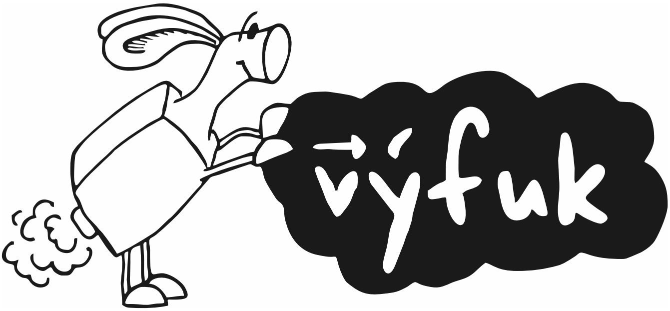


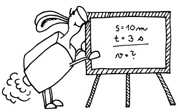
výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

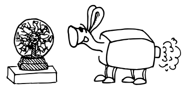
s menším zpozděním se k vám dostává čtvrtá brožurka letošního ročníku Výfuku. Kromě vzorových řešení 2. série a odpovídajícího pořadí v ní naleznete zadání 4. série a text Výfučtení, který (jak doufáme) vám přiblíží fyziku spojenou s otáčivým pohybem. Navíc byste měli v obálce dostat kolíček na prádlo, který je nezbytný pro úspěšné vyřešení experimentální úlohy.

Hodně zábavy při řešení úloh vám přejí

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání IV. série



Termín doručení: 4. 3. 2017 20.00

Úloha IV.1 ... Zahradní souboj ❻ ❼ — 4 body

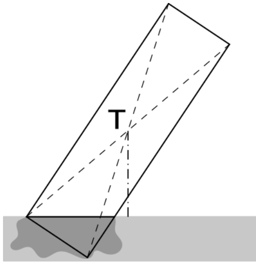
Tři zahrádkáři se nedokázali domluvit, který z nich má prostornější zahradu. První tvrdil, že jeho obdélníková zahrada má strany o délce 40 yardů a 545 palců. Druhý řekl, že ta jeho má strany dlouhé 0,02 míle a 150 decimetrů a poslední se chlubil rozměry své zahrady, jež byly 20 stop a 415 pídí.

Rozhodněte, který ze zahrádkářů má největší zahradu. Svůj výsledek nezapomeňte podložit výpočty!

Úloha IV.2 ... Šikmá věž ❻ ❼ ❽ ❾ — 7 bodů

Radka si vyjela na výlet do italské Pisy. Stojíc před věží, která se naklání do strany o 4°, se začala obávat, zda-li se věž nemůže pod tíhou turistů naklánějících se přes horní pravý okraj věže převrhnout.

Radka si jako dobrá fyzička uvědomila, že se věž převrhne teprve tehdy, když bude její těžiště (pokládejme věž za homogenní válec s výškou 58 m, průměrem 15 m a hmotností 14 700 tun), zkombinované[1] s těžištěm turistů mimo podstavu věže, která sedí na zemi (viz obrázek 1). Zjistěte, jakou hmotnost musí mít turisté (jejich rozměry klidně zanedbejte), aby se tak stalo. Má se Radka něčeho obávat?



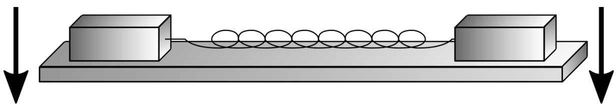
Obr. 1: Příliš nakloněná věž – její těžiště T je „mimo" podstavu sedící na zemi.

Pomůcka. Nejjednodušeji se úloha vyřeší tak, že si věž v příslušném poměru narýsujete a geometricky najdete polohu těžiště pro maximální lidskou zátěž.

Úloha IV.3 ... Padající pružinka ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Eva jednou potkala Petra a chtěla mu ukázat nejnovější pokus demonstrující třecí sílu. Na desku s nalepeným brusným papírem položila dva kvádry, mezi kterými napnula pružinku bez toho, aby se kvádry na desce pohnuly.

Eva ale nepatří mezi ty nejšikovnější a deska s kvádry jí vypadla z rukou a začala padat k zemi (viz obrázek 2). K Evinu překvapení se ale kvádry na desce začaly během pádu pohybovat. Popište, jakým směrem se kvádry rozpohybovaly a vysvětlete, jak je něco takového možné.



Obr. 2: Nákres padající desky s kvádry

Úloha IV.4 ... Rezistorová challenge ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

K dispozici máte libovolný počet rezistorů s odporem $1\,\Omega$. Zapojte je tak, aby výsledný odpor zapojení byl přesně $2{,}7\,\Omega$ a zkuste při tom použít co nejméně rezistorů. Nejefektivnější zapojení budou bodově ohodnocena.

Challenge. Paťo navrhl řešení s použitím pouze osmi rezistorů. Najdete lepší řešení?

[1] Společné těžiště dvou bodů s hmotnostmi m_1 a m_2 se nachází na úsečce mezi těmito body tak, že vzájemné vzdálenosti těžiště a jednotlivých bodů jsou v poměru $m_2 : m_1$ (těžiště je blíže k hmotnějšímu z bodů).

Úloha IV.5 ... Porucha topení ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 6 bodů

Marek si postavil domek na stromě a rád v něm tráví čas. Na podzim v domku ale bývá docela zima, neboť venku je teplota 10 °C. Marek si uvnitř proto topí topením s výkonem 180 W. Po dlouhém pobytu v domku je tak jeho vnitřek vyhřátý na příjemných 24 °C.

(1) Teplotní rovnováha v domku nastane tehdy, když je výkon, kterým v něm topíme, stejný jak výkon, který se přes okna a zdi ztrácí. Tento ztrátový výkon je *úměrný* rozdílu teplot uvnitř a vně domku. Vypočítejte, kolikrát má větší ztrátový výkon domek, v němž je udržována teplota 24 °C vůči domku s vnitřní teplotou 17 °C.

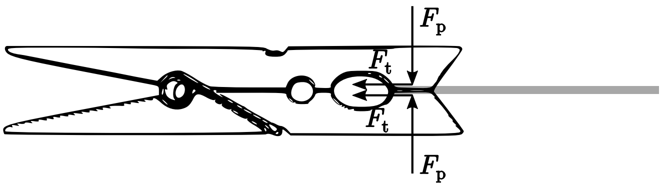
(2) Jaká teplota se ustálí v domku po tom, co Marek vypne topení a z domku na dlouhou dobu odejde?

(3) Jednou se topení v domku porouchalo. Marek doufal, že si místnost vytopí pouze výkonem vlastního těla (tedy asi 100 W). Na jaké hodnotě se ustálí teplota uvnitř domku v tomto případě? Předpokládejte, že výkon Markova těla se s měnící teplotou v domku nemění.

Úloha IV.E ... Kolíčky ❻ ❼ ❽ ❾ 9 bodů

Změřte, jakou *tlakovou* silou působí přiložený kolíček na pověšené prádlo, tedy v našem případě na kancelářský papír. My vám pouze prozradíme, že koeficient tření mezi dřevem, ze kterého je kolíček vyroben, a běžným kancelářským papírem je $f = 0{,}5$.

Pomoci vám může poznatek, že třecí síla F_t je f-násobek příslušné tlakové síly F_p a přiložený obrázek. Samotný postup měření navrhněte sami. Měření ale rozhodně zopakujte vícekrát a naměřené hodnoty zprůměrujte. Zamyslete se též nad nepřesností vašeho měření.



Obr. 3: Síly působící na papír zachycený v kolíčku.

Úloha IV.C ... Frisbee ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Honza si trénoval házení frisbee. V jedné obskurní knížce o technice házení si přečetl, že lepší hod a delší dolet má frisbee s vyšší celkovou energií – frisbee totiž letí těsně po hodu tak, že se otáčí kolem svého středu obvodovou rychlostí v_o a navíc se pohybuje vpřed posuvnou rychlostí v_p.

Honza umí házet frisbee tak, že $v_\mathrm{o} = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Neumí se ale rozhodnout, co si má trénovat: má usilovat o zvýšení obvodové, nebo posuvné rychlosti o $\Delta v = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Jinými slovy, má se snažit házet rychlejší nebo více roztočené frisbee?

Předpokládejte, že frisbee má přibližně tvar tenkého disku (válce) o poloměru 10 cm a hmotnosti 200 g.

Výfučtení: Otáčivý pohyb

Druhý Newtonův zákon (matematicky vyjádřen vztahem $F = ma$) nám říká, že pokud je výslednice sil F působících na těleso o hmotnosti m nenulová, bude se ono těleso pohybovat se zrychlením a. Pod pojmem zrychlení jakožto změnou rychlosti si ale můžeme představit, že se změní *velikost* rychlosti nebo její *směr*. Rozlišovat tak lze mezi dvojím účinkem působících sil.

Jeden z těchto účinků můžeme pozorovat například, když otevíráme dveře nebo v nedávném fenoménu zvaném „bottle flip“. Někdy totiž pozorujeme, že místo posuvného pohybu se předměty otáčí. V následujícím textu se proto budeme zabývat právě otáčením. Vysvětlíme si, jakým způsobem lze otáčení fyzikálně popsat.

Účinky sil na tělesa

Působení nenulové síly na těleso se zákonitě musí projevit. Odborně říkáme, že síla způsobuje nějaký účinek. V jednoduchých mechanických úlohách rozlišujeme tři silové účinky:

- těleso se posune – síly mají tzv. posuvný účinek,
- těleso se začne otáčet – tzv. otáčivý, neboli rotační účinek,
- těleso se zdeformuje – tzv. deformační účinek.

Výsledný účinek sil závisí na konkrétní situaci, tzn. na velikostech a směrech působících sil. Projevit se může třeba i kombinace účinků (míček se po odpálení raketou začne posouvat a rotovat zároveň). V jistých případech ale některé účinky nehrají v praxi velkou roli. Například deformační efekt lidské ruky na ocelový trám je nepatrný a není nutné ho uvažovat. Na popis takto zjednodušených předmětů používají fyzikové modely těles, které nazýváme hmotný bod a tuhé těleso.

Hmotný bod

Pokud uvažujeme, že těleso má zanedbatelný, respektive nedůležitý objem, ale přesto nějakou hmotnost, nazveme ho hmotným bodem. Působiště všech sil na těleso se tedy nachází v tom samém bodě. Hmotný bod ale nelze deformovat, lze ho pouze posouvat a nechat „obíhat“ kolem nějaké osy otáčení. Hmotnými body například nahrazujeme planety, když popisujeme jejich pohyb kolem Slunce.

Tuhé těleso

Tuhé těleso je kromě hmotnosti charakterizované i svým objemem a tvarem, případně rozložením hmoty. Důležité je, že tuhé těleso nelze deformovat. Oproti hmotnému bodu mohou na tuhé těleso působit síly na různých místech a v jejich důsledku se tuhé těleso může otáčet i kolem své osy.

Otáčení tuhých těles

Otáčení libovolného tuhého tělesa lze popsat dvěma údaji: polohou osy otáčení[2] a úhlem otočení α.

[2] Znalost osy otáčení je skutečně důležitý údaj, neboť každé těleso lze otáčet kolem nekonečně mnoha os otáčení.

K popisu rovnoměrného otáčení (za stejný čas se těleso otočí o stejný úhel) se používá veličina zvaná úhlová rychlost. Značí se ω a je definována jako úhel $\Delta\alpha$, o jaký se těleso otočí za jednotku času, tedy $\omega = \Delta\alpha/t$.

Je třeba poznamenat, že úhlovou rychlost obvykle vyjadřujeme v radiánech za sekundu. Je tedy praktické vyjadřovat úhly $\Delta\alpha$ také v radiánech.[3] Často se ale setkáme s tím, že jednotka radián bývá vynechána, tzn. jako jednotku úhlové rychlosti najdete i s^{-1}, nejen $\mathrm{rad \cdot s}^{-1}$.

Podobně jako úhlovou rychlost definujeme i úhlové zrychlení ε. Změní-li se za jednotku času t úhlová rychlost o $\Delta\omega$, úhlové zrychlení bude $\varepsilon = \Delta\omega/t$. Jednotka této veličiny je s^{-2} (tzn. radiány jsou opět vynechány).

Vztahy mezi silami a otáčením

Již jsme si řekli, že síla může těleso roztočit. Můžeme ale také pozorovat, že nejenom změnou velikosti síly, ale i změnou působiště lze změnit otáčivý účinek síly. Toto si můžete vyzkoušet sami například na dveřích: zkuste působit stejnou silou na kliku dveří a uprostřed dveří a pozorujte, jak rychle se dveře otevřou.

Abychom zahrnuli závislost na působišti sil do jejich otáčivých účinků, zavádíme veličinu zvanou moment síly. Značí se M a vypočítá se jako součin $M = Fr$, kde F je působící síla a r je tzv. rameno síly. Tím většinou myslíme pouhou vzdálenost působiště síly od osy otáčení.[4]

Jednotka momentu síly je jednoduše součin jednotky síly a vzdálenosti, tedy $\mathrm{N \cdot m}$, což se formálně shoduje s jednotkou energie (joule). Nicméně moment síly není jedno z vyjádření energie.

Podobnost posuvného a rotačního světa

Mezi právě zavedenými veličinami (úhel, úhlová rychlost a úhlové zrychlení) a veličinami, které už znáte (dráha s, rychlost v a zrychlení a), existuje výrazná podobnost. Význam těchto veličin je ve své podstatě stejný, jedna sada však popisuje otáčivý pohyb a druhá posuvný.

Například oběh hmotného bodu kolem osy otáčení je ale svým způsobem také posuvný pohyb. Hmotný bod při oběhu kolem osy otáčení přejde jistou dráhu (část obvodu kružnice) jistou rychlostí, které říkáme obvodová rychlost.

Od otáčivých k posuvným veličinám přejdeme tak, že příslušné otáčivé veličiny vynásobíme vzdáleností hmotného bodu od osy otáčení r:

$$s = \alpha r\,, \qquad v = \omega r\,, \qquad a = \varepsilon r\,.$$

Stejné vztahy platí i pro rotaci tuhého tělesa.[5] Otáčení je tak vlastně jenom jiný způsob, jak popsat pohyb po kružnici v makroskopickém měřítku.

Podobnost veličin ale pokračuje. Tak jako se síla projevuje zrychlením, moment síly se projevuje úhlovým zrychlením. Konkrétní vztah mezi těmito veličinami je $M = J\varepsilon$ (srovnejte se vztahem $F = ma$). Veličinu J, která odpovídá otáčivému partneru hmotnosti, zveme moment setrvačnosti a reprezentuje „nechuť“ tělesa k otáčení, stejně jako hmotnost těles vypovídá o „nechuti“ k posuvnému pohybu.

---

[3] Pokud jste se s touto jednotkou nesetkali, doporučujeme si přečíst Výfučtení šesté série 5. ročníku *O kruzích, kružnicích, stupních a radiánech*, kde vás s radiány rádi seznámíme. Pro připomenutí: $\pi\,\mathrm{rad} = 180^\circ$.

[4] Pro znalce: jedná se o *kolmou* vzdálenost k ose otáčení. Jednoduše stačí prodloužit směr (šipku) síly na přímku a na ni narýsovat kolmici procházející osou otáčení.

[5] Tuhé těleso rotující kolem nějaké osy lze rozbít na velký počet hmotných bodů, které kolem této osy obíhají.

Moment setrvačnosti

Ze vztahu $M = J\varepsilon$ lze vyčíst jednotku momentu setrvačnosti kg·m^2. Pro hmotný bod skutečně platí, že jeho moment setrvačnosti je součin jeho hmotnosti m a druhé mocniny vzdálenosti od osy otáčení r, tzn. $J = mr^2$.

Tento poznatek využijeme i v případě rotujícího tuhého tělesa. Stačí si uvědomit, že tuhé těleso je složené ze spousty hmotných bodů – výsledný moment setrvačnosti bude tedy součtem momentů setrvačností těchto bodů. Pro tenkou obruč rotující kolem svého středu bude tento rozklad velice jednoduchý, neboť všechny body mají stejnou vzdálenost od osy otáčení rovnou poloměru obruče R. Každý z hmotných bodů bude mít moment setrvačnosti $j = mR^2$, kde m je hmotnost hmotného bodu. Sečteme-li všechny takovéto příspěvky, dostaneme moment setrvačnosti obruče:

$$J = mR^2 + mR^2 + \cdots = (m + m + \cdots)\, R^2 = MR^2\,,$$

kde M je hmotnost celé obruče.

Problém může nastat tehdy, když jsou hmotné body tuhého tělesa v různé vzdálenosti od osy otáčení. Například chceme-li rozložit válec, hmotné body na povrchu budou od osy otáčení dále, než body uprostřed. K provedení těchto výpočtů se pak používají složitější matematické metody. Obecně ale platí, že momenty setrvačnosti běžných těles (válec, koule, …) lze vyjádřit ve tvaru kMR^2, kde k je konstanta závislá na tvaru tělesa, M je hmotnost tělesa a R je typický rozměr tělesa (například poloměr nebo délka). Pro momenty setrvačnosti jednoduchých těles platí:

- koule s osou otáčení procházející jejím středem: $J = 2mr^2/5$ (tedy $k = 2/5$),
- válec s osou otáčení procházející středem obou podstav: $J = mr^2/2$,
- tyč s k ní kolmou osou otáčení procházející jejím koncem: $J = ml^2/3$ (zde je l délka tyče),
- tyč s k ní kolmou osou otáčení procházející jejím středem: $J = ml^2/12$.

Rotační práce a energie

Pro práci, kterou vykoná moment síly M na úhlové dráze α, platí jednoduchý vztah $W = M\alpha$.

Kinetická energie otáčení tuhého tělesa je opět jen součet kinetické energie všech jeho hmotných bodů:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots\,,$$

kde m značí hmotnosti a v obvodové rychlosti jednotlivých hmotných bodů (každý hmotný bod má obecně jinou obvodovou rychlost, neboť je jinak vzdálen od osy otáčení). Tento vztah lze ale upravit, neboť víme, že obvodová rychlost je $v = \omega r$, kde r je vzdálenost bodu od osy otáčení. Tedy

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots = \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_2^2 + \cdots = \frac{1}{2}\omega^2 \left(mr_1^2 + mr_2^2 + \cdots\right)\,.$$

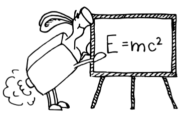
Vztah v závorce ale není nic jiného, než moment setrvačnosti tělesa rozepsaný jako příspěvky jednotlivých hmotných bodů. Výsledný vztah pro rotační energii tělesa tedy je

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}J\omega^2\,.$$

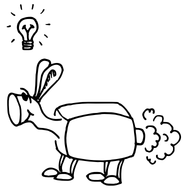
Všimněte si, že i tento vztah se velmi podobá posuvné kinetické energii $E_\mathrm{k} = mv^2/2$. Jen za hmotnost m a rychlost v jsme dosadili odpovídající otáčivé veličiny J a ω.

Shrnutí

V tomto spíše teoretickém Výfučtení jsme představili základy toho, jak se ve fyzice popisuje otáčivý pohyb hmotných bodů a tuhých těles. Stačí si zapamatovat, že tento popis je téměř identický s popisem posuvného pohybu – stačí jen místo klasických veličin použít jejich otáčivé kamarády: úhlovou rychlost a úhlové zrychlení a moment síly a setrvačnosti.



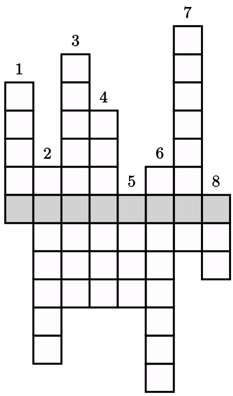
Řešení II. série



Úloha II.1 ... Nobelovská

4 body; průměr 3,84; řešilo 19 studentů

Již více než století jsou nejdůležitější fyzikální výsledky a objevy oceňovány Nobelovou cenou za fyziku. Vyluštěte tuto nobelovskou doplňovačku a zjistěte, za jaký objev získal Nobelovu cenu za fyziku britský výzkumník z tajenky.



(1) Spoludržitel ceny s E. Schrödingerem za jejich přínos do kvantové teorie. (2) Nobelovu cenu získal v roce 1906 za výzkum v oblasti elektrické vodivosti plynů. (3) Objevitel „rezonanční gama absorpce“, přesné metody pro výzkum velmi slabých magnetických polí atomových jader. Tento jev, za který získal Nobelovu cenu v druhé polovině 20. století, nese jeho jméno. (4) Jediný držitel dvou Nobelových cen za fyziku. První cenu získal za objev tranzistoru, druhou cenu sdílí s dalšími dvěma výzkumníky za tzv. BCS teorii. (5) Objevitel „posunovacího zákona“, který určuje, na jaké vlnové délce nejvíce září těleso o dané teplotě. Zákon, jenž nese jeho jméno, byl oceněn Nobelovou cenou v počátku jejich udělování. (6) Slavný fyzik, který byl oceněn Nobelovou cenou za vysvětlení fotoelektrického jevu. (7) Během druhé světové války se Nobelovy ceny neudělovaly. Který fyzik získal cenu jako poslední před tímto výpadkem? (8) Nobelovu cenu získal v nedávné době, a to za přínos v rozvoji optických vláken a jejich použití v telekomunikaci.

Fyzici z tajenky jsou:

(1) Paul DIRAC: zabýval se kvantovou teorií, obecnou teorií relativity a kosmologií. Za svoji práci v kvantové fyzice (zabýval se například mikrosvětem, atomární stavbou látek,...) získal v roce 1933 spolu s E. Schrödingerem Nobelovu cenu.
(2) Joseph John THOMSON: V roce 1897 objevil elektron při studiu elektrické vodivosti plynů, přesněji vlastností katodového záření. Za tento objev, kterým započala éra částicové fyziky, obdržel Nobelovu cenu v roce 1906.
(3) Rudolf Ludwig MÖSSBAUER: Za výzkum rezonanční absorpce gama záření a s tím spojený objev po něm pojmenovaného jevu získal v roce 1961 společně s R. Hofstadterem Nobelovu cenu. Tato extrémně citlivá metoda je používána při výzkumu materiálů s obsahem železa.
(4) John BARDEEN: Jako jediný získal dvě Nobelovy ceny, v roce 1956 za objev tranzistoru, spolu s W. B. Shockleyem a W. Brattainem, a v roce 1972 za teorii supravodivosti spolu s L. N. Cooperem a R. Schriefferem (tzv. BCS teorie, podle příjmení jejích autorů).
(5) Wilhelm WIEN: V roce 1911 obdržel Nobelovu cenu za fyziku, konkrétně za objevy zákonů vyzařování. Objevil, že nejintenzivněji vyzařovaná vlnová délka černého tělesa je nepřímo úměrná jeho teplotě.
(6) Albert EINSTEIN: Jeden z nejvýznamnějších fyziků vůbec. Mezi jeho příspěvky fyzice patří zejména speciální teorie relativity (1905) a obecná teorie relativity (1915), která popisuje chování času a prostoru při vysokých rychlostech a silné gravitaci. Paradoxně mu Nobelova cena za tyto teorie udělena nebyla – cenu získal za objasnění fotoelektrického jevu.
(7) Ernest Orlando LAWRENCE: Nositel Nobelovy ceny za fyziku (1939), kterou obdržel za vynález cyklotronu (typ urychlovače) a jím získané výsledky, zejména týkající se umělých radioaktivních prvků.
(8) Charles Kuen KAO: Je považován za průkopníka využití optických vláken v telekomunikacích. V roce 2009 byl oceněn Nobelovou cenou za fyziku, za jeho práce v oblasti využití přenosu světla k přenosu dat ve skleněných optických vláknech.

Vyplněním tajenky dostaneme příjmení dalšího laureáta Nobelovy ceny, Jamese Chadwicka. Ten v roce 1935 obdržel cenu za objev neutronu.

Eva Vochozková

Úloha II.2 ... Tropická

5 bodů; průměr 4,69; řešilo 62 studentů

V tropech se při prodeji příliš nezabývají penězi a ovoce si mezi sebou přímo směňují. Například za 16 *citrónů dostanete* 6 *banánů a* 8 *kiwi.* 3 *banány rychle směníte za* 4 *kiwi. Chcete-li si koupit fíky, za balíček obsahující* 32 *fíků a* 4 *citrony zaplatíte celkem* 19 *banánů. Víte, jaká je hodnota jednoho fíku v banánech? Tzn. kolik banánů byste zaplatili za jeden fík?*

Pro přehlednější řešení této úlohy označíme písmenky jednotlivé druhy ovoce: citróny C, banány B, kiwi K a fíky F. Slovní zápis úlohy si tak vyjádříme v podobě několika rovnic:

$$16C = 6B + 8K\,,$$
$$3B = 4K\,,$$
$$32F + 4C = 19B\,.$$

Pomocí druhé rovnice upravíme první: odpovídají-li 4 kiwi 3 banánům, pak musí 8 kiwi odpovídat 6 banánům. První rovnici tedy lze zapsat i jako

$$16C = 6B + 6B \quad \Rightarrow \quad 4C = 3B\,.$$

Třetí rovnici ze zadání upravíme do tvaru $32F = 19B - 4C$ a dosadíme do ní nově získaný vztah. Dostaneme tak rovnici

$$32F = 19B - 3B = 16B\,,$$

kterou vyřešíme tak, že obě strany rovnice vydělíme 32:

$$32F = 16B\,,$$

$$F = \frac{B}{2}\,.$$

Jeden fík tedy svoji hodnotou odpovídá jedné polovině banánu.

Marek Božoň
`marek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.3 ... Sluneční energie 6 bodů; průměr 3,96; řešilo 46 studentů

Všichni víme, že Slunce je obrovský zdroj energie. Téměř veškerá energie vzniká jadernou fúzí ve slunečním jádru, jehož hmotnost je zhruba třetina celkové hmotnosti Slunce. Zjistěte, jakou část jádra (v kilogramech) bychom potřebovali na neustálé zásobování České republiky energií. Hodit se vám bude údaj, že celková roční spotřeba energie v ČR je asi 59 TWh *(terrawatthodin).*[6] *Další potřebné údaje vyhledejte na internetu nebo v literatuře. Nezapomeňte v řešení uvést zdroje vašich informací!*

Na Wikipedii[7] či v nějakém jiném zdroji můžeme najít informaci, že výkon Slunce je $L = 3{,}827\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. Za rok tedy celé Slunce vyrobí energii $E_\mathrm{s} = Lt$, kde t je délka roku v sekundách. Tato energie je vyrobena pouze v jádře, které, jak je napsáno v zadání, tvoří třetinu hmotnosti Slunce, tedy $m_\mathrm{j} = M_\mathrm{s}/3$, kde M_s je hmotnost Slunce, kterou můžeme nalézt opět například na Wikipedii.

Nás ale zajímá, jaká část jádra za rok vyrobí energii E_r, která se spotřebuje v České republice. Hmotnost m' této části vyjádříme za pomoci trojčlenky jako

$$\frac{E_\mathrm{s}}{m_\mathrm{j}} = \frac{E_\mathrm{r}}{m'} \quad\Rightarrow\quad m' = \frac{E_\mathrm{r} m_\mathrm{j}}{E_\mathrm{s}} = \frac{E_\mathrm{r} M_\mathrm{s}}{3Lt}\,.$$

Při dosazování si dáme pozor na jednotky, konkrétně energii spotřebovanou v ČR musíme převést z terrawatthodin na wattsekundy (tzn. jouly), tedy

$$E_\mathrm{r} = 59\,\mathrm{TWh} = 59\cdot 3\,600\cdot 10^{12}\,\mathrm{Ws} = 212{,}4\cdot 10^{15}\,\mathrm{Ws}\,.$$

Hmotnost m' je tedy

$$m' = \frac{212{,}4\cdot 10^{15}\,\mathrm{Ws}\cdot 1{,}989\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{3\cdot 3{,}827\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}\cdot 365\cdot 24\cdot 3\,600\,\mathrm{s}} \doteq 1{,}2\cdot 10^{13}\,\mathrm{kg}\,.$$

Abychom mohli Českou republiku zásobit energií po celý rok, potřebovali bychom část slunečního jádra, která by vážila $1{,}2\cdot 10^{13}$ kg.

[6] Můžete předpokládat, že energie se v průběhu roku spotřebovává rovnoměrně.
[7] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce` k datu 10. 1. 2017

Poznámky k došlým řešením

Mnoho z vás neuvedlo zdroj, odkud jste čerpali, nebo ho uvedli špatně. Pokud čerpáte z internetové stránky, nestačí napsat její název, např. Wikipedia, ale je potřeba uvést kompletní URL adresu stránky. Je také zvykem uvádět datum, kdy jste ze stránky čerpali, neboť její obsah se může měnit.

Část z vás počítala hmotnost vodíku, kterou bychom potřebovali pro zásobení ČR, ze vzorce $E = mc^2$. Tento vzorec nám ale říká energii uloženou ve hmotě, tedy energii, kterou bychom získali pokud by hmota anihilovala,[8] což se ale ve Slunci neděje. Ve Slunci se uvolňuje energie v důsledku přeměny vodíku na helium, která je řádově menší. To někteří z vás také počítali. Ale v zadání jsme se ptali na to, jaká část jádra je potřeba. V jádru Slunce se nepřeměňuje veškerý vodík, ve skutečnosti se ho tam přeměňuje jen malá část. Podívejte se opět na náš výsledek, který činí až 12 miliard tun! Slunce je ve skutečnosti velmi neefektivní elektrárna.

Největší problémy vám dělaly převody jednotek. Spousta z vás počítala různé poměry z celkové spotřebované energie v ČR a výkonu Slunce. To nejde, neboť jedno je energie, druhé výkon. Vždy si musíme jedno převést na druhé. Buď převedeme celkovou energii na průměrný výkon, což se dělalo tak, že jsme vzali celkovou energii za rok a podělili ji daným časem (pokud jste počítali energii ve watthodinách, tak počtem hodin za rok), ve druhém případě jsme museli výkon Slunce přenásobit délkou daného období, v našem případě jednoho roku.

Jakub Sláma
`slama@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.4 ... Získávání vody

7 bodů; průměr 6,09; řešilo 47 studentů

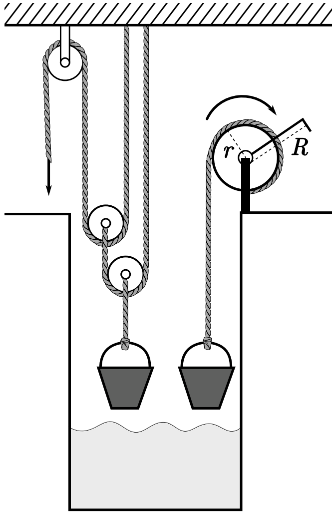
Mirek s Káťou jednou tahali vodu ze studny a nemohli se dohodnout, kdo z nich vymyslel pohodlnější nástroj, díky kterému by při vytahování kbelíku s vodou o hmotnosti $M = 10\,\mathrm{kg}$ *museli působit co nejmenší silou.*

Káťa navíjí lano s kbelíkem na buben o poloměru $r = 20\,\mathrm{cm}$, *kterým otáčí pomocí kliky konstantní rychlostí ve vzdálenosti* $R = 40\,\mathrm{cm}$ *od osy otáčení (viz obrázek). Mirek zase postavil kladkostroj ze tří lehkých kladek (viz obrázek) a za volný konec lana tahal též konstantní rychlostí. Spočtěte, jakou sílu museli oba na vytáhnutí kbelíku s vodou vynaložit, a rozhodněte, který nástroj je lepší. Tření a hmotnost lan neuvažujte.*
Bonus: *Který z nich vykonal při získávání vody větší práci?*

Mirkův kladkostroj, jak vidíme na obrázku, se sestává z jedné pevné a dvou volných kladek. Víme, že pevná kladka mění pouze směr působení síly potřebné pro pohyb předmětu (a nikoliv její velikost). Také víme, že volná kladka dvakrát zvětšuje sílu působící na předmět (vzhledem k síle, kterou působí Mirek na druhý konec lana), ale zároveň však dvakrát zvětšuje délku lana, za které musí Mirek táhnout, aby předmět dostal do požadované výšky. Obecně tedy můžeme říci, že síla, kterou Mirek musí vyvinout k vytažení předmětu, se rovná podílu tíhové síly předmětu a n-té mocniny dvojky, kde n označuje počet volných kladek v kladkostroji:

$$F = \frac{F_g}{2^n}\,.$$

[8] Tzn. došlo k její přeměně na energii.



Obr. 4: Vlevo je Mirkův kladkostroj, vpravo Kátin buben

Jelikož ze zadání známe hmotnost kbelíku s vodou, $M = 10\,\mathrm{kg}$, můžeme do tohoto vzorce dosadit:

$$F = \frac{Mg}{2^n} = \frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-2}}{2^2} = 25\,\mathrm{N}\,.$$

Mirek tedy na lano bude muset působit silou $25\,\mathrm{N}$.

Kátin buben funguje na principu jednozvratné páky. Pro jednozvratné páky platí, že momenty sil ve všech místech ramene si musí být rovny. Moment síly přitom definujeme jako součin vzdálenosti od středu otáčení a síly, kterou na rameno působíme.

$$M = Fa\,,$$

kde F značí sílu působící v daném bodě a a vzdálenost bodu od středu otáčení. Pro Kátin buben bude platit rovnost momentu síly F_2, kterou Káťa působí na rukojeť bubnu, a momentu tíhové síly kbelíku F_1:

$$M_1 = M_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 r = F_2 R\,.$$

Z rovnice tedy vyjádříme F_2 a dosazením získáme

$$F_2 = F_1 \frac{r}{R} = Mg\frac{r}{R} = 10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-2}\,\frac{20\,\mathrm{cm}}{40\,\mathrm{cm}} = 50\,\mathrm{N}\,.$$

Káťa tedy musí na páku bubnu působit silou $50\,\mathrm{N}$. Vidíme tedy, že menší silou bude muset působit Mirek se svým kladkostrojem.

Bonus

Rozdíl potenciální energie vytaženého kbelíku a kbelíku na dně studny je nezávislý na tom, jakou silou působíme při jeho vytahování, tedy v obou dvou případech bude tento rozdíl stejný.

A jelikož změna potenciální energie je rovna práci, kterou na zvedání objektů musíme použít, je zřejmé, že Káťa i Mirek vykonali při vytahování stejnou práci.

Petr Doubravský

Úloha II.5 ... Akrobat

7 bodů; průměr 4,61; řešilo 36 studentů

Jindra vždy chtěl být akrobatem. Proto si pořídil řetězovou houpačku a začal se na ní učit 360stupňové otáčky. Ale předtím, než se pustil do tréninku, se jako správný fyzik začal zamýšlet nad silami, které na něj budou působit.

(1) Kromě tíhové síly bude na Jindru během triku působit ještě odstředivá síla $F_\mathrm{o} = mv^2/R$, kde $m = 65\,\mathrm{kg}$ je Jindrova hmotnost (hmotnost houpačky zanedbáváme), v je jeho okamžitá rychlost na houpačce a $R = 2\,\mathrm{m}$ je délka závěsu houpačky. Nakreslete obrázky Jindry na houpačce v nejnižší a nejvyšší poloze jeho 360stupňové otáčky a do obou obrázků zakreslete síly, které na Jindru působí.

(2) Kritický bod Jindrovy otáčky je nejvyšší bod jeho trajektorie. V tomto bodě musí být velikost odstředivé síly větší než velikost síly tíhové. Z této podmínky spočtěte, jak velká musí být Jindrova rychlost v nejvyšším bodě jeho trajektorie, aby se mu trik podařil.

(3) Jindra však dokáže měřit svou rychlost pouze v nejnižším bodě trajektorie. Určete, jakou zde musí mít nejmenší rychlost, aby byla jeho otáčka úspěšná.

(1) Působení sil na Jindru uvádíme na obrázku 5. V nejnižší poloze obě síly působí směrem dolů, v nejvyšší poloze působí tíhová síla F_g směrem dolů a odstředivá síla F_o směrem nahoru.

(2) Aby Jindra v nejvyšší poloze nespadl, musí zde být odstředivá síla F_o větší, nebo minimálně stejná jako tíhová síla F_G. Pokud za obě síly dosadíme vztahy ze zadání, získáme rovnici

$$mg = \frac{mv_\mathrm{n}^2}{R}\,,$$

ze které vyjádříme rychlost v nejvyšším bodě Jindrovy trajektorie v_n:

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{m}} \doteq 4{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

V horním bodě otáčky musí mít Jindra rychlost alespoň $4{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

(3) V okamžiku, kdy se Jindra nachází v nejnižším bodě smyčky, je jeho potenciální energie nulová,[9] a tedy jeho celková mechanická energie je rovna pouze kinetické energii:

$$E_\mathrm{d} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2\,,$$

kde v_d je jeho rychlost v nejnižším bodě.

[9] Nulovou hladinu potenciální energie si můžeme zvolit libovolně. Pro jednoduchost výpočtu je vhodné zvolit ji právě v nejnižším bodě otáčky.

V horním bodě otáčky je Jindrova energie rovna součtu jeho potenciální a kinetické energie. $E_\mathrm{n} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}$. Má-li Jindra rychlost v_n a nachází se ve výšce $2R$, je tato energie

$$E_\mathrm{n} = 2mgR + \frac{1}{2}mv_\mathrm{n}^2 \,.$$

Pokud při Jindrově akrobatickém kousku zanedbáme odpor vzduchu, musí platit zákon zachování energie, tzn. musí platit $E_\mathrm{n} = E_\mathrm{d}$:

$$2mgR + \frac{1}{2}mv_\mathrm{n}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2 \,.$$

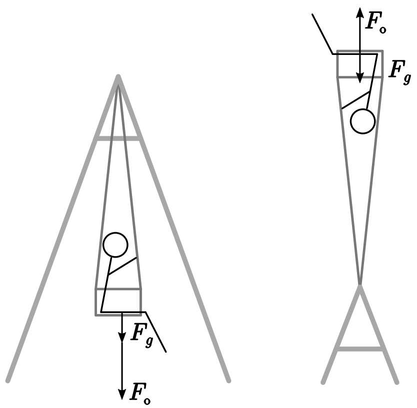
Nyní dosadíme za rychlost v horním bodě otáčky $v_\mathrm{n}^2 = gR$ z předchozí části úlohy a vyjádříme Jindrovu rychlost v dolním bodě v_d:

$$2mgR + \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \sqrt{5gR} \,.$$

Nakonec dosadíme číselné hodnoty:

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{5 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{m}} \doteq 9{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Aby byla Jindrova otáčka úspěšná, musí Jindra v dolním bodě smyčky mít rychlost alespoň $9{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 5: Síly působící na Jindru v nejnižším a nejvyšším bodu trajektorie.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.E ... Přímo úměrná konvice

8 bodů; průměr 4,51; řešilo 37 studentů

Filipa dlouho zajímalo, zda je doba, za kterou se voda v rychlovarné konvici uvaří, přímo úměrná hmotnosti vařené vody. Pomozte Filipovi a změřte časy, za které se uvaří voda o alespoň pěti *různých hmotnostech. Dejte si pozor na to, aby počáteční teplota konvice i vody byla na začátku každého měření stejná.*

Pak změřené údaje vyneste do grafu závislosti času vaření na hmotnosti vody.[10] *Platí-li mezi veličinami přímá úměra, měly by body alespoň přibližně „sedět“ na společné přímce. Zakreslete do grafu i tuto přímku a odpovězte nám na dvě otázky:*
(1) Proč není shoda úplně dokonalá? Co může ovlivnit přesnost měření?
(2) Proč přímka neprochází počátkem grafu?

Teorie

V tomto experimentu nám půjde o potvrzení teorie ze zadání, která říká, že doba ohřevu vody je přímo úměrná ohřívanému objemu. To v podstatě znamená, že při měření by nám se zvětšujícím se objemem měla růst i doba ohřevu, a to tak, že kolikrát větší objem vody dáme hřát, tolikrát se nám prodlouží doba ohřívání.

Podívejme se na průběh celého pokusu. Naše konvice[11] o konstantním příkonu P a účinnosti η (předpokládejme, že kolísavost účinnosti je opravdu malá) má výkon $P\eta$, který slouží na ohřev vody tak, že za čas t[12] dodá vodě o hmotnosti m a měrné tepelné kapacitě $c = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ teplo $Q = mc\Delta T$, kde ΔT je změna teploty vody. V našem případě se jedná o rozdíl teploty varu vody $100\,^\circ\mathrm{C}$ a teploty vody, kterou do konvice nalijeme například z kohoutku. Platí tedy

$$P\eta t = mc\Delta T \quad \Rightarrow \quad t = m\frac{c\Delta T}{P\eta}\,.$$

Vidíme tedy, že čas ohřevu vody závisí na neměnných veličinách ve zlomku a skutečně se mění jen s proměnlivou hmotností.

Měření

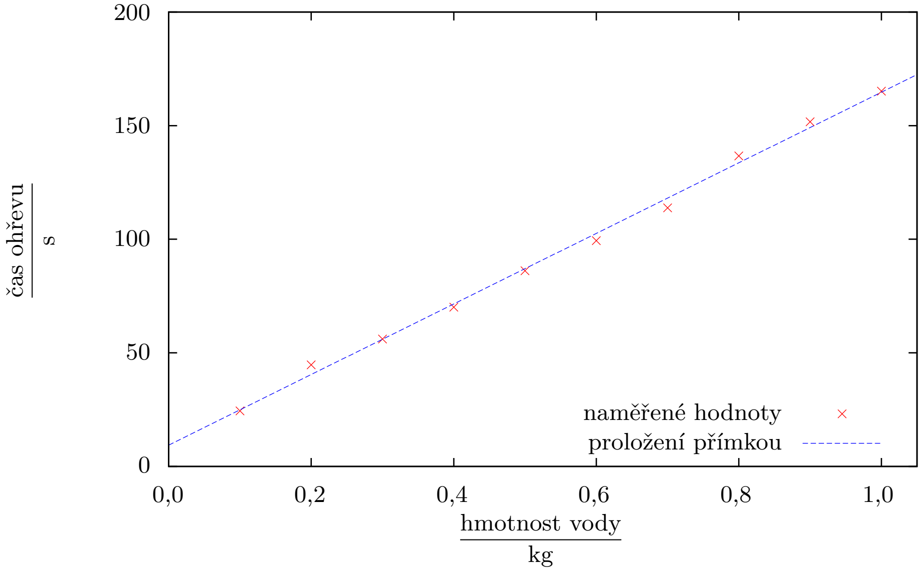
K měření budeme potřebovat stopky, varnou konvici a odměrku či váhu na měření vody. Předtím, než začneme měřit, je dobré v konvici uvařit vodu jen tak „na zkoušku“, abychom dodrželi pravidlo, že konvice i voda budou vždy mít stejnou počáteční teplotu, je to časově méně náročné. Nebo můžeme také po každém měření počkat, až konvice vychladne, ale to nám zabere podstatně více času. Dáme si pozor na to, aby byla voda vždy stejně teplá či studená. Odměříme si minimálně pět vzorků různých hmotností (1 ml vody váží 1 g) a postupně je dáme vařit v rychlovarné konvici. Jakmile spustíme ohřívání, zapneme stopky a vypneme je, až když konvice cvakne či jinak naznačí, že voda dosáhla bodu varu. Toto zopakujeme u všech vzorků vody, které jsme si odměřili odměrkou či odvážili na vahách. Vaše výsledky se mohou lišit, záleží na počáteční teplotě vody z kohoutku, účinnosti a příkonu vaší konvice. Výsledky našeho pokusu jsou zaznamenány v tabulce 1 a závislost času ohřevu vody na její hmotnosti je vynesena v grafu 6.

Chyby měření, které nám mohly ovlivnit naše výstupní hodnoty, jsou skryté ve vlastnostech konvice. Uvolněné teplo, které ohřívalo vodu v konvici, také ohřálo konvici samotnou. Konvice

[10] Tím se myslí to, že na vodorovnou osu vynesete hmotnost vody a na svislou osu čas vaření. Nezapomeňte na pořádné označení os a vhodnou volbu jejich stupnic.
[11] Můžete použít i jiná topná tělesa, ale nejlepší jsou elektrická, protože ta mají víceméně konstantní příkon a výkon, u plynových či jiných zařízení může hodnota okamžitého příkonu a výkonu kolísat.
[12] Zde čas značíme malým písmenem, abychom ho odlišili od značení teploty T.

Tab. 1: Čas ohřevu pro danou hmotnost vody.

hmotnost vody [kg]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
čas vaření [s]	24	44	56	70	86
hmotnost vody [kg]	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
čas vaření [s]	99	113	136	151	165



Obr. 6: Závislost času ohřevu na hmotnosti uvařené vody.

musela vyprodukovat na topném tělese víc tepla, než bylo třeba k ohřátí vody, protože zároveň s vodou ohřívala samu sebe. Další energie z ohřevu přeměnila část ohřívané vody v páru. Aby voda změnila skupenství, musela jí konvice dodat další teplo. Topné těleso v konvici se také nejprve samo muselo ohřát na teplotu větší než 100 °C, aby mohlo ohřát vodu, na což spotřebovala konvice také energii. Jelikož konvice není izolovaná soustava, probíhá i ohřívání okolního vzduchu, což je opět teplo navíc, které neohřívá vodu.

Právě tyto úniky tepla odpovídají velikostně energii, kterou by voda v konvici přijala za čas, ve kterém nám graf 6 protíná svislou osu.

Poznámky k došlým řešením

S naměřením a praktickým provedením úkolu jste si poradili skvěle. Všichni, kdo pochopili zadání, měli pěkně naměřené hodnoty. Problém nastal při teoretické části příkladu: mnohým z vás chyběla tabulka hodnot (ohodnocena dvěma body) či jste si pořádně nepřečetli zadání a v řešení jste vykreslili graf, který nebyl přímka, ale lomená úsečka nebo daná přímka neležela mezi body, ale nad nebo pod nimi, prohodili jste osu x za osu y, místo hmotnosti jste vodu na ose x udávali v litrech apod. Někteří se dokonce snažili přímku grafu nasměrovat do počátku soustavy souřadnic uměle, i když tudy procházet nikdy nebude. Takto jste ztratili asi nejvíce bodů. Proto prosím, *čtěte zadání*, mnohdy vám pořádné přečtení zadání pomůže víc, než si myslíte.

Celkem dost z vás se při zodpovídání otázek v zadání odkazovalo na chyby měření ovlivněné lidským faktorem (hlavně pomalý reakční čas člověka při měření času, špatně odvážená hmotnost/odměřený objem vody). Takové chyby sice v tomto experimentu nastaly, ale jejich vliv je mnohem menší než zmíněné tepelné úniky.

Zde mnozí z vás poukázali na skutečnost, že účinnost se v závislosti na ohřívaném objemu mění (čím víc vody ohříváme, tím je konvice účinnější), což vlastně zahrnovalo odpověď na obě dvě podotázky zadání, protože účinnost konvice je závislá převážně na množství vytvořené přebytečné páry z vody a ohřevem okolí.

Pavla Trembulaková
`pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz`

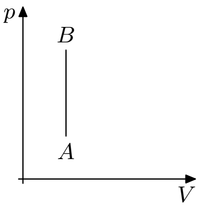
Úloha II.C ... Ideální plyn

7 bodů; průměr 4,86; řešilo 22 studentů

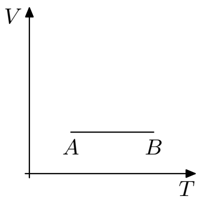
(1) *Ve Výfučtení Lukáš viděl jen tři grafy pro děje s ideálním plynem a zajímalo by ho, jak který děj vypadá ve zbylých diagramech. Pomozte mu tedy nakreslit každý ze tří diskutovaných dějů (tj. izochorický, izobarický a izotermický) v chybějících grafech $p-V$, $p-T$ a $V-T$.*

(2) *Lukáše by také zajímalo, jak moc se liší van der Waalsův model od ideálního plynu. Spočtěte proto pro obě rovnice, jaké množství vodíku zaujme při pokojové teplotě* $25\,°\mathrm{C}$ *a standardním tlaku* $101\,325\,\mathrm{Pa}$ *objem* $1\,\mathrm{m}^3$ *a výsledky porovnejte.*
Poznámka: *Van der Waalsovy konstanty pro vodík jsou* $a = 0{,}0247\,\mathrm{m^6{\cdot}Pa{\cdot}mol^{-2}}$ *a* $b = 2{,}66\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}$.

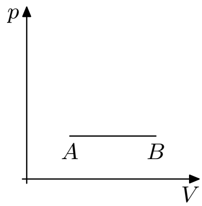
(1) Je dobré si povšimnout toho, že grafy ukázané v seriálu nám o daném ději dokáží povědět co nejvíce. Navíc jsou to grafy, ve kterých se na ose nevyskytuje právě konstantní veličina. Pokud si rozmyslíme tuto skutečnost, zjistíme, že nezávisle na vztahu, který nám říká stavová rovnice $pV = nRT$, bude na grafu, na jehož ose se nachází konstantní veličina, termodynamický děj ideálního plynu vyjádřen pouze úsečkou, která je kolmá na osu s konstantní veličinou. Pokud by to tak nebylo, konstantní veličina by se měnila, což to si jistě protiřečí.
Níže tedy uvádíme chybějící grafy pro všechny děje s ideálním plynem. Jak si můžete povšimnout, žádný z nich nám o tomto ději neříká nic nového, protože konstantní veličina se nachází na jeho osách. Všechny děje jsou tedy zaznamenané jako úsečky, a tak můžeme vidět, že dané veličiny jsou opravdu konstantní.



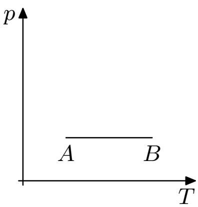
Obr. 7: $p-V$ diagram pro izochorický děj



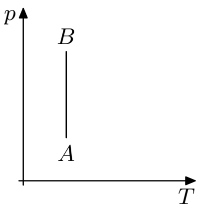
Obr. 8: $V-T$ diagram pro izochorický děj



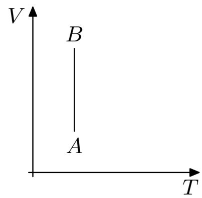
Obr. 9: $p-V$ diagram pro izobarický děj



Obr. 10: $p-T$ diagram pro izobarický děj



Obr. 11: $p-T$ diagram pro izotermický děj



Obr. 12: $V-T$ diagram pro izotermický děj

(2) Je dobré si takový příklad nejprve propočítat s modelem ideálního plynu, se kterým jsme již obeznámeni ze seriálu lépe a častěji se s ním můžeme v termodynamice setkat. Použijeme tedy stavovou rovnici $pV = nRT$. Z ní si množství vodíku v molech dokážeme vyjádřit velice snadno. Prvně si však musíme převést stavové veličiny plynu na základní jednotky. Musíme si dát hlavně pozor na to, že teplota T je termodynamická teplota, která se nevyjadřuje v °C, ale v K. Převod mezi jednotkami je zde jednoduchý, neboť při převodu do stupňů Kelvina pouze posunujeme nulu. Platí tedy $T = 25\,°\mathrm{C} = 25 + 273{,}15\,\mathrm{K} = 298{,}15\,\mathrm{K}$. Další veličiny již máme ve správných jednotkách. Tlak v plynu je $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, objem plynu je $V = 1\,\mathrm{m}^3$ a je také dobré si připomenout univerzální plynovou konstantu $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$. Nyní stačí dosadit do vyjádřeného látkového množství ze stavové rovnice

$$n = \frac{pV}{TR} = \frac{101\,325\,\mathrm{Pa}\cdot 1\,\mathrm{m}^3}{298{,}15\,\mathrm{K}\cdot 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}} \doteq 40{,}876\,\mathrm{mol}$$

Nyní se pokusíme vyjádřit totéž z rovnice pro van der Waalsův model plynu. Jak vidíme již ze členů rovnice, budeme řešit rovnici kubickou. Pojďme si tedy ukázat úpravy, kterými se k ní dostaneme. Prvně si roznásobíme závorky.

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = pV + a\frac{n^2}{V} - pnb - ab\frac{n^3}{V^2} = nRT$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{V^2}n^3 - \frac{a}{V}n^2 + n(pb + RT) - pV = 0$$

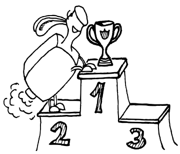
Obecně je takovou rovnici velice těžké řešit. Můžeme takovou rovnici zadat do nějakého počítačového programu, který umí řešit vyšší polynomické rovnice, nebo se ji můžeme pokusit vyřešit sami. Chceme-li se alespoň přiblížit k jejímu řešení, můžeme k němu iterovat. Vyjádříme si z původní rovnice neznámé n jako

$$n_i = \frac{1}{RT}\left(p + a\frac{n_{\text{i-1}}^2}{V^2}\right)(V - n_{\text{i-1}}b)$$

Víme, že výsledek Van der Walsova modelu by měl být blízký výsledku pro ideální plyn. Začneme tedy použitím $n_0 = 40{,}876\,\mathrm{mol}$. Následně jsme takto schopni vyjádřit si n_1 právě dle výrazu nahoře po dosazení za všechny hodnoty jako v předešlé části úkolu. Je dobré si připomenout Van der Walsovy konstanty pro vodík, tedy $a = 0{,}0247\,\mathrm{m^6{\cdot}Pa{\cdot}mol^{-2}}$ a $b = 2{,}66 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}$. Po dosazení vyjde $n_1 \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$. Nyní dosadíme n_1 na místo n_0 a vyjádříme si $n_2 \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$. Jak vidíme, již po druhé po iteraci se $n_1 \approx n_2$, a proto je můžeme považovat za řešení této rovnice na 5 platných cifer.

Nyní můžeme porovnat oba výsledky. Již z toho, že nám výsledek pro Van der Waalsův plyn ziteroval tak rychle z původního výsledku, můžeme vidět, že není tak výrazný rozdíl mezi množstvím $n_\mathrm{W} \doteq 40{,}849\,\mathrm{mol}$, určeným právě takto, a množstvím $n_i = 40{,}876\,\mathrm{mol}$ dle stavové rovnice pro ideální plyn. Tento rozdíl je pro většinu našich výpočtů zanedbatelný.

Ondřej Knopp
Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	7	7	8	7	**44**	**88**
1.	*Patrik Rosenberg*	ZŠ Tuháčkova, Brno	3	3	2	1	–	1	–	**10**	**36**
2.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**23**
3.	*Pavel Šimůnek*	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	3	–	–	7	–	–	–	**10**	**21**
4.	*Barbora Tuháčková*	G Františka Křižíka, Plzeň	4	4	6	–	6	0	–	**20**	**20**
5.	*Kateřina Stefanová*	ZŠ tř. SNP, Hradec Králové	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**19**
6.	*Martin Ondruška*	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**5**
7.	*Daniel Mikuš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	7	7	8	7	**44**	**88**
1.	*Jakub Ježek*	ZŠ Bezručova, Hradec Králové	4	5	6	7	7	7	6	**42**	**73**
2.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	4	5	4	7	4	6	6	**36**	**72**
3.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	3	5	6	7	4	6	6	**37**	**66**
4.	*Pavla Maříková*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	5	6	7	4	–	–	**26**	**54**
5.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	4	5	5	–	3	8	–	**25**	**47**
6.	*Barbora Šišáková*	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	4	5	4	7	–	3	–	**23**	**38**
7.–8.	*Martin Haikl*	G Týn nad Vltavou	4	5	–	3	–	5	–	**17**	**35**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	7	7	8	7	**44**	**88**
7.–8.	*Matyáš Hebert*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**35**
9.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**33**
10.	*Anna Gryčová*	ZŠ Husova, Liberec 5	4	5	–	–	–	2	–	**11**	**28**
11.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**22**
12.–13.	*Jakub Švec*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	4	5	1	7	–	3	–	**20**	**20**
12.–13.	*Jan Vrňata*	ZŠ Týnec nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**20**
14.	*Kevin Děcký*	ZŠ Ostrava-Muglinov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
15.	*Josef Vochozka*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
16.	*Andrea Bártová*	ZŠ K Milíčovu, Praha 4 - Jižní M	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
17.	*Jolana Chylíková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**12**
18.	*Jiří Vestfál*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**9**
19.	*Jan Tomšej*	ZŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	8	7	**40**	**80**
1.	*Filip Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	6	7	6	7	7	**38**	**75**
2.	*Eva Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	5	7	4	5	6	**32**	**70**
3.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	–	5	3	6	6	3	6	**29**	**67**
4.	*Sára Byšková*	ZŠ nám.Jiřího z Poděbrad, Praha	–	5	2	7	6	6	6	**32**	**64**
5.	*Adam Mára*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	5	4	3	4	4	5	**25**	**55**
6.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	–	5	3	6	–	–	–	**14**	**45**
7.–8.	*Natálie Křivancová*	G, Český Krumlov	–	5	4	–	–	–	–	**9**	**42**
7.–8.	*Kryštof Rakovský*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	5	1	5	–	2	2	**15**	**42**
9.–10.	*Adam Krška*	G, Mikulov	–	4	4	–	–	8	–	**16**	**40**
9.–10.	*Ondřej Valášek*	G, Nový Bydžov	–	5	4	5	–	3	3	**20**	**40**
11.	*Ema Volešová*	PORG, Praha	–	5	–	7	–	3	–	**15**	**37**
12.	*Alex Rosenbergová*	ZŠ Tuháčkova, Brno	–	3	2	1	1	3	2	**12**	**32**
13.	*Aleš Opl*	Gymnázium Praha 3	–	4	2	7	–	–	–	**13**	**28**
14.–15.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	–	5	–	3	–	1	–	**9**	**24**
14.–15.	*Radomír Mielec*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**24**
16.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
17.	*Jakub Pelc*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
18.	*Adam Baroš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**15**
19.	*Luboš Petráň*	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	7	–	–	–	**7**	**14**
20.	*Markéta Bečvářová*	G, Písek	–	5	–	6	–	–	–	**11**	**11**
21.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**9**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	8	7	**40**	**80**
1.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	5	6	7	7	7	7	**39**	**77**
2.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	–	5	6	7	6	8	6	**38**	**75**
3.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	–	5	5	7	7	5	4	**33**	**71**
4.–5.	*Patrik Kašpárek*	Katolické gymnázium Třebíč	–	5	2	7	3	8	7	**32**	**66**
4.–5.	*Hana Slámová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	7	4	7	–	**29**	**66**
6.–7.	*David Kamenský*	G a JŠ, Břeclav	–	5	5	6	3	8	7	**34**	**64**
6.–7.	*Šárka Štěpánková*	G J. Ressela, Chrudim	–	5	2	7	5	7	–	**26**	**64**
8.–9.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	5	–	7	4	5	–	**21**	**58**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	8	7	40	80
8.–9.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	5	6	7	7	–	–	**25**	**58**
10.–11.	*Petr Krotký*	G, Hustopeče	–	5	3	6	4	4	3	**25**	**57**
10.–11.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	5	6	7	4	4	2	**28**	**57**
12.–14.	*Vojtěch Kuchař*	ZŠ Sobotka	–	5	5	7	5	4	–	**26**	**51**
12.–14.	*Julie Rubášová*	Biskupské G, Brno	–	2	6	4	4	–	5	**21**	**51**
12.–14.	*Filip Řeháček*	Klasické a španělské G, Brno	–	5	6	3	3	3	3	**23**	**51**
15.	*Eliška Novotná*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	3	7	5	–	–	**20**	**50**
16.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	–	5	4	–	2	5	2	**18**	**49**
17.–18.	*Jakub Charvot*	G, Karviná	–	5	2	7	7	–	–	**21**	**46**
17.–18.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	–	5	6	–	5	–	6	**22**	**46**
19.	*František Krůs*	Masarykovo G, Plzeň	–	4	3	7	6	–	–	**20**	**42**
20.–21.	*Kateřina Fialová*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**38**
20.–21.	*Filip Holoubek*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	4	5	2	4	–	**20**	**38**
22.	*Jiří Zinecker*	G Komenského, Havířov	–	4	–	7	7	–	–	**18**	**35**
23.	*Tereza Bouberlová*	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**31**
24.	*Štěpán Nekula*	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**30**
25.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
26.	*Gabriela Hladká*	G, Nymburk	–	5	–	7	–	–	–	**12**	**25**
27.	*Magdalena Šlaufová*	G, Semily	–	5	5	7	–	–	–	**17**	**23**
28.–29.	*Matěj Moravec*	G Chotěboř	–	5	5	7	4	–	–	**21**	**21**
28.–29.	*Radim Šafář*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	5	2	–	–	–	–	**7**	**21**
30.	*Petr Svoboda*	ZŠ a MŠ Beroun - Město	–	4	1	–	3	1	–	**9**	**19**
31.	*Martin Bencko*	G, Ohradní, Praha-Michle	–	3	1	6	–	–	–	**10**	**16**
32.	*Kateřina Sekničková*	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	4	2	7	–	1	–	**14**	**14**
33.	*Jitka Vysloužilová*	G, Cheb	–	4	–	–	4	–	–	**8**	**11**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.