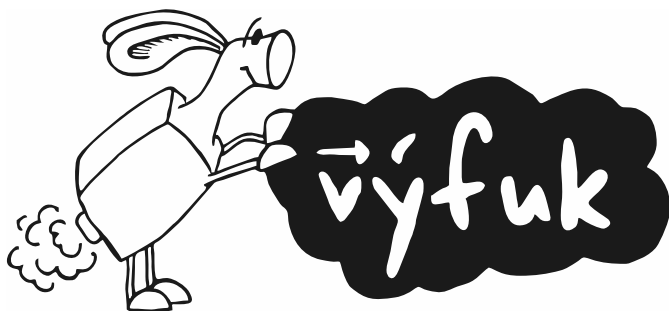




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

letošní ročník Výfuku se již přehoupl do své druhé poloviny, neboť spolu s touto brožurkou najdete ve svých obálkách opravená řešení třetí série.

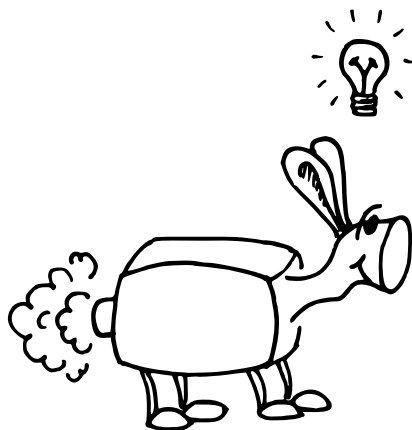
Těž byste v obálkách měli najít pozvánku na *letní tábor*, který proběhne na přelomu července a srpna ve Velkých Karlovicích. Na tábor se již můžete přihlásit v naší databázi. V případě velkého zájmu bude o vaši účasti rozhodovat pořadí po prvních třech sériích Výfuku.

Mimo tábora nabízíme i účast na *jarním setkání*, které letos proběhne na začátku května v Olomouci. Opět se můžete těšit na mnoho zajímavých aktivit a setkání s dalšími řešiteli a organizátory Výfuku. Pozvánku na setkání byste měli najít v obálkách.

Ale zpátky k aktuální sérii. V brožurce naleznete její zadání a text Výfučení. Ten momentálně pojednává o optických vlastnostech zrcadel a čoček. Doufáme tedy, že se brzo pustíte do řešení a četby!

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



matfyz



Zadání V. série



Termín doručení: 17. 4. 2017 20.00

Úloha V.1 ... Pěkné vysvědčení ⑥ ⑦

5 bodů

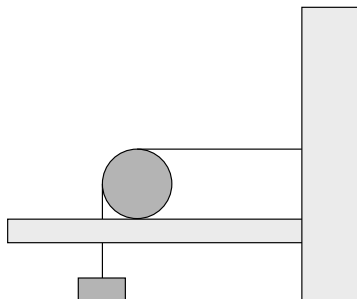
Třídní učitelka VII.B je matikářka a ráda si z dětí utahuje. Na konci ledna, než rozdala vysvědčení, je potrápila následující hádankou: 18 žáků dostalo z češtiny jedničku. Jedničku jako známku z matematiky obdrželo pouze 10 žáků. Jaký je nejmenší počet dětí, kteří mají z obou předmětů výbornou, víte-li, že dětí je ve třídě celkem 26. Nejvíce kolik dětí nezískalo jedničku ani z jednoho z předmětů?



Úloha V.2 ... Válec ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Na dvou vodorovných kolejkách je položen válec o poloměru $r = 15$ cm. Válec se po nich pohybuje bez prokluzování. Na válec položíme provaz o délce $l = 2$ m tak, že je na jedné straně uchycen na stěně ve výšce 30 cm nad kolejkami a jeho druhá část volně visí dolů (viz obrázek 1). Střed válce je vzdálen od stěny 1 m. Na volném konci je zavěšeno závaží o hmotnosti $m = 250$ g. Nyní provaz přitáhneme ke stěně o 50 cm. Jak se změní výška závaží?



Obr. 1: Boční náčrt válce na kolejkách

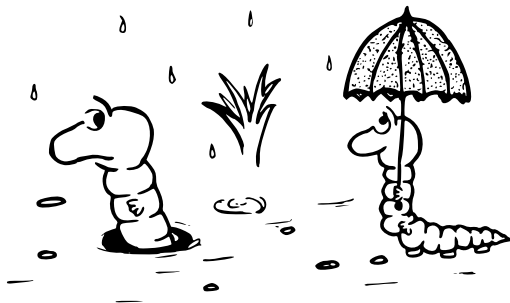
Úloha V.3 ... Jeskyně ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Ve výfučkomutí jeskyni žije zvláštní druh housenek. Ty žijí společně ve velkých skupinách a stejně tak se spolu vydávají za potravou. Cestu k potravě mají ale poněkud nestandardní, neboť cestují ve dvou vrstvách na sobě.

Dolní vrstva housenek leze po zemi rychlostí $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, zatímco horní vrstva se pohybuje po dolní vrstvě opět rychlostí v . Když se housenka z horní vrstvy dostane až úplně dopředu, tak seskočí dolů a zařadí se do vrstvy spodní. Naopak, poslední housenka ve spodní vrstvě vyleze do horní vrstvy. Housenek je mnoho a jsou velmi malé. Jeden housenkový útvar má délku $d = 3$ m a v porovnání s ním má jediná housenka zanedbatelnou délku.

Když se na konci dne skupina housenek vrací z pastvy zpět do jeskyně, uspořádají se do svého útvaru tak, že jejich předek je vzdálen od vstupu do jeskyně o $l = 15$ m. Za jak dlouho proleze vstupem do jeskyně housenka, která se na začátku nachází na konci útvaru, tzn. housenka, která právě nastupuje na horní vrstvu housenek?



Úloha V.4 ... Lanovka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Viktor rád lyžuje, a tak jednou začal přemýšlet, jak efektivní je přeprava lanovkou. Na lanovce je $n = 100$ čtyřsedaček. Převážná kapacita lanovky je $k = 2400$ osob za hodinu. Jakou efektivní účinnost má lanovka (tedy jaký je poměr výkonu určeného k vytahování osob k celkovému výkonu lanovky), jestliže délka lanovky je $l = 850$ m, lanovka překonává převýšení $h = 180$ m a motor lanovky vyvine tažnou sílu $F = 60$ kN? Můžete uvažovat, že všechny sedačky jezdí plně obsazené a ve stanici se téměř nezdržují. Hmotnost průměrného lyžaře je $m = 80$ kg.



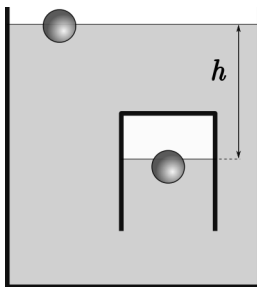
Úloha V.5 ... Kulička v ponorce ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

8 bodů

Pavla se o víkend rozhodla studovat tlakové a vztahové síly. Vzala si proto malou kuličku s hustotou $\rho = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a nechala ji plovat na hladině vody o hustotě $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- (1) Jaká část objemu kuličky je ponořená pod vodní hladinu?
- (2) Tento pokus Pavle přišel brzo nudný. Rozhodla se sestavit si *ponorku*. Její konstrukce byla velmi jednoduchá. Vzala si obyčejnou sklenici s hmotností $m = 0,5$ kg a objemem $V_0 = 550$ ml, kterou otočila dnem nahoru a opatrně ponořovala do vody. Pavla sledovala, jak se s rostoucí hloubkou vzduch v sklenici stlačuje, a do sklenice stoupá voda. Je-li vzduch dostatečně stlačen, sklenice zůstane ve vodě plovat. Zjistěte, na jaký tlak musí být vzduch ve sklenici stlačen. Zanedbejte hmotnost vzduchu a objem skla, ze kterého je sklenice vyrobena. Atmosférický tlak v době experimentu byl $p_0 = 101\,000$ Pa.
- (3) Pavla si správně uvědomila, že stlačování vzduchu má na svědomí hydrostatický tlak odpovídající rozdílu mezi volnou hladinou vody a hladinou vody v její ponorce h (vizte obrázek 2). Vypočítejte tento výškový rozdíl.
- (4) Pavla pokus s ponorkou zopakovala ještě jednou, ale tentokrát nechala v ponorce plovat svoji kuličku. Jaká část objemu kuličky bude ponořena pod hladinou vody v ponorce?

- (5) Uvažujme, že Pavla ponorku potápí rovnoměrnou rychlostí. Odhadněte, zda-li bude kulička během potápění ponořena více nebo méně než na jeho konci.



Obr. 2: Nákres Pavlina pokusu

Úloha V.E ... Stříkačka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Tomáš našel v lékárnice stříkačku o objemu 50 ml. Aby si ji vyzkoušel, stříkal z ní vodu. Tu ho náhle napadlo, že by chtěl vědět maximální rychlost, kterou je schopen vodu z jeho stříkačky vystříknout.

Pomozte mu a experimentálně změřte tuto veličinu (rychlost vody, která vylétá ze stříkačky, v metrech za sekundu). Snažte se použít podobný objem stříkačky, jako použil Tomáš. Jako obvykle provedení svého experimentu pečlivě popište a měření několikrát opakujte.

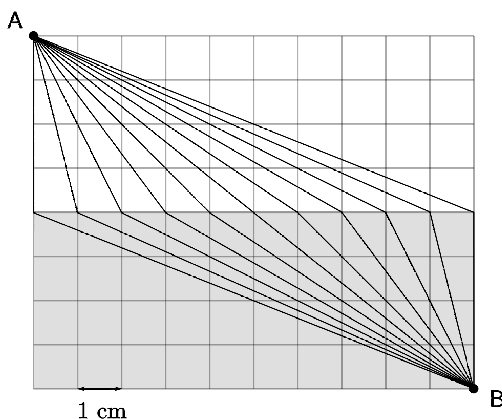
Úloha V.C ... Fermatův test ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Ve Výfučení uvádíme, že odvození Snellova zákona z Fermatova principu nejmenšího času je náročné. Zkusme tedy ověřit obrácené tvrzení.

V našem zjednodušeném modelu položíme rychlost světla ve vakuu rovnou $c = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvažujme dále dva body A a B, které umístíme na čtvercovou síť do bodů $A = [0 \text{ cm}; 4 \text{ cm}]$ a $B = [10 \text{ cm}; -4 \text{ cm}]$, každý do jiného optického prostředí (vizte obrázek 3). Index lomu bílé části mříže je $n_0 = 1$, index lomu šedé části je $n_1 = \sqrt{3} \doteq 1,73$.

- (1) Uvažujme jedenáct různých paprsků (viz obrázek 3), které se šíří mezi body A a B. Vypočítejte pro každý z paprsků čas jeho letu v sekundách a výsledné hodnoty zakreslete do grafu (na vodorovnou osu můžete vynést x -ovou souřadnici místa, ve kterém paprsek prošel přes rozhraní optických prostředí).
- (2) Mezi vypočítanými časy najděte ten nejmenší. Pečlivě změřte nebo vypočítejte úhel dopadu α a úhel lomu β .
- (3) Vypočítejte součiny $n_0 \sin \alpha$ a $n_1 \sin \beta$. Shodují-li se tyto hodnoty, pak platí Snellův zákon. Je tomu skutečně tak?



Obr. 3: Jedenáct různých cest pro světelný paprsek



Výfučtení: Jednoduché optické soustavy

Na následujících stránkách vám představíme pravidla, kterými se řídí světlo při průchodu různými optickými prvky. Část fyziky, která se těmito jevy zabývá, se nazývá *paprsková optika*. V běžném světě vnímáme světlo jako paprsek. To znamená, že se pohybuje rovně a přímočaře. Změna směru šíření nastává pouze při odrazu nebo průchodu do prostředí s jinými optickými vlastnostmi. Navíc se světlo šíří pro naše vnímání nepředstavitelně rychle, takže všechny děje paprskové optiky probíhají okamžitě.

Změna směru šíření světelných paprsků má dva možné důvody. Za prvé se může od nějakého materiálu odrazit, například od rovných nebo zakřivených zrcadel. O zákoně odrazu si povíme později. Za druhé, při dopadu paprsku na rozhraní dvou různých materiálů může dojít k lomu světla. Takovéto optické rozhraní může být například rozhraní vzduchu a vody. Lom světla se projevuje okamžitou změnou směru světelného paprsku, takže lomený paprsek světla poletí trochu jiným směrem, než dopadající. Tento jev je popsán Snellovým zákonem, o kterém si také povíme v dalších kapitolách.

Hlavní využití paprskové optiky nalezneme v zařízeních jako jsou dalekohledy nebo mikroskopy. Tyto tzv. optické soustavy jsou často složité posloupnosti optických prvků – čoček a zrcadel, které nám umožňují světlo koncentrovat a zvětšovat daleké nebo malé předměty. V tomto textu se naučíme popisovat tři optické prvky: rovinná zrcadla, vypuklá zrcadla a tenké čočky. Dále si povíme o tom, jak funguje samotné zobrazování předmětů.

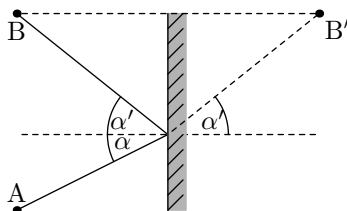
Princip nejkratšího času

Oba výše popsané děje, tzn. odraz a lom světla, lze zobecnit do jednoho tvrzení, které se nazývá *Fermatův princip nejkratšího času*. Tento princip tvrdí, že světlo se mezi dvěma body pohybuje po takové trajektorii, která mu zabere nejmenší čas na uražení.

Tím se rovnou vysvětluje, proč se světlo pohybuje přímočaře – přímá spojnice dvou míst je nejkratší a zároveň tedy i nejrychlejší volba. Fermatův princip navíc zahrnuje geometrii odrazu a lomu a také fakt, že se světlo v různých materiálech pohybuje různou rychlostí.¹ V praxi si platnost Fermatova principu ukážeme při odvození zákona lomu na Snellově zákonu.

Zrcadla a zákon odrazu

Při odrazu světelný paprsek nepřechází do jiného optického prostředí. Jinými slovy, rychlost jeho šíření zůstává stejná a Fermatův princip se dá přeložit pouze na princip nejkratší vzdálenosti mezi zdrojem světla A, libovolným bodem na odrazivé ploše a místem B, kde odražený paprsek sledujeme, viz obr. 4. Úhel dopadu, měřený od kolmice označme α a odražený paprsek α' .



Obr. 4: Obecný odraz světla a nejkratší trajektorie

K nalezení nejkratší vzdálenosti si pomůžeme trikem. Bod B si zobrazíme osovou souměrností podle zrcadla na bod B' jako na obrázku 4. Vzdálenosti bodů B a B' od místa, kde se světlo odráží, se kvůli symetrii problému neliší.

Aby byla trajektorie mezi body A a B nejkratší, musí být nejkratší i mezi body A a B' . Tato nejkratší trajektorie ale není nic jiného než rovná čára! Úsečka spojující body A a B' nám vyznačuje místo, kam musí dopadnout světelný paprsek tak, aby splnil Fermatův princip. Je jednoduché všimnout si, že pro úhly dopadu a odrazu platí $\alpha = \alpha'$. Ukázali jsme tedy, že pokud světelný paprsek dopadá na zrcadlo pod úhlem α , pod stejným úhlem se i odráží. Těto skutečnosti se říká zákon odrazu.

Zobrazení rovinným zrcadlem

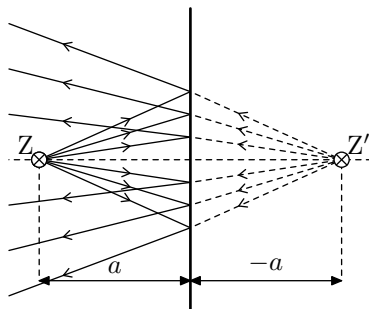
Před tím, než se pustíme do samotného zobrazování, si představíme základní pojmy. Jako zobrazovaný *předmět* budeme uvažovat pouze bodový zdroj světla, ze kterého vycházejí paprsky do všech směrů stejně (tímto zdrojem může být například malá žárovka). *Obraz* je pak to, co uvidíme po přechodu světla vycházejícího z předmětu optickou soustavou.

Zobrazování rovinným zrcadlem uvádíme na obrázku 5. Bodový zdroj Z vysílá světelné paprsky směrem k zrcadlu. Tyto paprsky se od něj odrážejí tak, aby splňovaly zákon odrazu a vzájemně se rozcházejí. Můžeme si povšimnout, že tyto rozcházející se paprsky vypadají jako kdyby vycházely ze smyšleného zdroje světla Z' nacházejícího se za zrcadlem (vizte čárkované čáry).

Tento falešný zdroj je tedy naším obrazem. Jelikož se ale nachází „za zrcadlem“, obraz nazýváme virtuální. Ze symetrie obrázku 5 vidíme, že se obraz vytvořil ve stejné vzdálenosti a od

¹ Známá rychlost světla $c \doteq 300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ platí jen pro světelné paprsky pohybující se ve vakuu. V materiálech jako je sklo, voda, atd. se světlo pohybuje menší rychlostí.

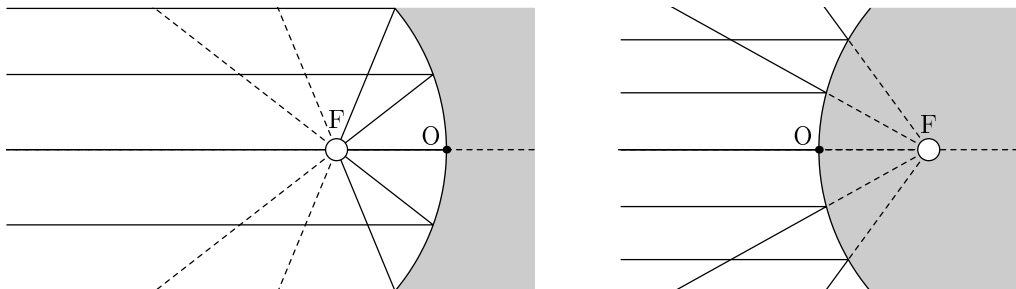
zrcadla, v jaké je umístěn předmět. Abychom označili, že předmět leží až *za* zrcadlem, označíme tuto vzdálenost se záporným znaménkem (tomuto říkáme tzv. znaménková konvence).



Obr. 5: Obecný odraz světla od odrazivé roviny

Kulová zrcadla

Kulové zrcadlo je část kulové zrcadlové plochy, přičemž zrcadlová plocha může být uvnitř (tzn. duté zrcadlo, na obrázku 6 vlevo) nebo zvenku (tzn. vypuklé zrcadlo, na stejném obrázku vpravo). Pokud letí k zrcadlu svazek paprsků rovnoběžný s optickou osou (to je spojnice středu a povrchu zrcadlí koule, obvykle je to osa symetrie zrcadla), poblíž optické osy se všechny paprsky soustředí do jednoho bodu. Tomuto bodu se říká ohnisko a často se značí F . Vzdálenost ohniska od bodu O se nazývá ohnisková vzdálenost a značí se f . Pokud je poloměr kulové plochy R , pak platí $f = R/2$, jak můžeme vidět mj. na obrázku 6. S použitím znaménkové konvence můžeme napsat, že pro duté zrcadlo platí $f = R/2$ a pro vypuklé zrcadlo $f = -R/2$.



Obr. 6: Vlevo duté zrcadlo, vpravo vypuklé

Gaussova zobrazovací rovnice

Výše popsané zobrazení lze zobecnit tak, aby bylo možné spočítat polohu obrazu při dané poloze zdroje. Omezme se na zdroje, které se nacházejí na optické ose zrcadla ve vzdálenosti a

od průsečíku optické osy a zrcadla. Toto tzv. zobrazovací zařízení má ohniskovou vzdálenost $f = R/2$ a předmět zobrazí do obrazu, který je vzdálen od průsečíku optické osy a zrcadla o vzdálenost a' .

Gaussova zobrazovací rovnice spojuje veličiny a , a' a f vztahem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}.$$

Při použití této rovnice nesmíme zapomínat na znaménkovou konvenci. Na jedné straně musíme použít správné znaménko ohniskové vzdálenosti v závislosti na typu použitého zrcadla, na druhé straně musíme správně porozumět znaménku, které vyjde pro a' . Je-li $a' < 0$, obraz se nachází „za zrcadlem“, a je tedy virtuální. Je-li ale $a' > 0$, předmět se zobrazí „před zrcadlem“ a jedná se o reálný obraz.

Zkusme si ověřit, zda-li Gaussova rovnice dává stejné výsledky jako jsme si popsali výše (například pro duté zrcadlo). Abychom z bodového předmětu dokázali vytvořit rovnoběžný svazek paprsků, musí být předmět od dutého zrcadla opravdu daleko, ideálně v nekonečnu (tzn. platí $a = \infty$). Jelikož v zobrazovací rovnici používáme převrácenou hodnotu $1/a$ a a je nekonečně velké, můžeme se tohoto členu zbavit a psát $1/a = 0$.² Ze zobrazovací rovnice pak dostaneme

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow a' = f = \frac{R}{2}.$$

Jak vidíme, obraz umístěný v nekonečnu se zobrazí do ohniska, přesně tak, jak je řečeno výše. Sami si můžete zkusit, že rovnice dává dobré výsledky i pro vypuklé zrcadlo.

Pokud zdroj a obraz prohodíme, tzn. zdroj umístíme do ohniska ($a = f$), dostaneme rovnici

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{a'} = 0 \Rightarrow a' = \infty.$$

Zdroj umístěný do ohniska se tedy zobrazí až v nekonečnu. To znamená, že takto umístěný zdroj vytvoří svazek rovnoběžných paprsků.

V případě, že rovnici chceme použít pro rovinné zrcadlo, musíme udělat malý trik a představit si, že rovinné zrcadlo je vlastně kulové zrcadlo s velmi velkým poloměrem – takže položíme $R = \infty$. Ohnisková vzdálenost tohoto zrcadla je pak $f = R/2 = \infty$ a její převrácená hodnota je $1/f = 0$. Člen na pravé straně zobrazovací rovnice zanikne a platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 0 \Rightarrow a' = -a.$$

I v tomto případě jsme dostali správný výsledek.

Snellův zákon

Dalším jevem, kterým se budeme zabývat je lom světla. K lomu dochází tehdy, když světlo prochází mezi materiály s různou rychlostí šíření. Již jsme si řekli, že světlo se ve vakuu šíří rychlostí $c \doteq 300\,000\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Průhlednými materiály se světlo šíří rychlostí $v = c/n$, kde $n \geq 1$ je veličina zvaná index lomu. Každé prostředí má tedy určen nějaký index lomu. Index lomu

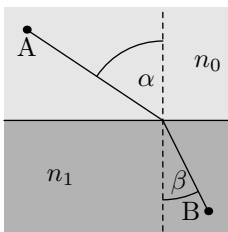
² *Odůvodnění* Představme si, že a není nekonečno, ale je to jenom hodně velké číslo, např. 1 000 000. Jeho převrácená hodnota je pak číslo velice malé: $1/1\,000\,000 = 0,000\,001$. Zvyšuje-li se hodnota a do nekonečna, jeho převrácená hodnota se pak snižuje do nuly.

vakua je tedy přesně 1. Vzduch má rovněž index lomu velmi blízký jedničce, tzn. světlo téměř vůbec nezpomaluje. Naproti tomu takový diamant má index lomu až 2,4.

Příklad lomu světla zobrazuje obrázek 7. V něm světlo prochází z bodu A do bodu B, při tom ale prochází z prostředí s indexem lomu n_0 do prostředí s indexem lomu n_1 , přičemž platí $n_0 < n_1$. Trajektorie světelného paprsku i zde splňuje Fermatův princip nejmenšího času. Použitím právě tohoto principu a pokročilé matematiky lze dospět ke vztahu mezi úhlem dopadu α , úhlem lomu β a indexy n_0 a n_1 (vizte obrázek 7). Tomuto zákonu se říká Snellův zákon a matematicky lze vyjádřit jako

$$n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta,$$

kde je písmeny $\sin$ označena goniometrická funkce sinus. Pokud goniometrické funkce neznáte, nezoufejte. Na našich stránkách³ je zveřejněno nejedno Výfučení právě o goniometrických funkcích. Známe-li optické vlastnosti obou prostředí a úhel dopadu, snadno tedy umíme vypočítat úhel lomu β , tzn. spočítat, jak moc se světlo zlomí.



Obr. 7: Lom světla na rozhraní dvou prostředí

Tenké čočky

Také lom světla můžeme využít k soustředění světla podobně jako odraz od kulových zrcadel. Optickým prvkům s touto vlastností říkáme čočky. Jednodušeji lze popsat lom světla na čočkách se zanedbatelnou tloušťkou, tzv. tenkých čočkách. I tenké čočky lze popsat ohniskovou vzdáleností f . Pokud na čočku dopadá rovnoběžný svazek světelných paprsků podél optické osy čočky, pak se paprsky protnou opět v ohnisku.

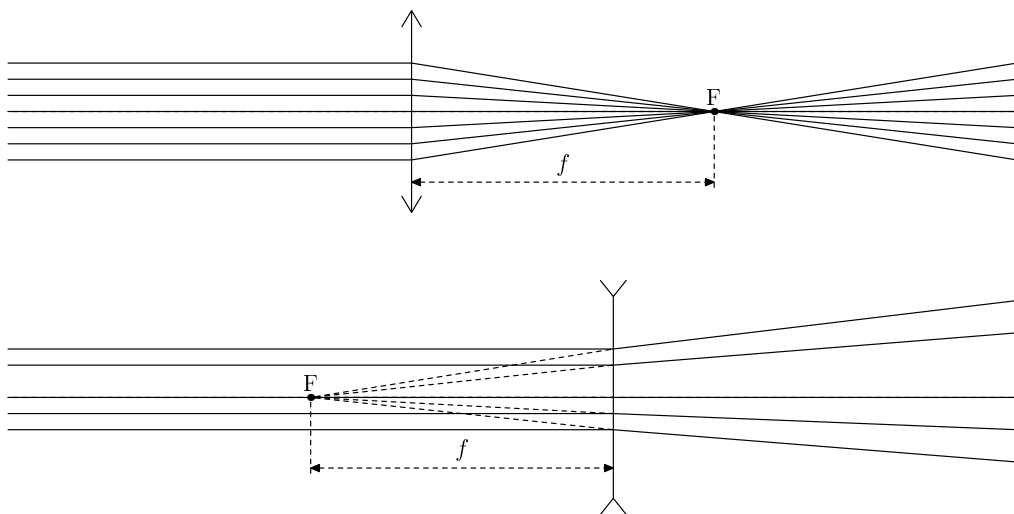
Rozlišujeme dva druhy čoček. Pokud $f > 0$, čočka rovnoběžné paprsky zaostří do ohniska – takovým čočkám říkáme spojky (vizte obrázek 8 nahoře). Druhý typ čočky, rozptylku, vidíme na obrázku 8 dole. Pro rozptylku platí $f < 0$, takže původně rovnoběžné paprsky rozptýlí tak, že se zdá, jakoby vycházely z bodového zdroje ukrytého za čočkou. Abychom zdůraznili, že se jedná o tenké čočky, v obrázcích je značíme jako úsečky opatřené šipkami. Šipky směrem ven značí spojku, šipky směrem dovnitř zase označují rozptylku.

I pro čočky platí Gaussova zobrazovací rovnice, navíc se stejnou znaménkovou konvencí jako u kulových zrcadel. Speciálně v rovnici místo převrácené hodnoty ohniskové vzdálenosti $1/f$ používáme tzv. optickou mohutnost čočky φ :

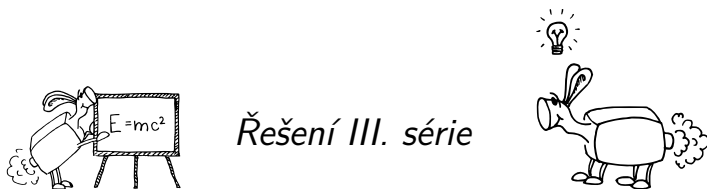
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \varphi,$$

Jednotka této veličiny je formálně m^{-1} , ale častěji ji nazýváme *dioptrie* (značka D nebo dpt).

³<http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni>



Obr. 8: Nahoře spojka a její ohnisko, dole rozptylka a její ohnisko.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... Chytím autobus?

4 body; průměr 3,63; řešilo 19 studentů

Autobus jezdí z konečné každých deset minut a cesta mezi zastávkami zabere autobusu jednu minutu. V chladných měsících Káta nechce stát na zastávce déle než dvě minuty. Aby jí nebyla zima, raději se zahřeje pohybem a na další zastávku jde pěšky, přičemž cesta mezi dvěma zastávkami jí trvá pět minut.

Nyní je Káta na konečné zastávce a další autobus jí jede za sedm minut. Na které zastávce nastoupí Káta do autobusu?

Na začátku se Káta nachází na konečné zastávce. Nejbližší autobus vyjíždí ale až za 7 min. Jelikož Káta nechce čekat déle než 2 min, rozhodne se vyjít.

Káta jde mezi zastávkami pět minut, takže na první zastávce bude v čase 5 min, na druhé v čase 10 min, na třetí v čase 15 min a tak dále.

Autobus vyjíždí z konečné zastávky v čase 7 min a jede mezi zastávkami pouze jednu minutu. Na druhé zastávce bude tedy v čase 8 min, na třetí v čase 9 min atd. Tyto údaje lze pro přehlednost zapsat do tabulky 1 (viz sloupce Káta a 1. autobus).

Z tabulky vidíme, že Káta prvním autobusem určitě nepojede, neboť na první zastávce se jí nebude chtít čekat (takže bude pokračovat dále v chůzi), ale z druhé zastávky ji autobus ujede. Můžeme tedy prozkoumat, zda nepojede dalším autobusem. Ze zadání víme, že další autobus

vyjede o 10 min po předchozím, tzn. v čase 17 min. Časy průjezdu druhého autobusu zastávky uvádíme v tabulce 1 ve sloupci 2. autobus.

Porovnáním tohoto sloupce a sloupce Káťa vidíme, že v momentě, kdy Káťa bude na čtvrté zastávce, by měl druhý autobus za 1 min dojet. 4. zastávka tedy splňuje podmínku, že Káťa nebude čekat na zastávce déle než 2 min. Káťa tedy nastoupí do druhého autobusu na 4. zastávce.

Tab. 1: Časy, kdy bude na zastávkách Káťa, první a druhý autobus.

Zastávka	Káťa	1. autobus	2. autobus
konečná	0 min	7 min	17 min
1. zastávka	5 min	8 min	18 min
2. zastávka	10 min	9 min	19 min
3. zastávka	15 min	10 min	20 min
4. zastávka	20 min	11 min	21 min

Pavla Rudolfová

pavlar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... Ludolfovo číslo

6 bodů; průměr 4,59; řešilo 46 studentů

Číslo π je jedním z nejznámějších čísel matematiky. Udává poměr obvodu kruhu ku jeho průměru. Martin si našel, že v antice se na jeho přibližný výpočet používal poměr obvodu pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice ku průměru kružnice.

Nejprve vypočítejte tento poměr pro čtyřúhelník a šestiúhelník, pak například pomocí Excelu nebo jiného kalkulátoru najděte takový n -úhelník s nejmenším n , že jeho poměr je alespoň 3,14, což je hodnota již velmi blízká π .

Na začátek bychom měli říci, že pro naši úlohu jsou velmi důležité správné ilustrace a obrázky, které vycházejí ze zadání. Výpočetně už tak složitá není. Podstatné je také správně pochopit zadání, a to tak, že je úkolem vypočítat poměr obvodu n -úhelníku ku průměru kružnice, která je mu opsaná.

Jako první máme vypočítat tento poměr pro pravidelný čtyřúhelník, kterým je klasický čtverec o straně a . Průměrem kružnice opsané je úhlopříčka čtverce (viz obrázek 9). Průměr kružnice d tedy vypočítáme za použití Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Obvod čtyřúhelníku se rovná součtu všech stran $o = 4a$. Poměr obvodu čtverce a průměru kružnice je

$$\frac{o}{d} = \frac{4a}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \doteq 2,828.$$

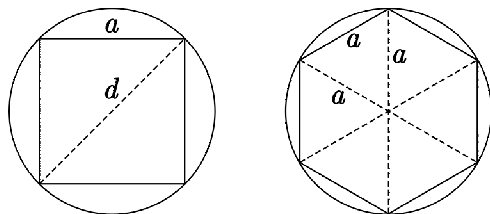
V případě šestiúhelníku je výpočet jednodušší. Stačí se jen zamyslet. Šestiúhelník můžeme rozdělit na šest trojúhelníků, jak je vidět na obrázku 9. Protože se jedná o šestiúhelník, jsou

trojúhelníčky rovnostranné (vyplývá to z velikostí vnitřních úhlů). Průměr kružnice je tedy dvojnásobek jedné strany

$$d = 2a.$$

Obvod je opět součtem všech stran $o = 6a$. Poměr obvodu šestiúhelníku a průměru kružnice je

$$\frac{o}{d} = \frac{6a}{2a} = 3.$$



Obr. 9: Vlevo kružnice opsaná čtverci, vpravo kružnice opsaná šestiúhelníku

Tímto způsobem bychom dále mohli pokračovat k sedmiúhelníku, osmiúhelníku atd. Je to ale velmi zdolouhavé, a proto je jednodušší si odvodit vzorec pro výpočet průměru opsané kružnice. Podobně jako šestiúhelník lze libovolný n -úhelník rozdělit na n rovnostranných trojúhelníků s úhlem naproti základně α . Platí, že poloměr kružnice opsané R je roven výšce těchto trojúhelníků. Označíme-li jejich základnu a , lze poloměr R vypočítat pomocí goniometrické funkce sinus. Pro sinus platí, že je poměrem protilehlé odvěsny a přepony. Zapišeme to jako

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Úhel α v závislosti na n můžeme vyjádřit jako

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}.$$

Dosadíme

$$R = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

Máme vzorec pro poloměr, ale my chceme průměr. Rovnici vynásobíme dvěma. Protože $a = 1$ (tuto veličinu lze volit libovolně), dosadíme ji do rovnice:

$$d = \frac{1}{\sin \frac{180}{n}}.$$

Získali jsme obecnou rovnici pro výpočet průměru kružnice, podobný vzorec naleznete také v tabulkách.

Nyní přejdeme k části s Excelem. My jsme si do prvního sloupce **A** zapsali počet úhlů, do sloupce **B** obvod (protože platí, že počet úhlů je stejný jako počet stran, je obvod totožný s počtem úhlů), do sloupce **C** vzorec pro výpočet průměru kružnice a do sloupce **D** poměr obvodu a průměru. Zastavili bychom se pouze u vzorce pro průměr kružnice. Excel totiž předpokládá, že číselná hodnota uvnitř funkce $\text{SIN}()$ je v radiánech. Je proto třeba úhel převést. Nejjednodušeji to lze udělat použitím funkce $\text{RADIANS}()$, která číslo uvnitř funkce automaticky převede na radiány. Výsledná zadání vzorců do Excelu uvádíme v tabulce 2.

Tab. 2: Obsah prvních pěti řádek tabulky v Excelu.

	A	B	C	D
1	Počet úhlů	Obvod	Průměr kružnice	Poměr obvod/průměr
2	3	3	$= 1/\text{SIN}(\frac{\text{RADIANS}(180)}{A2})$	$= B2/C2$
3	4	4	$= 1/\text{SIN}(\frac{\text{RADIANS}(180)}{A3})$	$= B3/C3$
4	5	5	$= 1/\text{SIN}(\frac{\text{RADIANS}(180)}{A4})$	$= B4/C4$
5	6	6	$= 1/\text{SIN}(\frac{\text{RADIANS}(180)}{A5})$	$= B5/C5$

Sledujeme-li reálná čísla (viz tabulku 3), můžeme si všimnout, že hodnoty čtvrtého sloupce se blíží hodnotě 3,14. Pokud sloupceky dostatečně natáhneme, uvidíme, že při $n = 57$ je hodnota poměru obvodu a průměru kružnice dostatečně blízká číslu 3,14.

Tab. 3: Reálná čísla.

	A	B	C	D
1	Počet úhlů	Obvod	Průměr kružnice	Poměr obvod/průměr
2	3	3	1,1547	2,5981
3	4	4	1,4142	2,8284
4	5	5	1,7013	2,9389
5	6	6	2,0000	3,0000
⋮				
55	56	56	17,8347	3,1399
56	57	57	18,1529	3,1400
57	58	58	18,4710	3,1401

Úloha III.3 ... Sněhová přehánka

6 bodů; průměr 2,27; řešilo 55 studentů

Blížící se Vánoce doprovázejí i občasné sněhové přehánky, po nichž sníh dlouho nevydrží, neboť okamžitě taje. Pavla si po jedné takovéto přehánce všimla, že na autech zaparkovaných u chodníku se sníh chvíli udržel, i když naměřila teplotu vzduchu $+0,5^\circ\text{C}$. Vysvětlete, proč sníh na autech neroztál stejně rychle, jako tomu bylo na chodníku.

Během sněhových přeháněk teplota vzduchu nemusí klesnout pod 0°C . Poté, co napadne sníh, začne probíhat tepelná výměna mezi sněhem, vzduchem a povrchem, na který sníh dopadne. Počítáme-li s tím, že vzduch na úrovni země a na úrovni auta má tutéž teplotu, nebude mít na rozdílnou rychlost tání vliv (tzn. sníh se bude od vzduchu na autě i na chodníku ohřívat stejně rychle).

Co je zde důležité je ona podložka. Musíme si uvědomit, že chodník, který je přímo spojený se zemí, má mnohem větší hmotnost a také výrazně vyšší měrnou tepelnou kapacitu. Jinými slovy, aby se ochladil o 1°C , musí odevzdat více tepla nežli auto.

Jednodušeji řečeno, do chodníku lze „uskladnit“ mnohem více tepelné energie, než do povrchu auta. Chodník proto během tepelné výměny poskytne sněhu mnohem více tepla, čímž zvýší teplotu sněhu nad bod tání, a sníh roztaje. Naopak u auta první sníh roztaje, neboť sedí na „teplé“ kapotě auta. Na tání však sníh spotřebuje velké množství energie, čímž poměrně rychle ochladí auto pod teplotu 0°C , což nakonec způsobí chvilkové udržení sněhu na autě. Ohřátí nad bod tání a následné roztání sněhu má na svědomí až ohřev okolním vzduchem.

Petr Doubravský

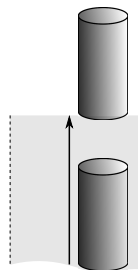
petrd@vfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... Sloup

7 bodů; průměr 4,55; řešilo 56 studentů

Historici nedávno objevili na dně rybníka starodávný sloup ve tvaru válce s poloměrem podstavu $r = 0,5\text{ m}$ a výškou $h = 2\text{ m}$. K jejich překvapení sloup nebyl povalen, ale bezpečně stál svou podstavou na dně rybníka. Aby ho vytáhli na břeh, přivolaní potápěči připevnili na sloup lano a pomocí jeřábu ho zvedli nad hladinu (viz obrázek).

Viktor celou situaci sledoval ze břehu rybníka a vypočítal práci, kterou jeřáb při zvedání sloupu z rybníka vykonal. Spočítejte ji také. Víte, že sloup je homogenní a má hmotnost $m = 4000\text{ kg}$. Rybník má hloubku $H = 7\text{ m}$ a v porovnání s rozměry sloupu je řádově větší.



Tuto úlohu bylo možné vyřešit pomocí sil a pomocí energií. Ukážeme si obě řešení.

Řešení pomocí sil

Naším úkolem je spočítat práci, proto budeme vycházet ze vztahu mezi silou F , dráhou s a prací $W = Fs$. Protože sloup je ponořen do vody, tak na něj bude působit kromě tíhové síly též síla vztlaková. Obě síly ovšem působí v opačném směru, takže se budou odečítat. Sloup stojí na dně, takže tíhová síla určitě převažuje nad silou vztlakovou. Výsledná síla, která bude působit na sloup ve vodě, tedy bude $F_1 = F_g - F_{vz} = mg - \rho_v Vg$, kde $\rho_v = 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vody a $V = \pi r^2 h$ je objem sloupu, neboť se jedná o válec. Takovouto silou budeme sloup zvedat, dokud bude celý ponořen ve vodě, tedy po dráze $s_1 = H - h = 5\text{ m}$.

Poté, co horní podstava válce dosáhne hladiny, nebude válec ponořen celý, a tak bude vztlaková síla působit jen na stále se zmenšující ponořenou část sloupu. Abychom zjistili, jak velká bude *průměrná* síla, která bude v průběhu vytahování sloupu nad hladinu rybníka působit, budeme muset vypočítat, jak velký objem sloupu bude během této fáze průměrně ponořen.

Tento výpočet ale není vůbec složitý! Na začátku bude sloup ponořen celý, na konci bude celý vně. Průměrně bude tedy ponořena polovina sloupu. Proto průměrná vztlaková síla bude poloviční, tedy $F_{vz}/2$ a výsledná síla působící na sloup bude velká $F_2 = mg - \rho_v Vg/2$ a bude působit na dráze $s_2 = h = 2$ m.

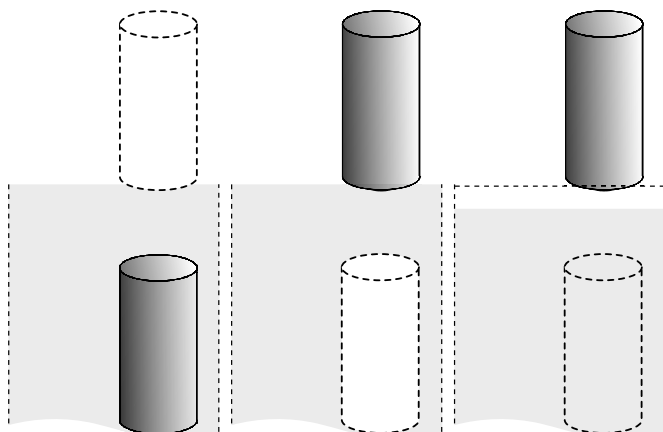
Nyní již můžeme dopočítat výslednou práci:

$$\begin{aligned} W &= F_1 s_1 + F_2 s_2 = (mg - V\rho g) \cdot (H - h) + \left(mg - \frac{1}{2} V\rho g \right) h = \\ &= (mg - \pi r^2 h \rho g) \cdot (H - h) + \left(mg - \frac{1}{2} \pi r^2 h \rho g \right) h = \\ &= [4000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - \pi (0,5 \text{ m})^2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}] \cdot 5 \text{ m} + \\ &+ \left[4000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - \frac{1}{2} \pi (0,5 \text{ m})^2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \right] \cdot 2 \text{ m} \doteq 182 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Řešení pomocí energií

Práce, kterou jeřáb vykoná, musí odpovídat celkové změně potenciální energie všech objektů, které se během zvedání sloupu pohybovaly.

Sloup se po vytáhnutí z rybníka zvedl o $H = 7$ m, takže změna (nárůst) jeho potenciální energie byla jednoduše $E_1 = mgH$. Sloup však není jediný objekt, který se během zvedání pohnul, neboť svoji polohu musela změnit i voda, aby v rybníku vyplnila „díru“, kterou tam zanechal sloup.



Obr. 10: Tři myšlenkové etapy zvedání sloupu.

Přirozeně, „díru“ po sloupu začala ještě během vytahování zaplňovat voda z jeho blízkého okolí. Blízké okolí pak začala zaplňovat voda ze vzdálenějšího okolí, tu pak voda ze vzdálenějšího

okolí a tak dále. Rybník ale není nekonečný, takže chybějící objem vody se musí někde projevit. Jedinou možností, odkud tuto vodu sebrat, je vodní hladina – jednoduše, po vytáhnutí z rybníka hladina rybníka nepatrně poklesne a všechny „díry“ se tak zaplní.

V konečném důsledku tedy „zmizí“ tenká vrstva vody z hladiny rybníka a zaplní se díra po sloupu. Jinde voda svoji polohu (a ani polohovou energii) nezmění. Z pohledu energií si tak můžeme zcela správně představit, že po sloupu skutečně zůstala v rybníce díra, kterou pak najednou vyplnila tenká vrstva vody z hladiny rybníka, viz obrázek 10.

Potenciální energie této vody s objemem V a hmotností $M = \rho_v V$ se během našeho myšlenkového teleportu snížila o $E_2 = Mg\Delta t$, kde Δt je změna výšky těžiště vody. Na začátku byla všechna voda ve stejné výšce na hladině rybníka (tzn. ve výšce H nade dnem), po teleportu vytvořila na dně rybníka válec s těžištěm ve středu, tzn. ve výšce $h/2$ nade dnem. Δt je tedy rovno $H - h/2$ a celková vykonaná práce je tedy

$$W = E_1 - E_2 = mgH - Mg\Delta t = mgH - \rho_v Vg(H - h/2) = 4000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 7 \text{ m} - 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \pi (0,5 \text{ m})^2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (7 \text{ m} - 1 \text{ m}) \doteq 182 \text{ kJ}.$$

Oba postupy jsou fyzikálně správné, není tedy divu, že jsme oběma přístupy dospěli ke správnému výsledku, a to, že jeřáb vykonal práci přibližně 182 kJ.

David Němec

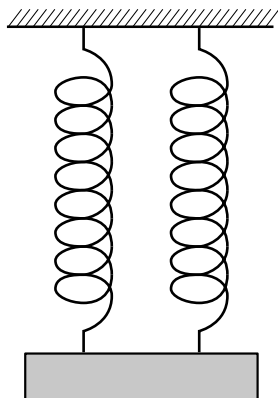
david@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.5 ... Napružená

7 bodů; průměr 5,02; řešilo 47 studentů

Tom našel během předvánočního úklidu ve sklepe pružinu a závaží o hmotnosti $m = 100 \text{ g}$.

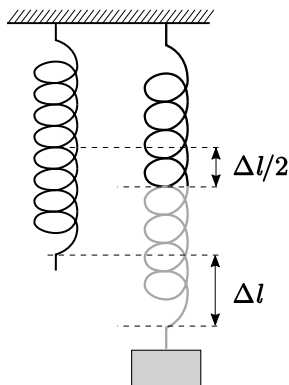
- (1) Pružina se po zavěšení závaží prodloužila o $\Delta l = 10 \text{ cm}$. Určete tuhost pružiny k_1 .
- (2) Dále vzal Tom nůžky a přestříhl pružinu na dvě poloviny. Jaká bude tuhost k_2 nově vzniklých pružin?
- (3) Jak těžké závaží by Tom musel na novou pružinu zavěsit, aby se prodloužila také o $\Delta l = 10 \text{ cm}$?
- (4) O kolik centimetrů se prodlouží nové pružiny, zavěsí-li na ně Tom 100 g závaží tak, jak je znázorněno na obrázku?



- (1) Vztah mezi silou napínající pružinu a prodloužením pružiny se nazývá Hookův zákon a má tvar $F = k\Delta x$, kde k je tuhost pružiny a Δx je její prodloužení. Pokud tedy Tom zavěsí na pružinu závaží, bude pružina napínána jeho tíhou ($F = mg$) a tuhost pružiny k_1 bude

$$k_1 = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,1 \text{ m}} = 9,81 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

- (2) Víme, že tuhost je podíl působící síly a prodloužení pružiny. Když si označíme střed pružiny a poté pružinu zatížíme, pružina se protáhne o Δl a střed pružiny klesne o $\Delta l/2$ (viz obrázek 11). Když si nyní odmyslíme spodní polovinu pružiny, máme pružinu o poloviční délce, která se při zatížení hmotností m prodlouží o $\Delta l/2$. Tuhost poloviční pružiny tedy bude $k_2 = mg/(0,5\Delta l) = 2mg/\Delta l = 2k_1 = 19,62 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



Obr. 11: K odvození tuhosti pružiny poloviční délky.

Pokud bychom chtěli toto tvrzení odvodit, vyjdeme z jiné formulace Hookova zákona, která definuje relativní prodloužení ε jako podíl mechanického napětí σ a Youngova modulu E , což je materiálová konstanta.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Nyní vyjádříme ε jako poměr změny délky Δl a původní délky l a mechanické napětí jako podíl síly F a plochy, na kterou působí, čili průřezu pružiny S . Platí

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\frac{F}{S}}{E},$$

z čehož vyjádříme sílu jako součin změny délky pružiny a nějakého výrazu, který je rovný tuhosti k

$$F = \Delta l \frac{SE}{l}$$

čili $k = SE/l$, proto tedy pružina o poloviční délce bude mít dvojnásobnou tuhost. Tuhost nově vzniklých pružin tedy je $k_2 = 2k_1 = 19,62 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

- (3) Pro krátkou pružinu platí vzorec

$$m_2 g = \Delta l k_2$$

kde m_2 je hmotnost závaží, které na pružinu musí Tom zavěsit. Z toho vyjádříme potřebnou hmotnost závaží.

$$m_2 = \frac{\Delta l k_2}{g} = \frac{0,1 \text{ m} \cdot 19,62 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 0,2 \text{ kg}$$

Závaží by tedy muselo mít hmotnost $m_2 = 200 \text{ g}$.

- (4) Pokud Tom zavěsí na pružiny závaží podle obrázku, tíha závaží se rovnoměrně rozloží na obě pružiny a každá bude natahována poloviční silou. Prodloužení Δl_2 vyjádříme opět z Hookova zákona.

$$\Delta l_2 = \frac{\frac{1}{2} m g}{k_2} = \frac{m g}{4 k_1} = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{4 \cdot 9,81 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}.$$

V tomto případě se tedy pružiny prodlouží o 2,5 cm.

Kateřina Rosická

kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.E ... Hvězdná obloha

7 bodů; (chybí statistiky)

Častým problémem astronomů je tzv. světelné znečištění. Ve velkých městech vlivem umělého osvětlení ztrácíme možnost pozorovat méně jasné hvězdy, neboť je obloha svojí jasností „přesvítí“. Zkuste tedy určit jasnost oblohy v okolí svého bydliště. Nezapomeňte do řešení uvést místo a datum pozorování.

- (1) Během jasné noci si alespoň dvě hodiny po západu Slunce na obloze najděte souhvězdí Býka.
- (2) Podle přiložené mapky si v Býkovi najděte určený trojúhelník.
- (3) Spočítejte, kolik hvězd v tomto trojúhelníku vidíte pouhým okem⁴ a podle tabulky níže zjistěte, jak moc znečištěná je obloha ve vaší lokalitě.

Astronomové pro měření jasnosti hvězd používají jednotku zvanou magnituda, jejíž zavedení není úplně jednoduché. Pro naše měření nám postačí vědět, že čím vyšší magnituda, tím méně jasná je hvězda.

Tipy pro pozorování Pozorování je potřeba provádět za jasné noci, kdy nejsou na obloze žádné mraky, jinak dojde ke znehodnocení měření. Zároveň je potřeba měřit v noci tak, aby byl Měsíc dostatečně daleko od pozorované oblasti. Dále je měření potřeba provádět dále od lamp, billboardů a jiných silných zdrojů světla. A nezapomeňme, že oku trvá zhruba půl hodiny, než si dokonale zvykne na tmou a dokáže rozpoznat ty nejslabší hvězdy a objekty.

Světelné znečištění je častým problémem velkých, ale v poslední době i menších měst. Zdrojem světelného znečištění (nebo také světelného smogu) je nejčastěji veřejné osvětlení, silné reflektory osvětlující městské památky nebo velké reklamní poutače. Světlo, které tyto zdroje vytvářejí, se rozptyluje na malých prachových částicích, resp. vodní páře a přesvětluje tak noční oblohu.

Základem pro rozumné měření světelného znečištění je výběr vhodného pozorovacího místa. Zrovna v této úloze neplatí, že pod svícem je největší tma. Právě naopak, je dobré si najít

⁴Oko není nejcitlivější přímo uprostřed, ale mírně vedle svého středu, vyplatí se tedy dívat se mírně periferně.

Tab. 4: Počet pozorovaných hvězd a odpovídající jasnost oblohy.

počet	jasnost [mag]	počet	jasnost [mag]	počet	jasnost [mag]
1	0,99	11	5,73	21	6,76
2	1,68	12	5,86	22	6,77
3	3,00	13	6,10	23	6,87
4	4,62	14	6,19	24	6,88
5	4,88	15	6,27	25	6,95
6	4,95	16	6,29	26	7,15
7	5,09	17	6,36	27	7,17
8	5,29	18	6,50	28	7,19
9	5,43	19	6,55	29	7,21
10	5,51	20	6,71	30	7,30

místo nepřímo osvětlované zdrojem umělého světla, které by nám svítilo přímo do očí. Dobrá taktika měření je například vyjít k okraji města, kde bydlíte, abyste souhvězdí Býka sledovali „přes“ vaše bydliště. Samozřejmě, pozorovat nelze ani za zvýšené oblačnosti či mlhy.

Dalším rušivým vlivem může být Měsíc. Ten není umělým zdrojem světla, a proto je dobré pozorovat mimo úplněk (který nastal 12. ledna). Splníme-li tyto podmínky, je potřeba počkat ve tmě alespoň půl hodiny, dokud si oko nepřivykne na tmu. Dobře přivyknuté oko je na světlo citlivější.

Pro zvýšení hodnověrnosti vašich měření bylo dobré pozorovat několik nocí v řadě a výsledky jednotlivých pozorování statisticky zpracovat.

Naše měření probíhalo na poli blízko Karviné, části Nové Město⁵ v průběhu pěti dnů, viz tabulku 5. Všechna pozorování byla prováděna od 20:00 do 20:30, daleko od pouličního osvětlení. Měsíc byl v čase pozorování pouze malý srpek a tedy naše měření příliš nerušil. Obloha byla během pozorování bezoblačná.

Po zprůměrování pozorované jasnosti můžeme určit, že jasnost oblohy v Karviné Novém Městě je průměrně 5,17 mag s průměrnou odchylkou měření asi 0,15 mag.

Tab. 5: Výsledky pozorování světelného znečištění nad Karvinou.

datum	počet hvězd	jasnost [mag]	odchylka od průměru [mag]
28.12.2016	8	5,29	0,12
29.12.2016	7	5,09	0,08
30.12.2016	9	5,43	0,26
31.12.2016	6	4,95	0,22
1.1.2017	7	5,09	0,08
Průměr		5,17	0,15

⁵GPS souřadnice: N 49.875444, E 18.531460.

Komentář k došlým řešením

Jeden bod za neopakování měření jsme strhli většině z vás. Opakování měření je ve fyzice důležité. Vyloučíme tím například možné nepříznivé počasí, resp. kolísání úrovně světelného znečištění. Další body jsme museli strhnout těm, kteří nedostatečně popsali své pozorovací místo. Na závěr bychom ale chtěli pochválit ty, kteří nosí brýle na dálku a stejně jako autor tohoto řešení je při pozorování použili.

Marek Božoň

marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.C ... Kyselina

6 bodů; průměr 4,68; řešilo 38 studentů

Při ředění kyseliny chlorovodíkové (HCl) ve vodě (H_2O) dochází k zajímavému ději. Voda dokáže roztrhnout poměrně silnou vazbu mezi vodíkem a chlórem, ale za cenu toho, že vodík přijde o svůj elektron – vznikne tedy kationt H^+ a aniont Cl^- . Vodíkový kationt se pak ale rychle naváže k molekule vody za vzniku kationtu H_3O^+ . Tento „přenos“ vodíku je energeticky výhodný, neboť se při této reakci uvolní 75 kJ energie ve formě tepla na jeden mol HCl .

O kolik se změní teplota v kádince s 200 ml vody, když v ní rozředíme 1 mol koncentrované HCl ?

V celém příkladu se jedná o uvolňování tepla do vody, kterou ve výsledku ohřívá roztok vody a kyseliny. Zadaný objem vody $V = 200$ ml váží $m_{\text{H}_2\text{O}} = 200$ g (neboť hustota vody je $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) a 1 mol HCl váží⁶ přibližně $m_{\text{HCl}} = 36$ g, takže teplo uvolněné po rozředění ohřeje roztok s hmotností $m = m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{HCl}} = 236$ g o několik stupňů, což označíme změnou teploty Δt . Využijeme tedy kalorimetrickou rovnici $Q = mc\Delta t$. Množství tepla odpovídá $Q = 75 \text{ kJ} = 75\,000 \text{ J}$ uvolněných rozpouštěnou HCl . Zjednodušeně lze uvážit, že konstanta c (měrná tepelná kapacita) se přidáním HCl nezmění oproti hodnotě platné pro čistou vodu, tzn. $c = 4\,180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

Nakonec si vyjádříme hledaný rozdíl teplot obecně z kalorimetrické rovnice, poté dosadíme zadané hodnoty:

$$Q = mc\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{Q}{mc} = \Delta t = \frac{75\,000 \text{ J}}{0,236 \text{ kg} \cdot 4\,180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}} \doteq 76 ^\circ\text{C}.$$

Právě proto, že kyselina uvolňuje do vody tolik tepla, se vždy lije kyselina do vody, a ne voda do kyseliny. Pokud lijeme kyselinu do vody, postupně narůstá koncentrace kyseliny a tím pádem i teplota nestoupá skokem, ale pomalu. Naopak po nalití vody do kyseliny je počáteční koncentrace kyseliny v malém množství námi vlité vody vysoká a teplota naroste mnohem rychleji, takže voda může začít vřít a může i vyprsknout.

Poznámky k došlým řešením

Řešení tohoto příkladu se odvíjelo od vyřešení kalorimetrické rovnice. Jediný větší „háček“, na který jste se mohli nechat chytit, byla otázka ohledně zanedbání hmotnosti kyseliny HCl ve vodném roztoku a poté také zanedbávání její měrné tepelné kapacity.

Proč zanedbáváme měrnou tepelnou kapacitu kyseliny, ale nemůžeme zanedbat její hmotnost? Odpovědi se skrývají v celém procesu vzniku roztoku a disociaci (rozkladu) molekul kyseliny na ionty. Kyselina chlorovodíková v roztoku pořád je a nikam nezmizela, tudíž její

⁶https://cs.wikipedia.org/wiki/Kyselina_chlorovodíková

hmotnost musíme do rovnice započítat (nehledě na to, že její hmotnost není velikostně vůči hmotnosti vody až tak malá, aby se její zanedbání neprojevalo ve výsledku). Co se týče použití měrné tepelné kapacity pro čistou HCl, tu nemůžeme použít právě proto, že se kyselina disociovala na ionty, a tudíž už se její tepelné kapacitní vlastnosti zmenšily.

Pavla Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		4	6	6	7	7	7	6	43	131
1. Patrik Rosenberg	ZŠ Tuháčkova, Brno	4	5	0	2	–	–	5	16	52
2. Pavel Šimůnek	ZŠ K. J. Erbeny, Miletín	2	6	6	6	7	–	–	27	48
3. Zuzana Weisová	ZŠ Židlochovice	3	4	0	5	–	–	–	12	35
4. Kateřina Stefanová	ZŠ tř. SNP, Hradec Králové	4	–	–	–	–	–	–	4	23
5. Barbora Tuháčková	G Františka Křižíka, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	20
6. Šimon Dalecký	ZŠ a MŠ Klíč s.r.o. Česká Lípa	2	–	1	0	4	5	–	12	12
7. Martin Ondruška	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	4	9
8. Daniel Mikuš	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	4
9. Martin Fojtík	ZŠ Valašská Polanka	3	–	–	–	–	–	–	3	3

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		4	6	6	7	7	7	6	43	131
1. Martin Kysela	G, Český Krumlov	4	6	3	6	6	6	5	36	108
2.–3. Jakub Ježek	ZŠ Bezručova, Hradec Králové	4	6	–	6	5	4	–	25	98
2.–3. Pavel Provazník	ZŠ Štefánikova, Pardubice	4	6	6	3	3	5	5	32	98
4. Dominik Blaha	G, Uherské Hradiště	4	6	6	7	3	–	–	26	73
5. Pavla Maríková	G J. Vrchlického, Klatovy	4	–	1	6	6	–	–	17	71
6. Tereza Dvořáková	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	3	2	1	2	2	–	–	10	43
7. Martin Haikl	G Týn nad Vltavou	4	–	1	–	–	–	–	5	40
8. Barbora Šišáková	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	–	–	0	–	–	–	–	0	38
9. Kevin Děcký	ZŠ Ostrava-Muglinov	4	5	1	2	2	5	0	19	37
10. Matyáš Hebert	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	35
11. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	–	6	7	5	5	6	33	33
12. Anna Gryčová	ZŠ Husova, Liberec 5	–	–	–	–	–	–	–	–	28
13. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	22

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		4	6	6	7	7	7	6	43	131
14.–15. <i>Jakub Švec</i>	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	20
14.–15. <i>Jan Vříata</i>	ZŠ Týnec nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	–	–	20
16.–17. <i>Tomáš Veselý</i>	ZŠ a MŠ Myslibořice	4	2	1	5	4	–	–	16	16
16.–17. <i>Josef Vochozka</i>	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	16
18. <i>Andrea Bártoová</i>	ZŠ K Milíčovu, Praha 4 - Jižní M	–	–	–	–	–	–	–	–	13
19. <i>Jolana Chylíková</i>	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	–	12
20. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	9
21. <i>Jan Tomšej</i>	ZŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	8
22. <i>Tomáš Hlaváček</i>	ZŠ Erbenova, Blansko	4	–	–	–	–	–	–	4	4

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		6	6	7	7	7	6	–	39	119
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	ZŠ Jemnice	–	6	6	6	7	6	5	36	106
2.–3. <i>Filip Brázda</i>	ZŠ a MŠ Kameničky	–	1	0	6	7	6	5	25	100
2.–3. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	–	7	3	6	7	6	4	33	100
4. <i>Sára Byšková</i>	ZŠ nám. Jiřího z Poděbrad, Praha	–	6	1	6	0	–	–	13	77
5. <i>Adam Mára</i>	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	2	1	5	5	1	5	19	74
6.–7. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	–	6	5	3	3	6	5	28	68
6.–7. <i>Natálie Křivancová</i>	G, Český Krumlov	–	6	3	5	7	–	5	26	68
8. <i>Filip Temiak</i>	G, Český Krumlov	–	4	2	5	6	3	–	20	65
9. <i>Ondřej Valášek</i>	G, Nový Bydžov	–	2	0	2	4	6	5	19	59
10. <i>Kryštof Rakovský</i>	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	4	2	1	5	–	12	54
11.–12. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	–	–	4	5	–	–	5	14	42
11.–12. <i>Alex Rosenbergová</i>	ZŠ Tuháčkova, Brno	–	–	0	3	–	7	–	10	42
13. <i>Jan Hyžák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	4	0	5	–	–	5	14	38
14. <i>Emá Volešová</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	37
15. <i>Adam Korbel</i>	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	4	6	6	–	–	–	16	34
16. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	–	–	–	6	5	–	5	16	32
17.–18. <i>Markéta Bečvářová</i>	G, Písek	–	6	6	2	–	–	5	19	30
17.–18. <i>Radomír Mielec</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	2	–	4	6	30
19. <i>Luboš Petrání</i>	Biskupské G, České Budějovice	–	5	–	–	7	–	–	12	26
20. <i>Adam Baroš</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	4	–	–	–	–	–	4	19
21. <i>Jakub Dornák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	0	4	–	–	–	4	13
22. <i>Tomáš Kudrnáč</i>	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	–	–	–	5	6	–	–	11	11
23. <i>Markéta Mastešová</i>	ZŠ Velký Ořechov	–	6	–	2	–	–	–	8	8

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
		6	6	7	7	7	7	6	39	119
1. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	–	6	6	7	6	6	5	36	111
2.–3. <i>Lubor Čech</i>	G, Mikulov	–	6	6	6	7	7	6	38	109
2.–3. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	–	6	1	7	7	6	5	32	109
4. <i>Hana Slámová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	5	7	6	5	34	100
5. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	4	4	6	7	6	4	31	95
6.–7. <i>David Kamenský</i>	G a JŠ, Břeclav	–	4	4	6	4	4	5	27	91
6.–7. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	–	1	4	4	6	5	5	25	91
8. <i>Lucie Urbanová</i>	G Chotěboř	–	5	1	7	7	5	6	31	89
9. <i>Jiří Szotkowski</i>	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	4	3	5	7	6	5	30	87

jméno Student Pilný		škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
			6	6	7	7	7	6	6	39	119
10.	Jan Raja	G, Nymburk	–	5	0	4	4	6	3	22	80
11.	Petr Krotký	G, Hustopeče	–	4	0	2	5	6	5	22	79
12.	Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	–	6	0	5	7	6	6	30	76
13.–14.	Vojtěch Kuchař	ZŠ Sobotka	–	5	0	7	7	–	5	24	75
13.–14.	Filip Reháček	Klasické a španělské G, Brno	–	6	0	6	2	5	5	24	75
15.	Julie Rubášová	Biskupské G, Brno	–	4	0	2	3	6	5	20	71
16.	Karolína Letochová	G Šternberk	–	3	1	5	6	6	–	21	70
17.	Eliška Novotná	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	4	0	5	2	–	6	17	67
18.	František Krůs	Masarykovo G, Plzeň	–	5	5	6	4	–	–	20	62
19.	Filip Holoubek	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	0	5	7	5	4	21	59
20.	Tereza Boubertlová	Biskupské G, České Budějovice	–	6	2	6	6	–	4	24	55
21.	Jakub Charvot	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	46
22.	Matěj Moravec	G Chotěboř	–	5	0	3	6	5	5	24	45
23.	Kateřina Fialová	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	38
24.	Jiří Zinecker	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	35
25.	Štěpán Nekula	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	–	30
26.	Vladimír Chudý	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	–	–	–	–	–	–	–	27
27.	Gabriela Hladká	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	25
28.	Petr Svoboda	ZŠ a MŠ Beroun - Město	–	–	0	2	–	3	–	5	24
29.	Magdalena Šlaufová	G, Semily	–	–	–	–	–	–	–	–	23
30.	Radim Šafář	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	21
31.	Jitka Vysloužilová	G, Cheb	–	–	3	–	–	–	5	8	19
32.	Martin Bencko	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	1	1	–	–	–	2	18
33.	Kateřina Sekničková	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	14



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.