Úloha VI.E ... Kyvadlo

8 bodů; průměr 5,25; řešilo 32 studentů

Dva orgové Výfuku dostali za úkol přezkoumat, na jakých veličinách a jak závisí perioda kmitů kyvadla T, které vychylujeme s počáteční výchylkou 5°.

(a) *Jarda zkoumal dobu kmitů kyvadla s délkou závěsu* 1 m. *Zjistil, že perioda kmitů T je přímo úměrná druhé mocnině hmotnosti závaží na konci kyvadla.*

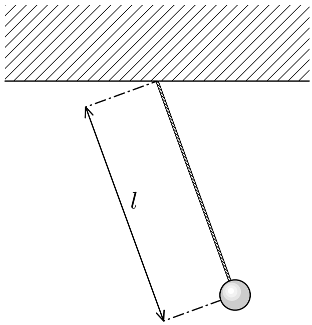
(b) *David zjišťoval, jak závisí perioda T na délce závěsu kyvadla a dospěl k závěru, že perioda T je přímo úměrná délce závěsu.*

Jak již jistě tušíte, vaší úlohou bude experimentálně *prověřit jednotlivá tvrzení. Je-li tvrzení špatně, proveďte všechna potřebná měření k nalezení správného tvrzení.*

Tip: *Nejpřesněji se perioda kyvadla měří tak, že změříte čas, za který kyvadlo urazí deset period a změřený čas pak vydělíte deseti.*

Teorie

V této experimentální úloze se zabýváme kyvadly. Jak takové kyvadlo vlastně vypadá? Je to těleso na pevně uchyceném závěsu, jehož délka se nejčastěji počítá od bodu úchytu k těžišti zavěšeného tělesa, viz obrázek 1.



Obr. 1: Schéma matematického kyvadla.

Ve fyzice rozlišujeme dva základní druhy kyvadel – matematické a fyzikální (nebo také fyzické). Hlavní rozdíl mezi nimi je, že pokud považujeme kyvadlo za matematické, zanedbáváme hmotnost závěsu a rozměry závaží, což vede k jednoduššímu fyzikálnímu popisu pohybu kyvadla. V našem případě bude tento jednodušší model naprosto dostačující.

Měření

(a) První tvrzení ověříme tak, že na kyvadlo zavěsíme postupně několik závaží o různých hmotnostech m. My jsme použili závaží o hmotnostech $m_0 = 0{,}3\,\mathrm{kg}$, $m_1 = 2m_0 = 0{,}6\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 3m_0 = 0{,}9\,\mathrm{kg}$. Kyvadlo uchytíme do závěsu a nejprve ho necháme ustálit v klidové poloze. Poté ho napnuté pomocí úhloměru vychýlíme o $\alpha = 5^\circ$. Pak kyvadlo pustíme a necháme ho desetkrát se „zhoupnout“, čímž změříme dobu *pěti* period.[1] Nejlépe je měření několikrát

[1] Jedna perioda je doba, kdy se kyvadlo zhoupne z krajní polohy tam a zpět, tzn. opět se ocitne v místě, odkud jsme ho vypustili.

zopakovat a poté použít průměrnou hodnotu. To samé opakujeme i s ostatními závažími. Naše výsledky jsou zaznamenány v tabulce 1.

Tabulka 1: Tabulka s naměřenými hodnotami dob pěti period pro různé hmotnosti závaží m_i. V prvním sloupci je uvedena příslušná hmotnost závaží.

m_i/kg	$5T$/s										$\overline{5T}$/s
0,3	10,02	9,86	9,91	9,88	9,91	10,08	10,06	9,90	9,96	10,17	9,98
0,6	9,81	9,96	9,91	10,02	9,53	9,92	9,94	10,14	10,02	9,88	9,91
0,9	10,08	10,04	10,16	10,02	9,97	10,26	9,85	10,29	10,06	9,97	10,07

Jak je z tabulky patrné, naměřené hodnoty jsou si navzájem podobné i přes to, že odpovídají různým hmotnostem závaží. Průměrné hodnoty těchto měření přepočtené na jednu periodu jsou si také velmi podobné: pro závaží o hmotnostech m_0, m_1 a m_2 dostáváme $T_0 = 1{,}96\,\mathrm{s}$, $T_1 = 1{,}98\,\mathrm{s}$ a $T_2 = 2{,}01\,\mathrm{s}$.

Jardovo tvrzení je tedy zjevně nesprávné, protože poměr $T_0 : T_1 : T_2$ neodpovídá poměru $m_0^2 : m_1^2 : m_2^2 = 1 : 4 : 9$. Nejpravděpodobnější znění správného tvrzení vyvozeného na základě naměřených hodnot je, že perioda kyvadla jednoduše *nezávisí* na hmotnosti závaží.

(b) Druhé tvrzení budeme dokazovat podobně: zvolíme si závaží o konstantní hmotnosti (my jsme si zvolili hmotnost $m = 1\,\mathrm{kg}$) a stejným postupem změříme délku jedné periody pro několik různě dlouhých závěsů. V našem měření jsme použili tři různé délky: $l_0 = 1\,\mathrm{m}$, $l_1 = 0{,}75 l_0 = 0{,}75\,\mathrm{m}$ a $l_2 = 0{,}5 l_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Naměřené hodnoty jsou zaneseny v tabulce 2.

Tabulka 2: Tabulka s naměřenými hodnotami dob pěti period pro různé délky závěsu l_i. V prvním sloupci je uvedena délka příslušného závěsu.

l_i/m	$5T$/s										$\bar{5}T$/s
1 m	9.99	9.96	10.22	10.15	10.08	9.93	10.07	10.17	9.98	10.02	10,06
0,75 m	8.62	8.76	8.73	8.64	8.69	8.48	8.75	8.68	8.58	8.71	8,61
0,5 m	7.00	7.22	7.10	7.02	7.26	6.97	7.27	7.13	7.19	7.13	7,13

Z tabulky je patrné, že perioda se zde již mění. Průměrná hodnota pro periody je pro délku l_0 rovna $T_0 \doteq 2{,}01\,\mathrm{s}$, pro délku l_1 je to $T_1 \doteq 1{,}72\,\mathrm{s}$ a pro nejkratší délku l_2 je průměrná perioda kmitů rovna $T_2 \doteq 1{,}43\,\mathrm{s}$. Platí tedy, že doba periody kyvadla klesá se zmenšující se délkou závěsu. Jedná se ale o *přímou úměru*?

Když se pozorněji zaměříme na zkracování doby jedné periody, zjistíme, že se nezkracuje stejným „tempem“ jako námi navolené délky závěsů! Když zmenšíme závěs z délky l_0 na $l_1 = 0{,}75 l_0$, podle přímé úměry bychom měli dostat stejný výsledek i pro periodu, tzn. $T_1 = 0{,}75 T_0$. Tedy změřené době $T_0 = 2{,}01\,\mathrm{s}$ odpovídá očekávaná hodnota $T_1' = 0{,}75 \cdot 2{,}01\,\mathrm{s} \approx 1{,}51\,\mathrm{s}$. Tato hodnota se ale neshoduje s měřením ($T_1 = 1{,}74\,\mathrm{s}$). Předpoklad, že perioda závisí přímo na délce závěsu, se tedy nezdá pravdivý.

Pro ověření této hypotézy provedeme stejný postup i pro třetí délku závěsu $l_2 = 0{,}5 l_0$. Očekávaná doba jedné periody je $T_2' = 0{,}5 T_0 = 0{,}5 \cdot 2{,}01\,\mathrm{s} \doteq 1{,}005\,\mathrm{s}$, zatímco změřená hodnota je $T_2 = 1{,}43\,\mathrm{s}$. Vzhledem ke značné odchylce tohoto výsledku od očekávané hodnoty můžeme prohlásit, že perioda kyvadla *nezávisí* přímo úměrně na délce závěsu. Perioda je tedy zřejmě závislá na délce v jiném, než „základním“ tvaru.[2]

Závěr a chyby měření

Naše měření obě dvě teorie vyvrátilo. Zjistili jsme, že perioda kyvadla nezávisí na hmotnosti závaží a že perioda kyvadla závisí na odmocnině z délky závěsu.

Teoretický výpočet pro matematické kyvadlo vede ke vztahu pro periodu v případě malých úhlových výchylek:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka kyvadla a $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační zrychlení. Naše dvě měření jsou s tímto vztahem v úplné shodě.

Možné chyby měření mohly nastat tehdy, když jste délku závěsu nezměřili až k těžišti tělesa. U nehomogenních těles mohlo navíc dojít ke špatnému odhadnutí polohy těžiště a tím pádem také ke špatnému určení délky závěsu.

Dále je možné, že po rozhoupání se kyvadlo nebude houpat jen přesně do stran, ale také trochu i dopředu a dozadu, což může ovlivnit dobu jedné periody.

Měření periody může ovlivnit i to, že budete na jedno rozkmitání měřit příliš mnoho kmitů, kmity se pak příliš utlumí a budou špatně měřitelné. Sice ani jeden z těchto faktorů neovlivní měření nijak výrazně, ale je dobré vědět, na co si dát pozor a co mohlo způsobit odchylky naměřených hodnot od teoretických předpovědí.

Poznámky k došlým řešením

Když jste někteří z vás měřili tuhle experimentální úlohu, nepřipsali jste postup či dokonce chyběly naměřené hodnoty (obvykle se měří kolem deseti měření, která se poté zprůměrují). Postup má sloužit k tomu, aby ten, kdo si váš protokol úlohy přečte, pochopil, jak jste danou úlohu měřili. Pomůcka pro dobrý postup je jednoduchá: až budete mít postup sepsaný, pročtěte si znovu celý text a představte si, že byste jen podle toho textu měli provést měření. Občas si po takovéto „kontrole“ uvědomíte, že vám vám v protokolu něco chybí nebo že nějaká věta je tam zbytečná.

Další problém u několika z vás nastal, když jste měli potvrdit, jestli perioda kmitu závisí *přímo úměrně* na délce závaží kyvadla. Přímo úměrně znamená, že kolikrát se zvětší/zmenší nezávislá proměnná (zde délka), tolikrát se zvětší/zmenší i proměnná závislá (perioda).

Poslední bod se týká vašich odhadů: pokud dokazujete závislost peridoy na druhé mocnicě hmotnosti a naměříte velmi podobné výsledky lišící se např. až na setinném místě sekundy, jedná se pravděpodobně o chybu měření. Experiment není nikdy tak dokonale přesný, abyste dostali vždy na chlup stejné výsledky, k jakým dojdete podle teoretických úvah a výpočtů. A

[2] Po chvilce hledání můžeme nakonec zjistit, že poměry period $T_0 : T_1 : T_2 \doteq 1 : 0{,}86 : 0{,}71$ velmi dobře souhlasí s poměry odmocnin délek závěsů $\sqrt{l_0} : \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} = 1 : 0{,}87 : 0{,}71$, takže perioda kyvadla je úměrná odmocnině délky jeho závěsu.

zrovna tady lze po logické úvaze usoudit, že aby se druhá mocnina hmotnosti změnila v řádech stovek a tisíců a perioda se měnila v řádech sedetin či setin sekund je prakticky nesmysl.

Pavla Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.