# výfuk

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

s blížícími se vánočními svátky a koncem roku 2017 se vám do rukou dostává již třetí brožurka Výfuku. Tradičně v ní najdete úlohy třetí série a navíc Výfučtení o deformacích těles.

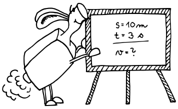
Dále v ní najdete i vzorová řešení první série spolu s vašimi výsledky. V obálce pak máte svá opravená řešení s poznámkami.

Mnoho zdaru při řešení další série a příjemné vánoční svátky vám přejí

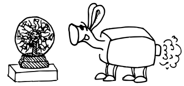
*Organizátoři*

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

matfyz



# *Zadání III. série*



*Termín doručení: 8. 1. 2018 20.00*

## Úloha III.1 ... Jablečný mošt ❻ ❼ 5 bodů

Radka si jednoho dne vzpomněla, že když byla malá, celá její rodina připravovala na podzim jablečný mošt. Když už byl všechen mošt hotov, bylo potřeba jej přelít z obrovských demižonů do zavařovacích láhví. To se dělalo pomocí hadičky, která měla jeden konec ponořený do moštu v demižonu a druhý konec ústil v láhvi. Celé toto důmyslné zařízení nemělo žádný pohon. Přes to, pokud se láhev umístila níže než demižon a celý proces se vhodně nastartoval, se láhev po čase naplnila. Pokuste se vysvětlit, proč kapalina přetekla z jedné nádoby do druhé, když v první půli cesty jde kapalina hadičkou „do kopce“, aniž bychom jí viditelně dodávali energii?

## Úloha III.2 ... Po stěně krychle ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Pepa si koupil krychli o délce hrany 2 cm a chtěl spojit její dva protilehlé vrcholy co nejkratší čárou, která vede po jejím plášti. Pomozte Pepovi zjistit, kudy má čáru vést a jak dlouhá bude.

## Úloha III.3 ... Hladový lis ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Na šrotišti si naštvaný jeřábník pohazuje s auty. Někdy je vláčí po zemi, jindy je zase vytahuje do výšky. Jednou mu odbrzděné auto o hmotnosti 1 234 kg ujelo a převrátilo se, takže jej musel vytahovat zpět pod úhlem 45° vůči zemi. Jakou minimální tažnou sílu musel jeřáb vyvinout na rozpohybování auta, jestliže koeficient tření mezi autem a zemí činí $f = 0{,}2$? Odlepí se přitom auto od země?

## Úloha III.4 ... Míč pod vodou ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Kuba během hodiny dějepisu vzpomínal na léto, kdy trávil hodně času v bazénu. Vzpomněl si, jak si hrál s nafukovacím míčem o poloměru 10 cm, který nořil pod vodu, kde ho po chvilce pustil a sledoval, jak míč vyplouval a vyskakoval nad hladinu. Jelikož je Kuba zvídavý, začal počítat. Pomůžete mu spočítat odpovědi na následující otázky?

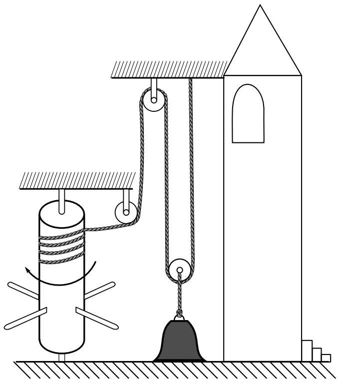
1. Jakou silou musel působit na míč, aby zůstal ponořený 1 metr pod vodní hladinou?
2. Jaká maximální odporová síla na míč působila, když se přibližoval k hladině? Víte, že odpor je přímo úměrný rychlosti.
3. Jakou maximální rychlostí se míč pohyboval, jestliže si Kuba našel, že pro velikost odporové síly platí vztah $F_\mathrm{o} = 0{,}5 C \varrho S v^2$, kde $\varrho$ je hustota prostředí, $S$ je průřez tělesa, $v$ je jeho rychlost a $C$ je odporový koeficient, který je pro míč $C = 0{,}5$?

Deformaci míče v důsledku působících sil a změnu jeho objemu z důvodu změn okolního tlaku zanedbejte.

## Úloha III.5 ... Věž kostela ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 6 bodů

Na věž kostela Sv. Jakuba je vytahován nový zvon o hmotnosti 2,5 t. Zvon je vytahován středověkou metodou – pomocí rumpálu, lidskou silou přes soustavu pevných a jedné volné kladky. Rumpál je válec o poloměru 40 cm, na nějž se namotává lano. Otáčí jím čtyři statní muži, kteří působí silou na konce držadel ve vzdálenosti 2,5 m od osy otáčení rumpálu. Zvon je na lano zavěšen pomocí volné kladky.

1. Jakou nejmenší silou musí každý statný muž působit na konec držadla, aby se jim povedlo zvon vytáhnout na vrchol věže?
2. Kolikrát se otočí rumpál kolem své osy, je-li zvon vytahován do výšky 30 m?



## Úloha III.E ... Tuha mikrotužky ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

Andřejka byla jednou v galerii, kde měli obraz různě tlustých čar. Tento obraz ji uchvátil natolik, že začala přemýšlet, jaká může být jejich průměrná výška.[1] Pomozte Andřejce v jejích úvahách a změřte, jak vysoká je čára, kterou kreslí tuha do mikrotužky. Předpokládejte, že nakreslená čára má tvar kvádru a že objem tuhy se nemění. Měření zkuste provést alespoň 5krát a spočtěte chybu měření. Nezapomeňte uvést, jaký typ a tloušťku tuhy jste použili.

## Úloha III.C ... Pro rybáře pružné ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Káťa si koupila dva vlasce z neznámých materiálů. První má délku $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ a průměr $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, druhý má délku $l_2 = 2\,\mathrm{m}$ a průměr $d_2 = 0{,}4\,\mathrm{mm}$. Aby Káťa zjistila, z jakých materiálů vlasce jsou, rozhodla se změřit jejich Youngův modul pružnosti v tahu. K tomu si obstarala dvě závaží o shodné hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$.

a) První vlasec se po zavěšení závaží prodloužil o $\Delta l_1 = 6\,\mathrm{cm}$, druhý o $\Delta l_2 = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte moduly pružnosti v tahu prvního i druhého vlasce.

b) S pomocí tabulek či internetu[2] pomozte Kátě určit, o jaké materiály se jedná. Napovíme, že moderní vlasce se vyrábějí především z polymerů.

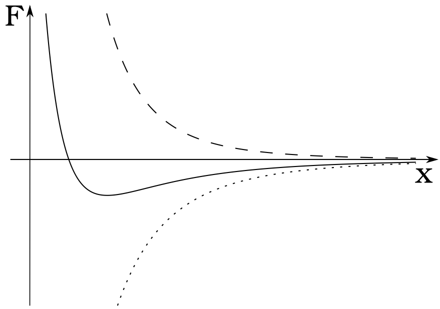
[1] Výškou myslíme doopravdy výšku, tedy směr kolmý k rovině papíru.
[2] Nezapomeňte uvést zdroj.

# Výfučtení: Deformace, elasticita

Při řešení fyzikálních úloh s tělesy, které se vlivem vnějších sil pohybují nebo sráží, obvykle používáme představu tzv. dokonale tuhého tělesa. Takové těleso se při působení vnějších sil nijak nedeformuje – nemění se jeho tvar ani objem. V tomto Výfučtení se budeme věnovat případu, kdy naopak vnější síla těleso deformuje (např. natahování gumy). Přirozeně nás napadne, že v takových případech nám dokonale tuhé těleso nestačí a musíme se seznámit s novými pojmy i veličinami.

## Mezičásticové síly

Každé těleso se skládá z menších objektů – atomů, molekul atd. Tyto „částice“ na sebe silově působí, a to odpudivými a přitažlivými silami. Velikosti těchto sil závisí na vzájemné vzdálenosti částic. Obě tyto síly se zmenšují se zvětšující se vzdáleností mezi částicemi, nicméně každá „jinak rychle“. Důsledkem toho má výsledná síla zajímavý průběh, který můžeme vidět na grafu 1.

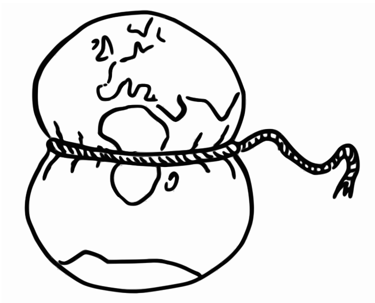



Obr. 1: Graf závislosti silového působení mezi částicemi v závislosti na vzdálenosti. Tečkovaně je znázorněna přitažlivá síla, čárkovaně odpudivá a plnou čárou výsledná síla.

Popsat matematicky tyto průběhy není nejjednodušší. Protože to pro nás není nezbytné, nebudeme se zbytečně zatěžovat rovnicí a podíváme se na ně víc „s nadhledem“. Prvně nezapomeňme zmínit, že tento graf je naopak, než bychom čekali – v horní části grafu je vynesena odpudivá síla, ve spodní části grafu síla přitažlivá. Jak si můžeme všimnout, jsou-li částice příliš u sebe, převládá vliv odpudivé síly a jsou tlačeny dál od sebe. Čím blíž jsou částice k sobě, tím větší je odpudivá síla. Naopak, jsou-li částice od sebe dál, převládá vliv přitažlivé síly, která je přitahuje zpět k sobě. Avšak čím jsou částice od sebe vzdálenější, tím je tato přitažlivá síla menší. Z toho vyplývá, že existuje nějaká ideální vzdálenost, ve které je výsledná působící síla nulová. Té je dosaženo v tzv. *rovnovážné poloze* a je to vzdálenost, kterou mezi sebou mají částice v běžných podmínkách. Tuto vzdálenost z grafu vyčteme jako bod, kde graf prochází nulovou hodnotou síly. Začneme-li ale těleso deformovat, změní se vzájemná vzdálenost částic a jedna ze sil začne převládat. Jak můžeme lehce vyčíst z grafu, výsledná síla bude vždy bránit působící deformaci.

# Typy deformace

Deformaci můžeme rozdělit na dva základní druhy dle výsledku působení síly na těleso po jejím zmizení – pružnou (elastickou) a tvárnou (plastickou). Jako pružnou deformaci označujeme takovou, kdy se těleso vrátí do svého původního tvaru a objemu po ukončení působení deformačních sil. Jestliže naopak těleso zůstane zdeformované i po vymizení deformující síly, jedná se o deformaci tvárnou. Deformace můžeme dále dělit také podle směru deformujících sil. My si nyní popíšeme 5 základních druhů deformace.



## Deformace tahem

Nejjednodušším druhem je takzvaná deformace tahem, kdy působíme silami na obou stranách tělesa, které se díky tomu roztahuje (obrázek a). V takovémto případě se částice od sebe oddalují a začnou převládat přitažlivé síly. V praxi se tento typ deformace projevuje například u tažných lan výtahů, kladek, jeřábů apod. V další části si tento typ deformace rozebereme podrobněji.

## Deformace tlakem

Deformace tlakem je opakem deformace tahem – na těleso působíme silami směrem do středu tělesa (obrázek b). Tentokrát se částice k sobě přibližují, tedy začnou převládat odpudivé síly. S touto deformací se v praxi setkáme například u různých lisů.

## Deformace smykem

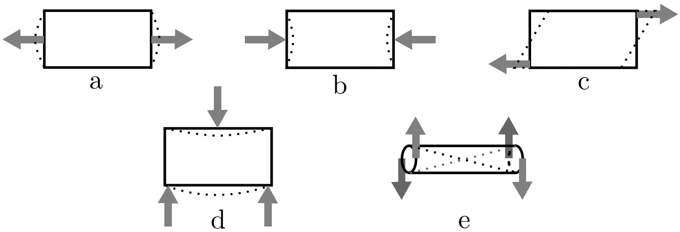
Při deformaci smykem působíme na protilehlé stěny tělesa silami opačné orientace. (obrázek c). V tomto případě se nemění vzdálenost mezi částicemi, mění se poloha jednotlivých vrstev částic, které po sobě kloužou. Smykem jsou namáhány například šrouby nebo nýty.

## Deformace ohybem

Těleso je nyní podložené z jedné nebo obou stran a někde mezi těmito podpěrami je zatížené (obrázek d). Pokud se podíváme, co se děje s částicemi, uvidíme, že ty v horní části tělesa tvoří vnitřní část oblouku – vzdálenosti mezi nimi se zmenšují, tudíž tato část je deformována tlakem. Částice v dolní části tělesa tvoří naopak vnější oblouk, jejich vzájemné vzdálenosti se zvětšují a tato část je deformována tahem. V prostřední vrstvě částic zůstává vzájemná vzdálenost zachována. Tato deformace se projevuje například u mostních konstrukcí.

### Deformace krutem

Poslední typ deformace, na kterou se v tomto Výfučtení podíváme, je deformace krutem (obrázek e). Při této deformaci působíme na každé straně tělesa silou s nenulovým momentem,[3] přičemž tyto momenty jsou opačně orientované – způsobují krut (neboli *torzi*) tělesa. Z částicového pohledu po sobě jednotlivé vrstvy částic kloužou.




Obr. 2: Typy deformace

Podívejme se podrobněji na případ deformace tahem. Pokud těleso natahujeme silou $F$, působí na nás dané těleso reakční silou $F_p$. Tato síla, která v něm vzniká, se nazývá *síla pružnosti* a je způsobena mezičásticovými přitažlivými silami. Působí v každém průřezu tělesa kolmém na tuto sílu. Proto definujeme veličinu nazývanou *normálové napětí*, kterou značíme $\sigma_n$ a která je podílem sil pružnosti a plochy kolmého průřezu.

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}$$

Deformace tělesa je pro malá normálová napětí elastická, tedy těleso se po ukončení silového působení vrátí do původního tvaru. Pokud však normálové napětí dosáhne hodnoty takzvané *meze pružnosti* $\sigma_E$, přestává být deformace elastická a dále se těleso deformuje plasticky. Ta může probíhat dále, dokud normálové napětí nedosáhne takzvané *meze pevnosti* $\sigma_p$, kde je působení mezičásticových sil už příliš slabé, neudrží těleso pohromadě, a to se přetrhne.

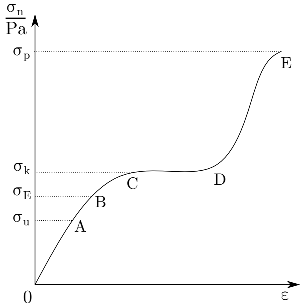
Hodnoty těchto mezí je velmi užitečné znát. Například při konstrukci výtahu musíme vědět, že lano nemůžeme zatěžovat neomezeně. Ve skutečnosti si potřebujeme být jisti, že se lana budou deformovat vždy elasticky, tedy že se nebudou měnit jejich vlastnosti v čase. Proto si při navrhování takových systémů dáváme vždy pozor, aby maximální povolené zatížení stále poskytovalo dostatečnou rezervu k mezi pružnosti. Nicméně se nám hodí znát ještě jednu veličinu, a tou je relativní prodloužení.

## Relativní prodloužení

Při deformaci tělesa tahem dojde k jeho prodloužení o délku $\Delta l$. Toto prodloužení ale nemůžeme objektivně porovnávat pro tělesa různých délek (natáhnout 1 cm gumy o 10 cm je mnohem složitější než o stejnou délku natáhnout 2 m gumy), proto zavádíme takzvané *relativní prodloužení* $\varepsilon$, které nám říká, o jakou svoji část se dané těleso protáhne. Spočítat ho lze velmi snadno,

[3] Pokud vám moment síly nic neříká, tak neváhejte nahlédnout do Výfučtení z 6. ročníku, 4. série *Otáčivý pohyb*.

jako podíl prodloužení tělesa $\Delta l$ a jeho původní délky $l_0$, $\varepsilon = \Delta l / l_0$. Jedná se tedy o bezrozměrnou veličinu. Při deformaci tělesa z dané látky přísluší každému relativnímu prodloužení nějaké normálové napětí. Jak může vypadat graf závislosti normálového napětí na relativním prodloužení je naznačeno na obr. 3.




Obr. 3: Příklad grafu závislosti normálového napětí na relativním prodloužení

Na grafu vidíme, že až po mez pružnosti $\sigma_E$ je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení, potom zůstává téměř konstantní. Zde dochází k takzvanému tečení materiálu, kdy se relativní prodloužení zvětšuje bez dalšího zvětšování normálového napětí, až se začne normálové napětí opět zvyšovat, dosáhne mezi pevnosti $\sigma_p$ a těleso praskne.

## Hookův zákon

Pružnou deformaci, kde je závislost normálového napětí na relativním prodloužení přímo úměrná, můžeme tedy popsat velmi jednoduchým vzorcem. Jako první jej formuloval anglický fyzik Robert Hooke, po němž je nazýván Hookův zákon a zní

$$\sigma_n = E\varepsilon\,,$$

kde $E$ je konstanta úměrnosti nazývaná *Youngův modul pružnosti v tahu*, jejíž jednotkou je Pa. Je to látková konstanta – liší se tedy pro jednotlivé materiály a její hodnotu můžeme najít v tabulkách. Čím větší je hodnota modulu pružnosti, tím menší je deformace při stejné působící síle – tím těžší je těleso natáhnout.

Dosadíme-li do této rovnice výrazy pro relativní prodloužení tělesa i pro výpočet normálového napětí, dostáváme tvar

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}\,,$$

$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l\,.$$

Druhý řádek je pouze tvar, který nám popisuje závislost potřebné síly k protažení tělesa o $\Delta l$. Tento tvar je některým z vás již možná povědomý – výraz $\frac{ES}{l_0}$ se obvykle nahrazuje jedinou veličinou nazývanou tuhost $k$, jejíž jednotka je $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Hookův zákon tedy můžeme napsat i ve tvaru

$$F = k\Delta l\,,$$

který se nejčastěji používá k popisu deformace pružiny.

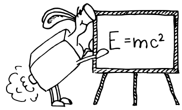
## Shrnutí

V tomto Výfučtení jsme si představili jev, při kterém působením vnějších sil na těleso dochází k jeho deformaci. Mezi nejdůležitější poznatky patří fakt, že deformace může být dvojího druhu – elastická, česky pružná (vratná), nebo plastická (nevratná). Popisovat plastickou deformaci není vůbec lehké, nicméně v praxi se jí snažíme vyhnout. Daleko důležitější je umět popsat pružnou deformaci. K tomu se využívá Hookův zákon, který nám dává do souvislosti působící sílu a vyvolané prodloužení tělesa.

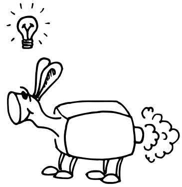
Takže až příště pojedete výtahem, zkuste se zamyslet, co všechno se kolem vás deformuje.

***Kateřina Rosická***
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

***Kateřina Stodolová***
katas@vyfuk.mff.cuni.cz




# *Řešení I. série*



## Úloha I.1 ... Svítící cukr

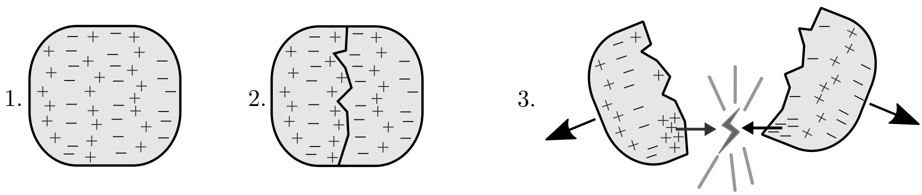
5 bodů; průměr 3,73; řešilo 11 studentů

*Vezmete-li si kostku bílého cukru a ve tmě ji rozdrtíte, můžete uvidět slabé světelné záblesky. Jak se tento jev nazývá a jakou mají záblesky barvu? Popište, jakých nástrojů jste využili a jaké byly podmínky pozorování, i pokud nic neuvidíte.*

> „Vezmete-li kostku cukru a ve tmě ji kleštěmi rozdrtíte, uvidíte modrý záblesk. Nikdo neví proč. Tento jev se nazývá triboluminiscence.“ – Richard Feynman

Takto by popsal známý nobelista řešení této úlohy. My se ale podívejme na tento jev ještě jednou a podrobněji: První zmínka o triboluminiscenci pochází od kmene Jutů, který používal chřestidla naplněná čistými krystaly křemene (cukr není jediná látka, která při tření nebo nárazech začne světélkovat, např. to umí i krystaly diamantů nebo se tak děje při rozlepování lepící pásky) při různých ceremoniálech. První vědecké popsání triboluminiscence proběhlo až v roce 1620 Francisem Baconem, ale Francis, stejně jako další vědci po něm, nemohl přijít na podstatu tohoto jevu. Dokonce ani dnes není tento jev úplně objasněn. Nejvíce uznávaná teorie vysvětluje triboluminiscenci následujícím způsobem: když rozdrtíme kostku cukru pomocí kladiva nebo ji rozmixujeme v mixéru, tak se asymetrické krystaly uvnitř kostky cukru rozdělí na krystalky s rozdílnými elektrickými náboji. Aby se znovu staly neutrálními, tak mezi nimi probije menší výboj, který je ve tmě viditelný. I když toto vysvětlení vypadá neprůstřelně, pořád je tu pár věcí, jež nedokáže úplně vysvětlit. Např. aby mohla triboluminiscence proběhnout, musí mít daná látka asymetrickou stavbu krystalů (to způsobuje rozdělení náboje mezi různé části), ale i přesto se v tomto najdou výjimky, které takto světélkovat také dokáží.

Následující obrázky lépe ukazují prozatímní chápání triboluminiscence, jak jsme ho popsali výše. V 1. vidíme krystal připravený k rozdrcení se zhruba rovnoměrně rozprostřenými kladnými a zápornými náboji. Ve 2. započne krystal praskat, přičemž jej ale zlom rozdělí na 2 různě nabité části (např. nalevo je vidět větší kladný náboj). Ve 3. obrázku je znázorněn výboj, kterým přebývající kladný náboj z levé části a záporný z pravé přecházejí prostorem zlomu.




Co se týká našeho pozorování, můžeme ho provést relativně lehkým způsobem. Po vybrání místa, kde nebude vadit trocha rozbitého cukru po podlaze, si vybereme správný nástroj – kladivo, kleště nebo mixér. Při výběru kladiva nebo kleští by bylo vhodné si nasadit ochranné brýle. Poté stačí jen cukr opatrně rozdrtit. Po pár pokusech vidíme, že při drcení cukru se skutečně vytvářejí slabé záblesky namodralé barvy.

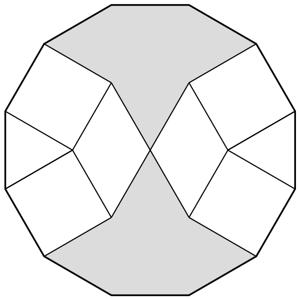
Pokud jste žádnou triboluminiscenci nepozorovali, nezoufejte. Můžete se podívat na zpomalené záběry: `https://www.youtube.com/watch?v=tW8q_JfmcbU` (od 1:29 a 3:33).

***Patrik Kašpárek***

## Úloha I.2 ... Podlaha

5 bodů; průměr 4,40; řešilo 47 studentů

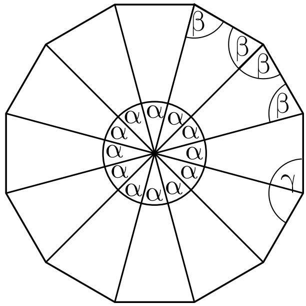
*Na obrázku je základní obrazec zámecké podlahy. Všechny úsečky v něm jsou stejně dlouhé a měří* 12 cm. *Vypočtěte obsah šedé části.*



K obsahu šedé plochy je možné se dostat dvěma způsoby: nějak jej spočítat přímo anebo zjistit obsah celého obrazce a od něj odečíst obsah bílých částí. My si ukážeme ten přímý způsob.

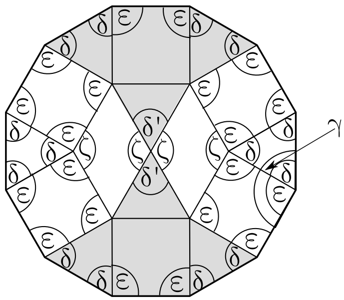
Když si pozorně prohlédneme tento obrazec, zjistíme, že se jedná o pravidelný dvanáctiúhelník. O pravidelných $n$-úhelnících víme, že mají stejně dlouhé všechny strany a také mají shodné obvodové úhly, tj. úhly svírané stranami. Například ve čtverci, což je pravidelný čtyřúhelník, jsou všechny obvodové úhly 90°. Velikost obvodového úhlu spočítáme tak, že si 12-úhelník rozdělíme na shodné rovnoramenné trojúhelníky jako na obrázku a uvědomíme si, že celý kruh je 360°. To znamená, že úhel při hlavním vrcholu každého z těchto trojúhelníků bude mít velikost $\alpha = 360°/12 = 30°$. Dále je dobré si pamatovat, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° a úhly rovnoramenného trojúhelníku při základně jsou shodné. Z toho odvodíme, že velikost každého z úhlů při základně našich trojúhelníků je $\beta = (180° - 30°)/2 = 75°$. Obvodový úhel je složen ze dvou těchto úhlů, proto jeho velikost je $\gamma = 2 \cdot \beta = 2 \cdot 75° = 150°$.

Zároveň si můžeme šedé plochy rozdělit čarami jako na obrázku. Přestože se jeví vzniklé úsečky stejně dlouhé jako ty původní, nemůžeme toto zdání automaticky přijmout jako pravdu a je třeba si to nějak ověřit. O původních úsečkách víme, že jsou všechny stejně dlouhé. Z toho vyplývá, že jimi vytyčené trojúhelníky jsou rovnostranné. Takové trojúhelníky mají všechny vnitřní úhly stejně velké a to $\delta = 180°/3 = 60°$. Pokud od obvodového úhlu dvanáctiúhelníku odečteme tento úhel, získáme $\varepsilon = \gamma - \delta = 150° - 60° = 90°$ a máme tudíž jistotu (s vědomím shodnosti úseček), že zbylé bílé části při obvodu jsou čtverce. Všimněme si, že všude při obvodu (nejen v bílé části) tedy máme střídající se čtverce (s úhly $\varepsilon$) a rovnostranné trojúhelníky (s úhly $\delta$). O bílých částech při středu dokážeme říct zatím pouze to, že se jedná o kosočtverce (ze




Obr. 4: Výpočet obvodového úhlu dvanáctiúhelníku

shodnosti úseček), a tudíž mají shodné protilehlé úhly. Nicméně úhel $\zeta$ dokážeme spočítat: $\zeta = 360^\circ - \delta - 2\cdot\varepsilon = 360^\circ - 60^\circ - 2\cdot 90^\circ = 120^\circ$. Proto dokážeme určit i úhly $\delta' = (360^\circ - 2\cdot 120^\circ)/2 = 60^\circ$. Jelikož strany trojúhelníků při tomto vrcholu jsou stejně dlouhé, na zbylé dva úhly zbývá $180^\circ - \delta' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 2\cdot 60^\circ$, jedná se tedy také o rovnostranné trojúhelníky.




Obr. 5: Rozebrání jednotlivých úhlů v obrazci

Šedá plocha se tedy skládá z celkem 6 rovnostranných trojúhelníků o straně $a = 12\,\mathrm{cm}$ a dvou čtverců o téže straně. Obsah jednoho čtverce spočítáme pomocí vzorečku: $S_{\text{čtverec}} = a^2 = (12\,\mathrm{cm})^2 = 144\,\mathrm{cm}^2$. K výpočtu obsahu rovnostranného trojúhelníku potřebujeme znát jeho výšku, kterou lze spočítat z Pythagorovy věty:

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{144\,\mathrm{cm}^2 - 36\,\mathrm{cm}^2} = \sqrt{108}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}\,.$$

Obsah trojúhelníku pak vypočítáme: $S_{\text{trojúhelník}} = a\cdot v_a/2 = (12\,\mathrm{cm}\cdot 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm})/2 = 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Konečně se dostáváme k obsahu celé šedé části, který je: $S = 6\cdot S_{\text{trojúhelník}} + 2\cdot S_{\text{čtverec}} = 216\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 + 288\,\mathrm{cm}^2$.

Pokud bychom chtěli počítat druhým způsobem, museli bychom si spočítat obsah celého dvanáctiúhelníku (nejlépe z trojúhelníků z prvního obrázku), poté bychom podobnou úhlovou úvahou došli k tomu, že bílé kosočtverce jsou složeny ze dvou rovnostranných trojúhelníků shodných se všemi ostatními v obrazci. Pomocí čtverců a trojúhelníků bychom poté dokázali spočítat celkový obsah bílé části, ten odečíst od obsahu dvanáctiúhelníku, a dostali bychom tak stejný výsledek.

***Simona Gabrielová***
simca@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha I.3 ... Atlet

6 bodů; průměr 3,39; řešilo 44 studentů

*Jáchym si byl zaběhat na atletickém stadionu. Nejprve oběhl stadion jednou, přičemž celou dobu běžel rychlostí $v_1 = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Poté si ale řekl, že by to chtělo trochu zrychlit. Jakou rychlostí musí běžet druhé kolečko, aby jeho celková průměrná rychlost byla rovna $v_\mathrm{p} = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?*

Nejprve je důležité si uvědomit, že průměrnou rychlost nelze počítat jako aritmetický průměr rychlosti v prvním a ve druhém kolečku, jelikož průměrná rychlost je podíl celkové dráhy za celkový čas. Vyjdeme tedy z definičního vztahu průměrné rychlosti

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_\mathrm{celk}}{t_\mathrm{celk}}\,.$$

Jáchym běží dvě kolečka, vzorec pro výpočet průměrné rychlosti tedy můžeme upravit do tvaru

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}\,.$$

Označme délku okruhu jako $s_0$. Jáchym běží dvakrát totéž kolečko, zřejmě tedy platí $s_0 = s_1 = s_2$. Dále musíme zjistit časy u jednotlivých okruhů. Ty vyjádříme pomocí upraveného vzorce na výpočet rychlosti, tedy jako $t = s/v$. Dosazením těchto dvou úprav dostáváme

$$v_\mathrm{p} = \frac{2s_0}{s_0/v_1 + s_0/v_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}\,.$$

Všimněme si, že nám z rovnice úplně vypadla neznámá délka okruhu $s_0$. To znamená, že běží-li Jáchym dvakrát tentýž okruh, nemá jeho délka na celkovou průměrnou rychlost, a tedy ani na počítanou rychlost ve druhém kolečku, žádný vliv.

Nyní z rovnice pouze vyjádříme hledanou rychlost $v_2$:

$$\frac{1}{v_\mathrm{p}} = \frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2} = \frac{v_1}{2v_1v_2} + \frac{v_2}{2v_1v_2} = \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2}\,.$$

V posledním kroku vynásobením dvěma a převrácením celé rovnice dostáváme vztah pro výpočet požadované rychlosti $v_2$ jako

$$v_2 = \frac{v_p v_1}{2v_1 - v_\mathrm{p}}\,.$$

Nyní už jen dosadíme hodnoty ze zadání

$$v_2 = \frac{4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{2 \cdot 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} - 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Aby byla Jáchymova průměrná rychlost $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, musí běžet druhé kolečko rychlostí $6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

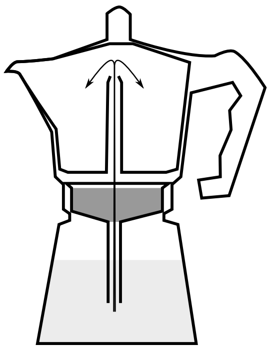
***Miroslav Jarý***
`Jason@vyfuk.mff.cuni.cz`

## Úloha I.4 ... Moka

7 bodů; průměr 6,83; řešilo 42 studentů

*Vysvětlete, jak funguje konvička, ve které se připravuje káva Moka (řez konvičkou je na obrázku). Příprava této kávy je následující. Nejdříve do spodní nádoby konvičky nalijeme vodu. Pak do držáku uprostřed nasypeme mletou kávu a nakonec konvičku postavíme na zdroj tepla. Dále stačí jen počkat, dokud se v horní nádobce neobjeví hotová káva, která se z konvičky přelije do hrníčků.*

*Jak je ale možné, že voda sama vystoupá do horní nádoby? Popište, co se s vodu ve spodní nádobě děje během zahřívání, a zjistěte, jaká síla způsobí vystoupání horké vody do horní nádoby.*



Obr. 6: Řez Moka konvičkou

Moka konvička byla vynalezena v Itálii vynálezcem Luigim de Pontim už ve 30. letech minulého století. Její vynálezce se inspiroval přípravou espresa, kdy se skrz namletou kávu pouští vodní pára o vysokém tlaku. Avšak kávovar na výrobu espresa nebyl (kvůli své ceně) v domácnostech běžný. Káva z moka konvičky není sice tak silná jako espreso, ale je mnohem silnější a chutnější než v té době připravovaná překapávaná káva, a tak se moka konvička stala velmi oblíbenou a velice rychle si našla svoje místo ve skoro každé (nejen) italské domácnosti.

Chceme-li si uvařit kávu v moka konvičce, napustíme spodní nádobku vodou až po okraj a do sítka nasypeme namletou kávu. Sítko usadíme navrch nádobky s vodou a našroubujeme horní nádobku, kde po uvaření bude káva. Když máme konvičku sestavenou, dáme ji na sporák a necháme ji tam několik minut, než se uvaří káva. Jak se to ale stane?

Sestavením konvičky jsme utěsnili spodní nádobku s vodou, a tak jediná cesta z ní ven je skrze trubičku, přes sítko s kávou až do horní nádobky na kávu. V okamžiku, kdy se začne vařit voda, se ve spodní nádobce začne vytvářet vodní pára. Jak jistě všichni víme, ta zabírá mnohem větší objem, než zabírala voda před jejím vypařením. Vodní pára stoupá vzhůru, a protože trubička se nachází ponořená ve vroucí vodě u dna nádobky, pára nemá kam unikat a zůstává nahoře v nádobce s vodou. Pára se hromadí nad hladinou, a jelikož kapalina není stlačitelná, zůstává pořád stejná část nádobky pro páru.[4] Nutně tedy musí vzrůstat tlak ve spodní nádobce.[5]

Označme tlak vodní páry jako $p_0$. Jelikož pára působí na hladinu kapaliny, způsobí v ní taktéž tlak $p_0$. Pascalův zákon nám říká, že tlak v kapalině způsobený vnějším působením je ve všech místech kapaliny stejný. Odtud je zřejmé, že tlak $p_0$ působí i na vodní hladinu v trubičce. V nádobce máme tedy nad i pod hladinou tlak $p_0$. V trubičce je pod hladinou (v kapalině) stále tlak $p_0$, avšak nad hladinou není pára jako v nádobce, tedy nad hladinou již není tlak $p_0$. Tato „nerovnováha“ má za následek, že na hladinu vody v trubičce působí síla, která vodu tlačí trubičkou směrem vzhůru. Pokud se podíváme na tlak v trubičce na úrovni okolní hladiny vody v nádobce, zespoda nám působí tlak $p_0$, proti němuž nám začne působit hydrostatický tlak již vytlačené vody $p_h = h\varrho g$, kde $h$ označujeme výšku sloupce již vytlačené vody, $\varrho$ je její hustota a $g$ je tíhové zrychlení. Po celou dobu zde působí ještě atmosferický tlak $p_{\mathrm{atm}}$, nicméně působí ze všech směrů, a proto se vyrovná sám se sebou.

Samozřejmě, že tlaky $p_0$ a $p_h$ jsou v každém okamžiku v rovnováze,[6] a tak s rostoucím tlakem ve spodní nádobce zároveň stoupá i výška hladiny vody v trubičce. V okamžiku, kdy tlak v nádobce dosáhne takové hodnoty, že mu odpovídá sloupec vytlačené vody stejně vysoký nebo vyšší, jako je délka trubičky, začne voda vytékat do horní nádobky.

Tento jev, který si zde popisujeme, trvá relativně krátkou chvíli a voda se při něm celou dobu vaří. To znamená, že i v trubičce se nachází vroucí voda, která, jak je zřejmé z nákresu, prochází po cestě skrz sítko s kávou. To samozřejmě nijak neovlivní princip fungování, který jsme popsali výše, avšak má velmi zásadní vliv na výsledek – po cestě trubičkou se z vroucí vody stává lahodná káva, která se nám hromadí v horní nádobce. Po pár minutách varu máme v horní nádobce dostatek kávy připravené k servírování.

***Jakub Sláma***
`slama@vyfuk.mff.cuni.cz`

## Úloha I.5 ... Ošemetné tření

7 bodů; průměr 3,21; řešilo 29 studentů

*Tření nemusí být vždy takové, jak jsme na něj byli zvyklí. Při $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ si projděme následující případy a uvidíme, na co je třeba si dát pozor…*

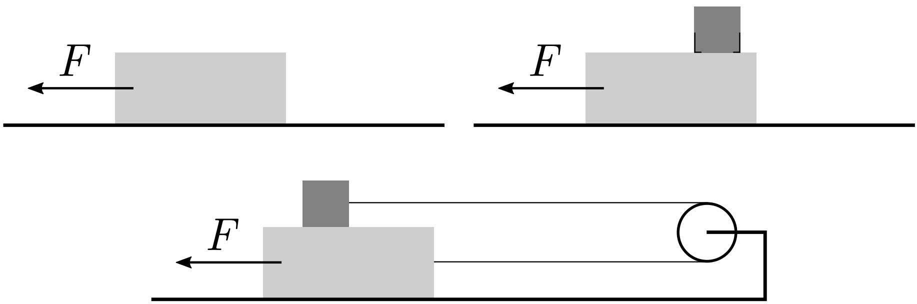
*(1) Umístěme na podložku kvádr 1 o hmotnosti $m_1 = 8\,\mathrm{kg}$. S jakým zrychlením se bude pohybovat, budeme-li na něj působit ve vodorovném směru silou $F = 80\,\mathrm{N}$? Koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je $f = 0{,}4$.*

[4] Toto tvrzení není úplně pravda, protože objem páry se zvětšuje o objem vypařené vody. Vzhledem k faktu, že pára má asi 1 000krát větší objem, než měla voda před vypařením, je ale tato změna objemu zanedbatelná.

[5] Viz Výfučtení z minulého ročníku *Ideální plyn* dostupné na stránce `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r6/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`.

[6] Pokud by tomu tak nebylo a jeden z nich byl větší, hladina vytlačeného sloupce poklesne či stoupne a tlaky se opět vyrovnají.

(2) *Jak se změní zrychlení, když na první kvádr položíme ještě druhý kvádr menší podstavy o hmotnosti* $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$*?*
(3) *Nyní si představme, že oba kvádry spojíme lanem přes pevnou kladku tak, jak je naznačeno na obrázku. Jaké bude zrychlení spodního kvádru, budeme-li uvažovat, že koeficient tření mezi oběma kvádry je* $f_\mathrm{k} = 0$*?*
(4) *A jak se změní výsledek, bude-li koeficient tření mezi kvádry* $f_\mathrm{k} = f = 0{,}4$*?*




Třecí sílu $\vec{F_\mathrm{t}}$ spočteme jako $\vec{F_\mathrm{t}} = f\vec{F_\mathrm{n}}$, kde $f$ značí součinitel smykového tření a $\vec{F_\mathrm{n}}$ kolmou (neboli normálovou – proto „n“) tlakovou sílu na podložku. Tato síla působí vždy proti směru pohybu; jinými slovy mu brání. Abychom nemuseli počítat s vektorovými veličinami, budeme počítat pouze s velikostmi sil a jejich orientaci budeme řešit pomocí znaménka. V našem případě je $F_\mathrm{n}$ tíha kvádru, popřípadě kvádrů, a proto můžeme vzoreček pro třecí sílu přepsat do tvaru

$$F_\mathrm{t} = mgf\,. \tag{1}$$

Ještě než začneme řešit jednotlivé podúlohy, připomeňme si druhý Newtonův zákon $F = ma$, který nám říká, že působíme-li silou $F$ na těleso hmotnosti $m$, začne se pohybovat se zrychlením $a$.

V podúloze (1) na kvádr působí dvě síly $F$ a $F_\mathrm{t}$, které mají navzájem opačný směr. Výsledné zrychlení je dané výslednicí všech působících sil, kterou si nazvěme $F_1$. Směr, ve kterém působí síla $F$, označme jako kladný.[7] Pro výslednici $F_1$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned} F_1 &= F - F_\mathrm{t}\,,\\ F_1 &= F - m_1gf\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Všimněme si, že ačkoliv je síla vektorová veličina, nemusíme vektorový zápis používat, jelikož směr sil vyjadřujeme dostatečně pomocí znamének. Výsledné zrychlení kvádru $a_1$ je dáno výslednicí všech působících sil $F_1$, platí tedy $F_1 = m_1a_1$. Dosazením za $F_1$ a vyjádřením hledaného zrychlení dostáváme dle druhého Newtonova zákona

$$a_1 = \frac{F - m_1gf}{m_1}\,. \tag{3}$$

[7] Fungovalo by i opačné značení, jen si naši volbu musíme pamatovat a správně určit směr výslednice.

Dosazením číselných hodnot ze zadání dostáváme

$$a_1 = \frac{80\,\mathrm{N} - 8\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 0{,}4}{8\,\mathrm{kg}} = 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Kvádr se tedy bude pohybovat se zrychlením $a_1 = 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Podúloha (2) nebude o tolik složitější. Problém na první pohled vypadá velice podobně předchozí úloze s tím rozdílem, že na spodním kvádru máme ještě jeden. Důležité je si nyní uvědomit, že se horní kvádr *nepohybuje*. Proto se vlastně jedná o tu samou situaci, jako kdybychom horní kvádr k dolnímu přilepili, nebo jako kdyby horní a dolní kvádr byly jedno těleso. Principiálně se tedy nejedná pouze o podobnost s předchozí úlohou, jedná se vlastně o tu samou úlohu.

Pohyb jednoho tělesa po ploše jsme už v onom minulém příkladu vypočítali, nyní se změní pouze celková hmotnost $m = m_1 + m_2$. Takže nám stačí v rovnici (3) nahradit všechny členy $m_1$ novými členy $(m_1 + m_2)$. Přidaný kvádr nedělá totiž nic jiného, než že zvyšuje hmotnost celé soustavy.

Alternativní způsob uvědomění si shodnosti s předchozí úlohou je, že výsledná třecí síla je dána jako $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$, kde normálová síla je nyní $F_\mathrm{n} = (m_1 + m_2)g$. Při dosazení do druhého Newtonova zákona navíc nezapomeneme, že se budou pohybovat oba kvádry, tedy že $m = m_1 + m_2$.

Oběma postupy dostáváme rovnici, z níž vypočítáme hledané zrychlení, které si označíme tentokrát $a_2$:

$$a_2 = \frac{F - (m_1 + m_2)gf}{m_1 + m_2}\,.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme zrychlení $a_2 \doteq 3{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Nyní v podúloze (3) se situace mírně komplikuje, jelikož se bude kvádr 2 během pohybu posouvat po kvádru 1. Pro získání řešení nyní už musíme rozebrat působení sil na každý z kvádrů zvlášť. Nebudeme moci využívat rovnici (2), protože na celý systém bude silově působit ještě lano, které kvádry přes kladku spojuje.

Nejprve si rozebereme situaci u kvádru 1. Na něj působí tři síly, jejichž účinek nás bude zajímat. Působí tu síla, kterou taháme a značíme ji $F$, dále síla lana, kterou označíme $F_\mathrm{lano}$, a třecí síla $F_\mathrm{t}$. Tyto síly se opět složí do jedné výsledné, kterou si nazvěme $F_3$. Musíme si dát pozor, že třecí sílu ovlivňuje hmotnost obou kvádrů jako minule. Dále si musíme uvědomit, že kvádr 1 se bude pohybovat ve směru působící síly $F$, ale pohybu bude bránit třecí síla $F_\mathrm{t}$ a síla lana $F_\mathrm{lano}$. Pro výslednici $F_3$ tedy dostáváme

$$F_3 = F - F_\mathrm{t} - F_\mathrm{lano}\,, \tag{4}$$

a podle druhého Newtonova zákona můžeme psát

$$F_3 = m_1 a_3\,. \tag{5}$$

Nyní si potřebujeme ujasnit ještě jednu věc. Oba kvádry se pohybují se stejným zrychlením $a_3$, jelikož kdyby se nepohybovaly se stejným zrychlením, tak by se vzdálenosti mezi kvádry a tedy i lano smršťovaly nebo prodlužovaly (což se, z naší vlastní zkušenosti, neděje).

U kvádru 2 je rozbor sil mnohem snazší. Na kvádr působí pouze lano silou $F_{\text{lano}}$, kterou opět podle Newtonova zákona můžeme vyjádřit jako

$$F_{\text{lano}} = m_2 a_3 \,. \tag{6}$$

Třecí síla zde nepůsobí, neboť součinitel tření se rovná nule. Dosazením z výrazu pro třecí sílu a rovnic (5), (6) do rovnice (4) dostáváme

$$\begin{aligned} F_3 &= F - F_{\text{t}} - F_{\text{lano}} \,, \\ m_1 a_3 &= F - (m_1 + m_2) g f - m_2 a_3 \,, \\ a_3 &= \frac{F - (m_1 + m_2) g f}{m_1 + m_2} \,. \end{aligned}$$

Číselným dosazením dopočítáme velikost zrychlení $a_3 \doteq 3{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Dostáváme tedy stejný výsledek jako v předchozí podúloze. To je v naprostém pořádku, protože pokud se podíváme na celý systém pořádně, můžeme si všimnout, že se v něm nic nezměnilo, pouze se otočil směr pohybu horního kvádru.

Poslední podúloha (4), kde hledané zrychlení označíme $a_4$, je nejsložitější. U kvádru 1 je stále platná rovnice z minulé podúlohy

$$F_3 = F - F_{\text{t}} - F_{\text{lano}} \,. \tag{7}$$

Za jednotlivé síly ale bude třeba dosadit odlišné výrazy. U kvádru 2 vstupuje totiž do hry ještě tření mezi stykovými plochami kvádrů, jehož součinitel označujeme $f_k$. Toto tření kvádr 2 zpomaluje a v pohybových rovnicích se to projeví jako

$$F_{\text{lano}} = m_2 a_4 + m_2 g f_k \,.$$

Co je však podstatné – tato třecí síla působí i na kvádr 1. Jejím původcem je v tomto případě přítlak kvádru 2 shora:

$$F_{\text{t}} = (m_1 + m_2) g f + m_2 g f_k \,,$$

čímž se nyní setkáváme s očekávaným ošemetným třením – ne vždy musí být jeho příčinou styk s podložkou pod tělesem ale i styk s dalším tělesem nad ním.

Nyní opět můžeme provést „velké dosazování“ do rovnice (7), podobně jako v předchozí podúloze. Dostáváme tedy

$$m_1 a_4 = F - (m_1 + m_2) g f - m_2 g f_k - m_2 a_4 - m_2 g f_k \,.$$

Vyjádřením neznámého zrychlení $a_4$ pak

$$a_4 = \frac{F - (m_1 + m_2)\, g f - 2 m_2 g f_k}{m_1 + m_2} \,.$$

Po dosazení všech hodnot získáme velikost $a_4 \doteq 1{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

K tomu, abyste vypočítali poslední podúlohu, bylo třeba vědět, jak se počítají podúlohy nad ní. Pokud bychom ji dostali za úkol hned na začátku, nevyhnuli bychom se většině z rovnic, které jsme použili i nyní.

Nakonec hlavním fyzikálním ponaučením všech podúloh je, že podložka nemusí být za tření zodpovědná vždy a svou roli hrají ve skutečnosti veškeré normálové síly, které v soustavě vystupují.

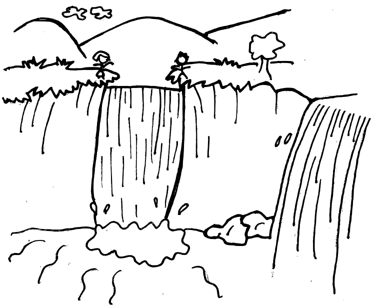
Fyzikální situace, které se zdají býti složité, lze někdy rozřešit pouze tím, že si je zjednodušíme do podoby více menších úloh, které zvládneme vyřešit. Poté můžeme postupně přidávat po menších stravitelných krůčcích na obtížnosti malých úloh, až se dobereme k výsledku úlohy původní. Paradoxně tedy někdy může být jednodušší řešit více otázek než méně.

***Klára Stefanová***
klarka@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha I.E ... Vysajeme Niagary? 8 bodů; průměr 6,11; řešilo 38 studentů

*Po jak dlouhou dobu by dokázal bilion papírových ubrousků absorbovat průtok Niagarských vodopádů? Sice se jedná o experimentální úlohu, ale ještě to neznamená, že kvůli jejímu vyřešení musíte jet do Spojených států. Úplně postačí, když opakovaně změříte, jaký objem vody dokáže absorbovat jeden kuchyňský ubrousek. Pak vypočítejte průměrnou savost jednoho ubrousku. Do vašeho řešení nezapomeňte uvést, jaký typ a velikost ubrousků jste při měření použili.*

*Nakonec vypočítejte odpověď na původní otázku, víte-li, že průměrný průtok Niagarských vodopádů činí asi* $2\,400\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$.



## *Teorie*

Průtok $Q$ je veličina charakterizující vodní tok. Určuje, kolik vody proteče určitým průřezem (např. korytem řeky) za jednotku času, $Q = V/t$.
Kolik vody dokáží ubrousky absorbovat tedy závisí na jejich počtu a množství vody absorbované jedním ubrouskem. Dle zadání je v Niagarských vodopádech bilion ubrousků,[8] což je jednička následovaná 12 nulami, tedy v mocninném zápisu $10^{12}$. Rovnici pro průtok můžeme tedy přepsat pomocí objemu absorbované vody v jednom ubrousku $V_0$ jako $Q = V_0 \cdot 10^{12}/t$. Dále z této rovnice vyjádříme čas, po který dokáží ubrousky proud řeky absorbovat

$$t = \frac{V_0 \cdot 10^{12}}{Q} \,,$$

[8] Pozn.: V angličtině znamená slovo „billion“ miliarda, což je číslo o tři řády menší. Proto si u velkých čísel dávejte pozor, zda máte správný počet nul.

čímž jsme získali rovnici, z níž na konci zvládneme spočítat odpověď na zadanou otázku.

## Měření

Naše měření bylo prováděno s dvouvrstvými kuchyňskými utěrkami o rozměrech 22 cm × 23 cm. Objem vody, kterou dokáže jeden ubrousek absorbovat, můžeme změřit několika způsoby.

Nejpřímočařejším ze způsobů je pomalé nalévání vody o známém objemu na ubrousek. To můžeme provádět například tak, že necháme vodu z injekční stříkačky kapat na ubrousek a měříme, jaký objem vody na něj můžeme dodat, než začne odkapávat dolů. Musíme ale dávat pozor na to, abychom kapali pomalu a změřili jen ten objem, který ubrousek skutečně nasákne. Naměřené výsledky uvádíme v následující tabulce.

Tab. 1: Výsledné objemy absorbované ubrouskem.

| číslo měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| absorbovaný objem/ml | 9 | 9 | 9,4 | 9,3 | 9,6 |

Průměrný objem absorbovaný jedním ubrouskem je tedy dle této metody 9,26 ml, což v základních jednotkách odpovídá $9{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$.

Druhým způsobem může být měření pomocí změny hmotnosti. Nejprve zjistíme hmotnost suchého ubrousku, poté ubrousek namočíme a opět zvážíme. Z rozdílů hmotnosti můžeme pomocí hustoty vody dopočítat její objem

$$V_0 = \frac{\Delta m}{\varrho}.$$

Jelikož je ale ubrousek velmi lehký, nedokážeme přesně zvážit hmotnost jediného ubrousku. Musíme tedy vážit více ubrousků najednou a poté spočítat průměrnou hmotnost.

Tab. 2: Měření hmotnosti suchého ubrousku.

| číslo měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| počet ubrousků | 2 | 3 | 5 | 5 | 50 |
| hmotnost/$g$ | 4 | 6 | 10 | 9 | 99 |
| hmotnost ubrousku/$g$ | 2 | 2 | 2 | 1,8 | 1,98 |

Průměrná hmotnost suchého ubrousku je 1,956 g.

Nyní dopočítáme aritmetický průměr hmotnosti mokrého ubrousku, který je 10,3 g. Hmotnostní rozdíl je tedy $\Delta m = 10{,}3\,\mathrm{g} - 1{,}956\,\mathrm{g} = 8{,}344\,\mathrm{g}$. Z toho pomocí známé hustoty vody $\varrho \doteq 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ můžeme dopočítat objem absorbované vody

$$V_0 = \frac{8{,}344\,\mathrm{g}}{0{,}98\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} \doteq 8{,}51\,\mathrm{cm}^3 = 8{,}51 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3.$$

Tab. 3: Měření hmotnosti mokrého ubrousku.

| číslo měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| počet ubrousků | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| hmotnost/$g$ | 10 | 10 | 9,5 | 10 | 60 |
| hmotnost ubrousku/$g$ | 10 | 10 | 9,5 | 10 | 12 |

Touto metodou nám vychází, že každý ubrousek dokáže absorbovat zhruba $V_0 \doteq 8{,}51\,\mathrm{cm}^3$ vody.

Objemy absorbované vody nám vyšly různě, jelikož každý jednotlivý ubrousek dokáže absorbovat jiné množství vody. Nepřesnosti mohou být dále způsobeny tím, že nedokážeme přesně určit, kdy je ubrousek již plně nasáklý a více vody nedokáže absorbovat.

## Výpočet času

Nyní jsme dostali dva různé výsledky, z nichž podle předem odvozeného vztahu můžeme dopočítat čas.

$$t = \frac{9{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \cdot 10^{12}}{2\,400\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{s}^{-1}} \doteq 3\,858\,\mathrm{s} \doteq 1\,\mathrm{h}\ 4\,\mathrm{min}\,, t = \frac{8{,}51 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \cdot 10^{12}}{2\,400\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{s}^{-1}} \doteq 3\,546\,\mathrm{s} \doteq 59\,\mathrm{min}\,.$$

Bilion papírových ubrousků by tedy dle našeho měření dokázal absorbovat průtok Niagarských vodopádů přibližně hodinu. Jak si jistě dovedete přestavit, takovéto zastavování Niagarských vodopádů by bylo silně nepraktické už například proto, že bilion papírových ubrousků by mělo hmotnost $m = 2 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$, což je řádově stejně,[9] jako je hmotnost Velké pyramidy v Gíze. Jistě si dovedete představit, že manipulovat s takovou hmotností je velmi obtížné. Na závěr můžeme dodat, že k zastavení proudu řeky existují mnohem efektivnější způsoby, jako je například stavba přehrady.

### Poznámky k došlým řešením

Výpočet času, po který dokáží ubrousky absorbovat průtok Niagárských vodopádů jste zvládli všichni, ale jelikož se jednalo o experimentální úlohu, zajímalo nás převším vaše měření. Jedna z hlavních věcí, které bylo potřeba uvést, byl váš postup měření. Překvapila mě kreativita vašich řešení, kde jste kromě výše uvedených postupů vymysleli ještě odsávání vody z nádoby s daným objemem nebo nasávání předem určeného objemu vody.Většina z vás si uvědomila, že měření je třeba několikrát zopakovat. Mile mě překvapili ti, kteří si uvědomili odchylky jednotlivých měření a snažili se diskutovat jejich příčiny, nebo spočítat nejistotu měření.

***Kateřina Rosická***
`kackar@vyfuk.mff.cuni.cz`

**Úloha I.C ... Rozpad** 6 bodů; průměr 3,09; řešilo 32 studentů

*Výfučkovy zplodiny někdy obsahují speciální částice, které se rozpadají podobně jako radioaktivní atomy. Jedna takováto částice se také rozpadla, a to na dvě menší. I přesto, že původní*

[9] Zdroj: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Řádová_velikost_(hmotnost)`

*částice byla v klidu, nové částice se po rozpadu rozběhly do opačných směrů. Rychlost první částice byla* $u_1 = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a její hmotnost* $m_1 = 2\,\mathrm{ng}$ *(nanogramy). Naneštěstí se nám nezdařilo změřit rychlost druhé částice, známe pouze její hmotnost* $m_2 = 8\,\mathrm{ng}$.

*Peťu by zajímalo, jaká energie se při tomto rozpadu uvolnila, předpokládáme-li, že všechna tato energie se beze ztráty změnila na pohybovou energii menších částic.*

V našem případě je celková kinetická energie rovna součtu kinetických energií každé částice. Vyjdeme ze známého vztahu:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mu^2 \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k1} + E_\mathrm{k2} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\,. \tag{8}$$

Jediné, co neznáme, je rychlost druhé částice $u_2$. Tu vypočteme pomocí hybnosti.

Protože se jedná o izolovanou soustavu, platí zde zákon o zachování hybnosti (ZZH). Na počátku byla částice v klidovém stavu $\vec{u_0} = 0$, takže její hybnost byla $\vec{p_0} = m_0\vec{u_0} = 0$. Po rozpadu se dvě nově vzniklé částice začaly pohybovat, čímž každá získala nějakou hybnost $\vec{p_1}$ a $\vec{p_2}$. Díky ZZH víme, že jejich vektorový součet musí být roven nule, protože na počátku byla hybnost původní částice nulová:

$$0 = \vec{p_1} + \vec{p_2}\,. \tag{9}$$


Obr. 7: Pohyb částic po rozpadu

Částice se začaly pohybovat opačnými směry, proto můžeme uvažovat pouze jednorozměrný pohyb částic. Jinými slovy, můžeme namísto s vektory rychlostí začít počítat pouze s jejich velikostmi a jednu z rychlostí opatříme znaménkem mínus. Vyberme si například rychlost $u_2$, výsledek to neovlivní. Po dosazení do rovnice (9) a vyjádření $u_2$ můžeme vypočítat hledanou rychlost:

$$0 = m_1u_1 - m_2u_2\,,$$
$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}u_1 = \frac{2\,\mathrm{ng}}{8\,\mathrm{ng}}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Abychom zjistili celkovou kinetickou energii obou částic, zbývá nám jen dosadit do rovnice (8). Pro usnadnění výpočtu dosadíme v základních jednotkách:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}\cdot(20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}\cdot(5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = 500\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,.$$

Jak je řečeno v zadání, předpokládáme, že veškerá uvolněná energie při rozpadu se beze ztrát přeměnila na kinetickou energii menších částic. Platí tedy

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{rozpad}\,.$$

Celková energie uvolněná při rozpadu částice byla tudíž 0,5 nJ.

***Josef Krška***

***Korespondenční seminář Výfuk***
***UK, Matematicko-fyzikální fakulta***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
***http://www.facebook.com/ksvyfuk***

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.