

## Úloha VI.5 ... Kolo štěstí

8 bodů; průměr 5,88; řešilo 26 studentů

Radka se jednou dostala do televize, kde si mohla zatočit kolem štěstí. Kolo v rozhodujícím momentu roztočila úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Radku by samozřejmě zajímalo, na jaké pozici se kolo zastaví a jakou cenu vyhraje.

Kolo je brzděné speciálním mechanismem, poskytující zpomalení (změna úhlové rychlosti za krátký časový úsek  $\Delta t$ ) v jednotkách  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0,3 + \frac{\omega}{10}. \quad (1)$$

Takovýto pohyb již není jednoduše vyjádřitelný pomocí vzorců, a proto si ho naprogramujte v tabulkovém kalkulátoru (MS Excel nebo OpenOffice Calc).

- Otevřete si váš oblíbený kalkulátor a založte si první sloupec, do kterého budete vynášet čas  $t$  v sekundách s krokem  $\Delta t = 0,1$  s.
- Do prvního řádku, vedle času  $t_0 = 0$  s, запиšte počáteční veličiny: počáteční úhel  $\varphi_0 = 0$  rad a počáteční úhlovou rychlost  $\omega_0 = 8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Do čtvrtého sloupce vypočítejte velikost zpomalení  $\varepsilon_0$ .
- Další hodnoty úhlu  $\varphi_n$  a úhlové rychlosti  $\omega_n$  počítejte postupně pomocí vztahů

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega_{n-1}\Delta t, \quad \omega_n = \omega_{n-1} - \varepsilon_{n-1}\Delta t$$

a zpomalení  $\varepsilon_n$  určete pomocí vztahu (1) dosazením úhlové rychlosti  $\omega_n$ .

Vše vypočítaných datech pak nalezněte čas, kdy je úhlová rychlost nulová, tzn. kolo se zastavilo. Pak určete, na jakém úhlu se kolo štěstí zastavilo.<sup>1</sup> Do řešení zkuste vložit i kus své tabulky s daty.

Při řešení postupujeme podle zadaného návodu: v tabulkovém kalkulátoru si založíme nový soubor a postupně začneme vypisovat jednotlivé sloupce. V prvním řádku si pro lepší orientaci nejprve vytvoříme jednoduché záhlaví a poté doplníme první tři řádky našeho „programu“. Pro přehlednost jsou v tabulce 1 (níže) uvedeny hodnoty, které byly do buněk zapsány (v kalkulátoru ale nejsou takto zobrazeny).

Tabulka 1: Obsah prvních čtyř řádek tabulky v Excelu.

	A	B	C	D
1	Čas (s)	Úhel (rad)	Rychlost (rad/s)	Zpomalení ( $\text{rad}/\text{s}^{-2}$ )
2	0	0	8	$= 0,3 + C2/10$
3	0,1	$= B2 + C2 * 0,1$	$= C2 - D2 * 0,1$	$= 0,3 + C3/10$
4	0,2	$= B3 + C3 * 0,1$	$= C3 - D3 * 0,1$	$= 0,3 + C4/10$

Hodnoty v buňkách **B4**, **C4**, **D3** a **D4** můžeme zkopírovat z odpovídajících buněk na předchozím řádku. Nyní označíme poslední dva řádky (tedy 8 buněk) a tažením za malý čtverček úchytu je překopírujeme do asi 200 řádků. Tím „nasimulujeme“ prvních 20 s točení. Všimněte

<sup>1</sup>Nezapomeňte, že úhly v radiánech udáváme v intervalu  $(0; 2\pi)$ .

si, že kalkulátor sám doplnil čas se zadaným krokem  $\Delta t = 0,1$  s a upravil i odkazy na buňky ve vzorcích.

Sloupec, který nás bude zajímat, je sloupec odpovídající úhlové rychlosti (tzn. sloupec **C**). Můžeme pozorovat, že úhlová rychlost postupně klesá z původní hodnoty  $\omega_0$ , což skutečně odpovídá zpomalování Radčína kola. Výřezy z celé simulace uvádíme v tabulce 2.

V momentu, kdy je úhlová rychlost rovna nule, se kolo zastavilo. V dalších řádcích však pozorujeme, že úhlová rychlost neustále klesá do záporných hodnot. Mohlo by se tedy zdát, že kolo se začne roztáčet v opačném směru. Takové chování ale není fyzikální, je to pouze nedostatek této simulace. Nulové hodnotě úhlové rychlosti odpovídá čas  $t = 12,9$  s. Z toho stejného řádku vidíme, že odpovídající úhel je  $\varphi \doteq 41,2$  rad. Toto ale ještě není výsledek – nezajímá nás totiž, kolikrát se kolo otočilo, ale kde se zastavilo, proto musíme z této hodnoty odečíst několik násobků  $2\pi$ , které odpovídají otočení o jedno celé kolo.

Výsledkem je tedy zbytek po dělení  $2\pi$ , což je matematicky zapsáno jako

$$\varphi = 41,2 \text{ rad mod } 2\pi \doteq 3,5 \text{ rad}.$$

Kolo štěstí se zastavilo na úhlu 3,5 rad.

Tabulka 2: Výřezy z finální tabulky

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>1</b>	Čas (s)	Úhel (rad)	Rychlost (rad/s)	Zpomalení (rad/s <sup>-2</sup> )
<b>2</b>	0	0	8	1,1
<b>3</b>	0,1	0,8	7,89	1,089
<b>4</b>	0,2	1,589	7,7811	1,07811
<b>5</b>	0,3	2,36711	7,673289	1,0673289
<b>6</b>	0,4	3,1344389	7,56655611	1,056655611
<b>7</b>	0,5	3,891094511	7,460890549	1,046089055
<b>127</b>	12,5	41,18214494	0,131785506	0,313178551
<b>128</b>	12,6	41,19532349	0,100467651	0,310046765
<b>129</b>	12,7	41,20537026	0,069462974	0,306946297
<b>130</b>	12,8	41,21231655	0,038768345	0,303876834
<b>131</b>	<b>12,9</b>	<b>41,21619339</b>	<b>0,008380661</b>	<b>0,300838066</b>
<b>132</b>	13,0	41,21703145	-0,021703145	0,297829685

*Jaroslav Janoš*  
jarda@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.