jakou práci Simča hodem vykoná?*

(a) Když Simča vyhazuje minci z jedné ruky do druhé, jedná se o šikmý vrh vzhůru. Mince se během cesty do Simčiny druhé dlaně bude pohybovat po parabole, polovinu času se bude pohybovat směrem nahoru a druhou polovinu směrem dolů. Tyto dvě části letu jsou pro parabolu identické, jen probíhají v opačném směru. Pohyb mince můžeme rozdělit na dva vůči sobě nezávislé pohyby – pohyb ve svislém směru, kdy se jedná o pohyb rovnoměrně zpomalený/zrychlený, a na pohyb ve vodorovném směru, kdy se jedná o rovnoměrný přímočarý pohyb. Pokud budeme nyní uvažovat jenom pohyb ve svislém směru, a to jeho druhou polovinu, jedná se o volný pád, což je vlastně rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g s nulovou počáteční rychlostí. Vzdálenost, kterou těleso padající volným pádem urazí za čas t je

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

čili za $5\,\mathrm{min} = 300\,\mathrm{s}$ urazí dráhu $h = (1/2)\cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot(300\,\mathrm{s})^2 = 450\,000\,\mathrm{m} = 450\,\mathrm{km}$. Počítáme s časem pět minut, jelikož díky již zmíněné symetrii mezi pádem a stoupáním mince trvá čas obou těchto částí stejně, a tak jsme celkový čas vydělili dvěma. Mince by tedy musela vyletět do výšky 450 km, což je oblast nízké oběžné dráhy, tedy už zde rozhodně není homogenní tíhové pole. Se vzdáleností od Země se její přitažlivá síla zmenšuje, a tedy by se mince dostala o něco výše.

(b) Když Simča vyhodí minci do vzduchu, bude se její rychlost rovnoměrně snižovat, tedy v čase t bude velikost rychlosti ve svislém směru $v = v_y - gt$. Po pěti minutách bude mince v nejvyšším bodě své trajektorie, čili její svislá rychlost bude nulová. Zapsáno rovnicí

$$0 = v_y - gt\,.$$

Z toho vyjádříme počáteční rychlost ve svislém směru:

$$v_y = gt = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 300\,\mathrm{s} = 3\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Při šikmém vrhu jsou na sobě vodorovná rychlost v_v a svislá rychlost v_s navzájem nezávislé. Vodorovnou rychlost, jakou musela Simča minci hodit, spočítáme klasicky ze vztahu

$$v = \frac{s}{t}\,,$$

odkud po dosazení dostáváme

$$v_x = \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{600\,\mathrm{s}} = 0{,}000\,25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Aby Simči mince dopadla po deseti minutách do druhé dlaně, musela by ji hodit počáteční svislou rychlostí $v_y = 3\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a počáteční vodorovnou rychlostí $v_x = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(c) Když Simča vyhazuje minci, udělí jí nějakou kinetickou energii E_k, která je závislá na rychlosti dle vzorce

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Jelikož se energie zachovává, mění se během pohybu mince kinetická energie na potenciální a pak zpátky na kinetickou, ale celková mechanická energie zůstává stejná. Mince má na začátku nulovou energii, a proto musí Simča vykonat práci, kterou ji udělí kinetickou energii E_k. Celkovou rychlost mince dopočítáme z rychlostí v obou směrech pomocí Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Jelikož je však rychlost ve vodorovném směru v_x oproti svislé složce v_y zanedbatelná, můžeme psát $v \approx v_y$. Proto vykonaná práce bude:

$$W = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot (3\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \doteq 45\,000\,\mathrm{J}.$$

Simča vykoná práci přibližně $45\,\mathrm{kJ}$.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.E ... Šup, šup!

8 bodů; průměr 6,90; řešilo 20 studentů

V mnoha úlohách se můžete setkat s koeficientem tření a s výpočty třecích sil z normálových sil, které jsou v našich úlohách často ztělesněné silami tíhovými. Často jsou tyto koeficienty zadány, jak se ale vlastně dají změřit?

Klidové koeficienty tření (tj. koeficienty potřebné k výpočtu síly nutné k rozpohybování těles[10]) jsou závislé na materiálech, které se po sobě třou. Proto je potřeba je změřit pro každé dva materiály zvlášť. Změřte tyto klidové koeficienty tření pro alespoň dvě různé dvojice materiálů.

Nezapomeňte popsat všechny důležité kroky svého měření, včetně konstrukce měřicího zařízení, vzorců, které jste použili, a konstant potřebných k výpočtům. Odhadněte či spočítejte nepřesnost svého měření.

[10] Pokud jste o klidovém tření ještě neslyšeli, můžete si o něm přečíst na webu https://cs.wikipedia.org/wiki/Tření#Klidové_tření.

Teorie

Klidové koeficienty tření f vystupují v rovnici třecí síly

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{N} f\,,$$

kde F_N je normálová (tj. kolmá) tlaková síla na styčnou plochu a výsledná F_t působí proti eventuálnímu pohybu tělesa o hmotnosti M, který by se jinak odehrával v souladu s 2. Newtonovým zákonem. Když na těleso tlačíme směrem proti podložce, tak normálová síla je tzv. reakce od podložky, která brání tomu, aby se těleso do podložky „zanořilo“. Většinou se setkáváme s případy, kdy těleso seshora tlačí silou kolmo k podložce, kdy F_N se přímo rovná této síle.

Můžeme uvažovat nad různými zdroji tlakové síly, kam F_N směřuje (například řemeny obtáčející hladká kola hnacích strojů musí svým ovinutím vyvíjet přítlačnou sílu na jejich povrch z libovolného, konstrukcí právě vyžadovaného směru, jinak by docházelo na různých místech k prokluzování), jak se mění. Abychom měření měli co nejjednodušší, zařídíme si to tak, aby normálová síla odpovídala síle tíhové.

Ze vzorce též vyplývá, že třecí síla nezávisí na obsahu styčné plochy. Dosažení co největší takové plochy je však výhodné pro studium tření, protože pokud se na povrchu objevují nějaké výrazné nerovnosti (např. nějaké smetí, kterého si nevšimneme), těleso by pak nečelilo pouze tření, ale i zásekům o tyto nerovnosti, které by byly vůči použitému povrchu poměrně větší a překrývaly by skutečný hledaný význam okolního povrchu.

Pomocí klidových koeficientů můžeme určit maximální třecí síly, které v kontaktu těles vznikají a mohou bránit prvotnímu rozpohybování tělesa. Po rozpohybování obvykle tření klesá (proto sebou tažené těleso na podložce často nejdříve škubne, ale poté se už s ním dá snadněji pohybovat) a i koeficient tření se sníží (z klidového koeficientu se stává *dynamický*, který je většinou menší než klidový, ale dále ho rozebírat nebudeme).

Základní princip měření tedy spočívá v navyšování vodorovné tažné síly na těleso o hmotnosti M, které svým prvním zvoleným materiálem stojí na druhém zvoleném povrchu podložky, která je pokud možno co nejvíce vodorovná, aby tlaková síla byla skutečně svislá. Tah je možno realizovat za pomoci nitě na těleso přilepené (nejlépe pod jeho těžištěm, aby se nepřevracelo), na níž je přes pevnou kladku na konci podložky zavěšeno závaží, z jehož hmotnosti m_z můžeme stanovit právě působící tažnou sílu. Na závaží přidáváme a ve chvíli, kdy dojde k rozpohybování tělesa, můžeme konstatovat překonání klidové třecí síly.

Znamená to také, že se do rovnosti dostala tíhová síla závaží, přenášená nití, a třecí síla tělesa vyvolávaná jeho tíhou působící na podložku:

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{g} \quad\Rightarrow\quad Mgf = m_\mathrm{z} g \quad\Rightarrow\quad f = \frac{m_\mathrm{z}}{M}\,, \tag{1}$$

kde jsme mohli vykrátit hodnotu tíhového zrychlení g. Z tohoto vztahu tedy budeme určovat koeficienty tření.

Ti, kteří znají goniometrické funkce, mohli odvodit ještě alternativní postup, který zde však nebudeme realizovat, ale jen jej nastíníme. Nevyžaduje žádné závaží a spočívá v použití nakloněné roviny s nastavitelným úhlem sklonu, kdy jej postupně zvětšujeme a co nejpřesněji určíme úhel α, kdy se již těleso dá samo do pohybu. Výpočtem z rozkladu sil můžeme dojít ke vztahu

$$f = \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Postup a výsledky měření

K metodě měření pomocí závaží jsme přistoupili pro jeho snadnou realizovatelnost z domácích materiálů. Za pomoci elektronické váhy s přesností desetin gramu jsme změřili, že papírový pytlík, který jsme vyrobili, aby zatěžoval nit a vkládalo se do něj závaží, má hmotnost 1,9 g. Tento pytlík vyrobený z ubrousku a izolepou připevněný přesně postačoval na základní natažení nitě přes kladku (i s vlastní vahou byla jinak stále volná). Na druhém konci na podložce bylo připraveno skleněné těžítko s počáteční hmotností 246,2 g, které bylo s nití spojeno pevně izolepou. Samo mělo zhruba 10 cm na výšku, ale připevněno bylo jen pár milimetrů nad stykem s podložkou pro minimalizaci pákového efektu a pro zachování vodorovnosti niti. Hmotnost nitě a izolepy zanedbáváme.

Kladka byla zhotovena z gumového kolečka o průměru zhruba 2 cm z dětské stavebnice Cheva, navlečená na osu zhotovenou z nepatrně tenčí tuhy od propisky. Ze zmíněné stavebnice byla zhotovena i konstrukce, která byla o podložku zapřena, nedovolovala prohnutí osy a dokázala blokovat pohyb rozjetého těžítka. Důležité je, že kolo vykazovalo velmi nízké tření na své ose, které bylo mnohem menší než mezi těžítkem a podložkou. Jako závaží posloužily spousty korunových mincí, které mají známou hmotnost, ale radši jsme je pro jistotu převážili. Korunové mince měly tu výhodu, že jsme mohli přidávat po velmi malých kouscích, a tak co nejpřesněji vystihnout moment, kdy je třecí síla v rovnováze s tíhovou silou působící na závaží.

Měření jsme provedli pro dvě dvojice materiálů, a to sklo-sklo a papír-papír (kancelářský). V prvním případě stačilo jednoduše těžítko položit na skleněnou desku, kterou je možno vybrat např. ze skříně či stolu. V druhém případě se na desku připevnil list papíru a těžítko se zespoda obtočilo proužkem stejného vystřiženého papíru. Spolu s tímto papírem se jeho hmotnost zvedla o 0,3 g.

V následující tabulce uvádíme naměřené hodnoty a z toho spočtené koeficienty f, nakonec jejich průměr $\langle f \rangle$. Měření bylo pro každou dvojici materiálů provedeno čtyřikrát v různých vzdálenostech od kladky. Poslední údaj je směrodatná (standardní) odchylka výsledku σ, která z do té doby zjištěných výsledků vyhodnocuje jejich proměnlivost a je základním měřítkem přesnosti měření. Spočteme ji takto:[11]

(1) Spočteme průměrnou hodnotu $\langle f \rangle$.
(2) Určíme rozdíly jednotlivých hodnot od průměrné a každý z nich umocníme na druhou.
(3) Tyto druhé mocniny zprůměrujeme (sečteme a podělíme počtem).
(4) Výsledek zpětně odmocníme.

Diskuze a závěr

Zjistili jsme tedy, že sklo a papír měly v tomto experimentu s papírem téměř shodný koeficient tření. Měření koeficientů tření je velmi závislé na kvalitě provedení a patří mezi experimentálně obtížnější úlohy. U papíru má měření důležité technické aplikace, protože např. výrobci kopírovacích a tiskařských strojů potřebují předcházet poruchám při manipulaci s papírem. Naše hodnoty také odpovídají tabulkovým hodnotám ostatních experimentátorů. S papírem se výsledek liší v jednotkách procent od komerčních experimentů[12] a u skla se zdá, že velký význam hrálo znečištění, protože výsledky odpovídají těm pro sklo znečištěné/promazané.[13]

[11] Například ve vzorovém řešení experimentální úlohy 4. série 6. ročníku můžete nalézt odlišný a v mnohých případech snazší postup, který ale dá stejný výsledek.

[12] Zdroj: `http://bit.ly/2mI5EeO`

[13] Zdroj: `http://www.carbidedepot.com/formulas-frictioncoefficient.htm`

Tab. 1: Změřené hmotnosti závaží v gramech (v závorce dopočtená f). V předposledním řádku jsou uvedeny průměrné hodnoty f a v posledním řádku odpovídající standardní odchylky.

	sklo-sklo	**papír-papír**
M	246,2	246,5
1	81,85 (0,332)	86,93 (0,353)
2	86,22 (0,350)	93,67 (0,380)
3	90,66 (0,368)	90,22 (0,366)
4	83,02 (0,337)	93,92 (0,381)
$\langle f \rangle$	0,347	0,370
σ	0,027	0,012

Přesnost měření by se dala zvýšit například použitím závaží o menší hmotnosti (vystihli bychom lépe moment rovnováhy sil) nebo kladkostroje s menším třením, nicméně považujeme náš výsledek za celkem přesný a odpovídající realitě.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.C ... Makající elektrony

6 bodů; průměr 4,12; řešilo 26 studentů

Kačka dostala novou sodíkovou katodu a rozhodla se, že si ji ozkouší. Posvítila na ni ultrafialovým světlem o vlnové délce $300\,\mathrm{nm}$ *a pozorovala vyletující elektrony.*

(a) *S jakou kinetickou energií vyletují elektrony z povrchu sodíkové katody, je-li výstupní práce elektronů v sodíku* $3{,}7 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$*?*

(b) *Jaká je rychlost každého z elektronů, je-li známo, že hmotnost jednoho je* $9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$*?*

(c) *Jaká je největší vlnová délka světla, kterým může Kačka na sodíkovou katodu svítit, aby byla schopna pozorovat vyletující elektrony?*

(a) Pro výpočet kinetické energie vyletujících elektronů ze sodíkové katody potřebujeme rovnici fotoefektu z Výfučtení

$$E_\mathrm{f} = W_\mathrm{v} + E_\mathrm{k}\,,$$

kde za E_f můžeme dosadit

$$E_\mathrm{f} = h\frac{c}{\lambda}\,.$$

Získáme tak rovnici:

$$h\frac{c}{\lambda} = W_\mathrm{v} + E_\mathrm{k}\,.$$

Odtud můžeme vyjádřit hledanou kinetickou energii jako

$$E_\mathrm{k} = h\frac{c}{\lambda} - W_\mathrm{v}\,.$$

Číselným dosazením do této rovnice dostáváme

$$E_\mathrm{k} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - 3{,}7 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}9 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

Po dosazení do rovnice nám tedy vyjde, že kinetická energie vyletujících elektronů ze sodíkové katody je $E_\mathrm{k} \doteq 2{,}9 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

(b) Abychom mohli vypočítat rychlost vyletujících elektronů, potřebujeme vzorec pro výpočet kinetické energie

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 \,.$$

Úpravou této rovnice získáme vztah:

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m}}$$

Dosazením výsledku z předchozí otázky a hmotnosti elektronu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ do tohoto vztahu zjistíme, že rychlost vyletujících elektronů je $v \doteq 8{,}02 \cdot 10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, neboli $802\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, což jsou asi tři desetiny procenta rychlosti světla ve vakuu.

(c) Z Výfučtení již víme, že aby došlo k vyražení elektronu ze sodíkové katody, musí platit

$$E_\mathrm{f} \geq W_\mathrm{v} \,.$$

Světlo s větší vlnovou délkou má nižší energii. Použijeme-li světlo s největší vlnovou délkou, veškerá jeho energie se spotřebuje na výstupní práci elektronů. Bude tedy platit

$$E_\mathrm{f} = W_\mathrm{v} \,.$$

Dosazením vztahu pro energii fotonu za E_f můžeme rovnici upravit do tvaru

$$h\frac{c}{\lambda} = W_\mathrm{v} \,.$$

Odtud již můžeme vyjádřit hledanou vlnovou délku λ jako

$$\lambda = h\frac{c}{W_\mathrm{v}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}\,\frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}7 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} \doteq 5{,}38 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \,.$$

Největší přípustná vlnová délka světla, kterým může Kačka na sodíkovou katodu svítit a stále pozorovat fotoefekt, je $\lambda \doteq 538\,\mathrm{nm}$, což odpovídá zelenému světlu.

Poznámky k doškým řešením

Mnohým z vás jsem musel strhnout body za to, že jste neměli komentáře ke svým výpočtům. Jinak bych vás chtěl pochválit, protože většina z vás měla výpočty v pořádku. Za tuto úlohu jste celkem mohli dostat 6 bodů. Tato úloha měla celkem 3 části. Pokud jste měli v jedné části správně výpočty a k nim komentáře, dostali jste za každou část 2 body. Pokud jste měli špatné výpočty nebo vám chyběly komentáře k výpočtům, strhnul jsem vám za danou část 1 bod. Pokud vám daná část chyběla úplně, dostali jste za ni 0 bodů.

Marek Božoň
`marek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	8	6	**43**	**85**
1.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	5	4	6	4	5	–	–	**24**	**49**
2.	*Patrik Rosenberg*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	4	–	1	–	–	–	**7**	**24**
3.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	3	–	–	–	–	2	**10**	**10**
4.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**9**
5.	*Marie Hebertová*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
6.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	8	6	**43**	**85**
1.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	5	4	5	6	3	5	6	**34**	**76**
2.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	4	–	–	–	8	–	**17**	**46**
3.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	5	4	–	–	–	7	–	**16**	**41**
4.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**16**
5.	*Šimon Dalecký*	ZŠ a MŠ Klíč s.r.o. Česká Lípa	–	–	0	–	–	–	–	**0**	**14**
6.	*Martin Ondruška*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
7.	*Barbora Tuháčková*	G Františka Křižíka, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	8	6	**38**	**75**
1.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	4	6	6	7	8	5	**36**	**71**
2.	*Jakub Ježek*	G B. Němcové, HK	–	5	6	4	6	8	3	**32**	**68**
3.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	–	4	3	5	5	7	3	**27**	**64**
4.	*Jiří Antoňů*	G, Špitálská, Praha	–	4	6	5	–	8	2	**25**	**63**
5.	*Zuzana Lisztwanová*	ZŠ a MŠ Třinec - Staré Město	–	4	6	4	4	–	3	**21**	**54**
6.	*František Račický*	ZŠ Jemnice	–	2	6	6	2	8	6	**30**	**51**
7.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	2	2	3	5	7	2	**21**	**49**
8.	*Anna Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	6	6	7	8	6	**37**	**43**
9.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	4	–	6	6	–	4	**20**	**40**
10.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	–	5	5	4	–	–	–	**14**	**38**
11.	*Veronika Nečadová*	ZŠ Jemnice	–	4	–	3	–	4	–	**11**	**26**
12.	*Martin Haikl*	G Týn nad Vltavou	–	4	4	2	–	–	–	**10**	**20**
13.	*Tomáš Veselý*	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
14.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
15.	*Barbora Šišáková*	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
16.	*Jolana Chylíková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	8	6	**38**	**75**
1.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	–	5	6	6	7	8	6	**38**	**75**
2.	*Eva Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	5	8	6	**36**	**73**
3.	*Adam Šebesta*	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	6	7	8	6	**38**	**70**
4.	*Adam Krška*	G, Mikulov	–	5	6	6	6	7	6	**36**	**65**
5.	*Aleš Opl*	Gymnázium Praha 3	–	5	6	6	7	–	6	**30**	**61**
6.	*Kateřina Zavadilová*	ZŠ Jílovská, Praha	–	5	6	6	4	8	6	**35**	**60**
7.	*Filip Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	3	6	5	5	7	4	**30**	**59**
8.–9.	*Sára Byšková*	ZŠ nám.Jiřího z Poděbrad, Praha	–	4	6	3	–	–	5	**18**	**49**
8.–9.	*Tereza Preclíková*	G Dobruška	–	3	6	4	5	–	4	**22**	**49**
10.	*Adam Mára*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	5	4	6	1	0	4	**20**	**46**
11.	*Ondřej Valášek*	G, Nový Bydžov	–	2	3	5	2	7	2	**21**	**44**
12.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	4	3	6	3	–	3	**19**	**42**
13.–14.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	–	5	2	6	–	–	2	**15**	**36**
13.–14.	*Jakub Pelc*	G, Benešov	–	4	6	4	–	–	2	**16**	**36**
15.	*Klára Barnatová*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
16.–18.	*Natálie Křivancová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
16.–18.	*Luboš Petráň*	Biskupské G, České Budějovice	–	–	6	6	–	–	–	**12**	**24**
16.–18.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
19.	*Lukáš Tomoszek*	G, Třinec	–	4	5	4	7	–	3	**23**	**23**
20.	*Kryštof Rakovský*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
21.	*Alex Rosenbergová*	ZŠ a MŠ, Březová	–	4	4	–	–	–	–	**8**	**21**
22.	*Kryštof Pravda*	G Mensa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
23.	*Vojtěch Stránský*	ZŠ a MŠ Osová Bítýška	–	3	–	4	–	7	–	**14**	**14**
24.	*Aleš Manuel Papáček*	G, Třeboň	–	4	5	4	–	–	–	**13**	**13**
25.	*Markéta Bečvářová*	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**12**
26.–27.	*Adam Baroš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
26.–27.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**9**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://vyfuk.mff.cuni.cz
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.