

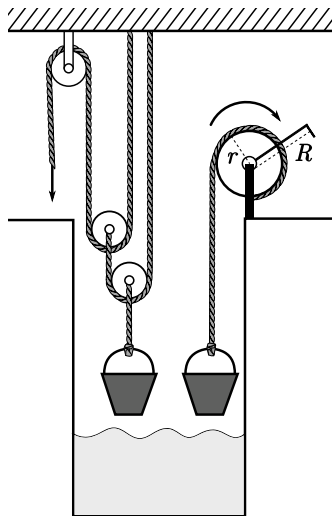
Úloha II.4 . . . Získávání vody

7 bodů; průměr 6,09; řešilo 47 studentů

Mírek s Kátou jednu tahali vodu ze studny a nemohli se dohodnout, kdo z nich vymyslel pohodlnější nástroj, díky kterému by při vytažování kbelíku s vodou o hmotnosti $M = 10 \text{ kg}$ museli působit co nejmenší silou.

Káta navíjí lano s kbelíkem na buben o poloměru $r = 20 \text{ cm}$, kterým otáčí pomocí kliky konstantní rychlostí ve vzdálenosti $R = 40 \text{ cm}$ od osy otáčení (viz obrázek). Mírek zase postavil kladkostroj ze tří lehkých kladek (viz obrázek) a za volný konec lana tahal těž konstantní rychlostí. Spočtete, jakou sílu museli oba na vytáhnutí kbelíku s vodou vynaložit, a rozhodnete, který nástroj je lepší. Tření a hmotnost lan neuvažujte.

Bonus: Který z nich vykonal při získávání vody větší práci?



Obr. 1: Vlevo je Mírkův kladkostroj, vpravo Kátin buben

Mírkův kladkostroj, jak vidíme na obrázku, se sestává z jedné pevné a dvou volných kladek. Víme, že pevná kladka mění pouze směr působení síly potřebné pro pohyb předmětu (a nikoliv její velikost). Také víme, že volná kladka dvakrát zvětšuje sílu působící na předmět (vzhledem k síle, kterou působí Mírek na druhý konec lana), ale zároveň však dvakrát zvětšuje délku lana, za které musí Mírek táhnout, aby předmět dostal do požadované výšky. Obecně tedy můžeme říci, že síla, kterou Mírek musí vyvinout k vytažení předmětu, se rovná podílu tíhové síly předmětu a n -té mocniny dvojky, kde n označuje počet volných kladek v kladkostroji:

$$F = \frac{F_g}{2^n}.$$

Jelikož ze zadání známe hmotnost kbelíku s vodou, $M = 10 \text{ kg}$, můžeme do tohoto vzorce dosadit:

$$F = \frac{Mg}{2^n} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2^2} = 25 \text{ N}.$$

Mirek tedy na lano bude muset působit silou 25 N.

Kátin buben funguje na principu jednozvrtné páky. Pro jednozvrtné páky platí, že momenty sil ve všech místech ramene si musí být rovny. Moment síly přitom definujeme jako součin vzdálenosti od středu otáčení a síly, kterou na rameno působíme.

$$M = Fa,$$

kde F značí sílu působící v daném bodě a a vzdálenost bodu od středu otáčení. Pro Kátin buben bude platit rovnost momentu síly F_2 , kterou Káťa působí na rukojeť bubnu, a momentu tíhové síly kbelíku F_1 :

$$M_1 = M_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 r = F_2 R.$$

Z rovnice tedy vyjádříme F_2 a dosazením získáme

$$F_2 = F_1 \frac{r}{R} = Mg \frac{r}{R} = 10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \frac{20 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 50 \text{ N}.$$

Káťa tedy musí na páku bubnu působit silou 50 N. Vidíme tedy, že menší silou bude muset působit Mirek se svým kladkostrojem.

Bonus

Rozdíl potenciální energie vytaženého kbelíku a kbelíku na dně studny je nezávislý na tom, jakou silou působíme při jeho vytahování, tedy v obou dvou případech bude tento rozdíl stejný. A jelikož změna potenciální energie je rovna práci, kterou na zvedání objektů musíme použít, je zřejmé, že Káťa i Mirek vykonali při vytahování stejnou práci.

Petr Doubravský

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.