Úloha II.C ... Ideální plyn

7 bodů; průměr 4,86; řešilo 22 studentů

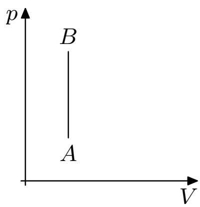
(1) *Ve Výfučtení Lukáš viděl jen tři grafy pro děje s ideálním plynem a zajímalo by ho, jak který děj vypadá ve zbylých diagramech. Pomozte mu tedy nakreslit každý ze tří diskutovaných dějů (tj. izochorický, izobarický a izotermický) v chybějících grafech* $p - V$, $p - T$ *a* $V - T$.

(2) *Lukáše by také zajímalo, jak moc se liší van der Waalsův model od ideálního plynu. Spočtěte proto pro obě rovnice, jaké množství vodíku zaujme při pokojové teplotě* $25\,°\mathrm{C}$ *a standardním tlaku* $101\,325\,\mathrm{Pa}$ *objem* $1\,\mathrm{m}^3$ *a výsledky porovnejte.*

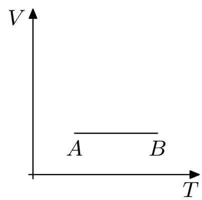
Poznámka: *Van der Waalsovy konstanty pro vodík jsou* $a = 0{,}0247\,\mathrm{m}^6{\cdot}\mathrm{Pa}{\cdot}\mathrm{mol}^{-2}$ *a* $b = 2{,}66 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{mol}^{-1}$.

(1) Je dobré si povšimnout toho, že grafy ukázané v seriálu nám o daném ději dokáží povědět co nejvíce. Navíc jsou to grafy, ve kterých se na ose nevyskytuje právě konstantní veličina. Pokud si rozmyslíme tuto skutečnost, zjistíme, že nezávisle na vztahu, který nám říká stavová rovnice $pV = nRT$, bude na grafu, na jehož ose se nachází konstantní veličina, termodynamický děj ideálního plynu vyjádřen pouze úsečkou, která je kolmá na osu s konstantní veličinou. Pokud by to tak nebylo, konstantní veličina by se měnila, což to si jistě protiřečí.

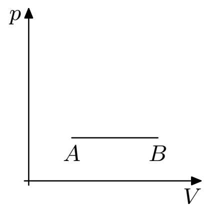
Níže tedy uvádíme chybějící grafy pro všechny děje s ideálním plynem. Jak si můžete povšimnout, žádný z nich nám o tomto ději neříká nic nového, protože konstantní veličina se nachází na jeho osách. Všechny děje jsou tedy zaznamenané jako úsečky, a tak můžeme vidět, že dané veličiny jsou opravdu konstantní.



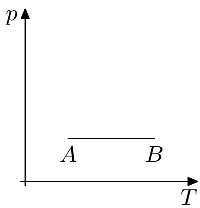
Obr. 1: $p - V$ diagram pro izochorický děj



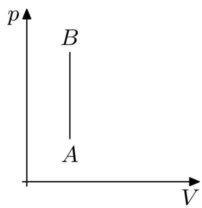
Obr. 2: $V - T$ diagram pro izochorický děj



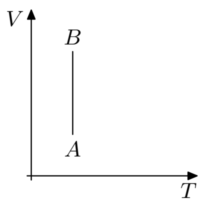
Obr. 3: $p - V$ diagram pro izobarický děj



Obr. 4: $p - T$ diagram pro izobarický děj



Obr. 5: $p - T$ diagram pro izotermický děj



Obr. 6: $V - T$ diagram pro izotermický děj

(2) Je dobré si takový příklad nejprve propočítat s modelem ideálního plynu, se kterým jsme již obeznámeni ze seriálu lépe a častěji se s ním můžeme v termodynamice setkat. Použijeme tedy stavovou rovnici $pV = nRT$. Z ní si množství vodíku v molech dokážeme vyjádřit velice snadno. Prvně si však musíme převést stavové veličiny plynu na základní jednotky. Musíme si dát hlavně pozor na to, že teplota T je termodynamická teplota, která se nevyjadřuje v °C, ale v K. Převod mezi jednotkami je zde jednoduchý, neboť při převodu do stupňů Kelvina pouze posunujeme nulu. Platí tedy $T = 25\,°\mathrm{C} = 25 + 273{,}15\,\mathrm{K} = 298{,}15\,\mathrm{K}$. Další veličiny již máme ve správných jednotkách. Tlak v plynu je $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, objem plynu je $V = 1\,\mathrm{m}^3$ a je také dobré si připomenout univerzální plynovou konstantu $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$. Nyní stačí dosadit do vyjádřeného látkového množství ze stavové rovnice

$$n = \frac{pV}{TR} = \frac{101\,325\,\mathrm{Pa} \cdot 1\,\mathrm{m}^3}{298{,}15\,\mathrm{K} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}} \doteq 40{,}876\,\mathrm{mol}$$

Nyní se pokusíme vyjádřit totéž z rovnice pro van der Waalsův model plynu. Jak vidíme již ze členů rovnice, budeme řešit rovnici kubickou. Pojďme si tedy ukázat úpravy, kterými se k ní dostaneme. Prvně si roznásobíme závorky.

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = pV + a\frac{n^2}{V} - pnb - ab\frac{n^3}{V^2} = nRT \quad \Rightarrow$$

$$\frac{ab}{V^2}n^3 - \frac{a}{V}n^2 + n(pb + RT) - pV = 0$$

Obecně je takovou rovnici velice těžké řešit. Můžeme takovou rovnici zadat do nějakého počítačového programu, který umí řešit vyšší polynomické rovnice, nebo se ji můžeme pokusit vyřešit sami. Chceme-li se alespoň přiblížit k jejímu řešení, můžeme k němu iterovat. Vyjádříme si z původní rovnice neznámé n jako

$$n_i = \frac{1}{RT}\left(p + a\frac{n_{\text{i-1}}^2}{V^2}\right)(V - n_{\text{i-1}}b)$$

Víme, že výsledek Van der Walsova modelu by měl být blízký výsledku pro ideální plyn. Začneme tedy použitím $n_0 = 40{,}876\,\mathrm{mol}$. Následně jsme takto schopni vyjádřit si n_1 právě dle výrazu nahoře po dosazení za všechny hodnoty jako v předešlé části úkolu. Je dobré si připomenout Van der Walsovy konstanty pro vodík, tedy $a = 0{,}0247\,\mathrm{m^6{\cdot}Pa{\cdot}mol^{-2}}$ a $b = 2{,}66 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}$. Po dosazení vyjde $n_1 \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$. Nyní dosadíme n_1 na místo n_0 a vyjádříme si $n_2 \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$. Jak vidíme, již po druhé po iteraci se $n_1 \approx n_2$, a proto je můžeme považovat za řešení této rovnice na 5 platných cifer.

Nyní můžeme porovnat oba výsledky. Již z toho, že nám výsledek pro Van der Waalsův plyn ziteroval tak rychle z původního výsledku, můžeme vidět, že není tak výrazný rozdíl mezi množstvím $n_\mathrm{W} \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$, určeným právě takto, a množstvím $n_i = 40{,}876\,\mathrm{mol}$ dle stavové rovnice pro ideální plyn. Tento rozdíl je pro většinu našich výpočtů zanedbatelný.

Ondřej Knopp
`Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.