

Úloha V.5 ... Ubrus

9 bodů; průměr 4,48; řešilo 33 studentů

Nedílnou součástí všech velikých oslav je zábava, při které se účastníci snaží strhnout z prostřeného stolu ubrus tak, aby ze stolu nic nespadlo na zem. Podívejme se na tento trik zblízka.

Vycházet budeme z druhého Newtonova zákona, který lze zapsat jako $F = ma$. Zákon lze chápat dvojím způsobem:

- působí-li na těleso o hmotnosti m výsledná síla o velikosti F , těleso bude zrychlovat se zrychlením o velikosti a ve směru shodném se směrem působící síly,
- zrychluje-li podložka zrychlením a , v soustavě spojené s podložkou působí na všechny předměty na podložce setrvačná síla o velikosti F ve směru opačném vůči směru zrychlení a .

Zde roli podložky bude hrát ubrus. Na něm je položen talíř o hmotnosti $m = 300$ g. Koeficient tření¹ mezi talířem a ubrusem je roven $f = 0,2$.

- Adam zatahl za ubrus tak, že se začal pohybovat se zrychlením $a_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. K jeho překvapení se talíř začal pohybovat spolu s ubrusem. Nakreslete obrázek, do kterého šipkami zaznačíte síly, které na talíř působí. Vypočítejte výslednou sílu, která působila na talíř v soustavě spojené s ubrusem.
- Vypočítejte, jaké musí být nejmenší zrychlení a_2 , aby setrvačná síla překonala sílu tření, a talíř se vzhledem k ubrusu začal pohybovat.
- Borek proto zatahl za ubrus tak, že zrychloval se zrychlením $3a_2$. Určete velikost a směr zrychlení a_3 talíře v soustavě spojené s ubrusem.
- I když Borek za ubrus zatahl dostatečnou silou, talíř se začal pohybovat i vůči stolu. Vypočítejte velikost a směr tohoto zrychlení a'_3 .
- Pokud jste správně počítali, zrychlení a'_3 vyšlo nezávislé na zrychlení a_2 . To by ale mělo znamenat, že k úspěšnému strhnutí ubrusu stačí překonat zrychlení a_2 . Proč je ale lepší ubrus strhávat co největší silou (s největším zrychlením)?

- Čtème pozorně zadání: talíř se při zatažení začal pohybovat spolu s ubrusem. To znamená, že v soustavě spojené s ubrusem² se talíř *nepohybuje*. Z druhého Newtonova zákona tedy plyne, že výsledná síla působící na talíř bude v této soustavě *nulová*.

To ovšem neznamená, že na talíř nebude působit žádná síla. Podložka (ubrus) pod talířem zrychluje, proto na talíř působí setrvačná síla, a to ve směru opačném, než je směr zrychlení ubrusu. Velikost této síly je $F_s = ma_1 = 0,3 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,3 \text{ N}$.

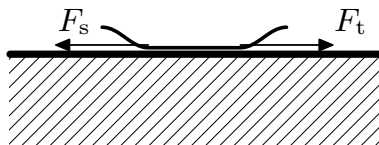
Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že na talíř bude působit ještě jedna síla, která bude působení setrvačné síly vyrovnávat. Jelikož setrvačná síla se pokouší talířem pohnout, proti této snaze bude vystupovat síla tření. Její velikost ale nebude rovna mgf , jak jsme zvyklí! Neobvyklou vlastností tření je jeho snaha pouze vyrovnávat působení jiných sil na těleso tak, aby bránila jeho pohybu. Hodnota mgf udává pouze *maximální* velikost třecí síly:

$$F_{\text{tm}} = mgf = 0,3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 0,6 \text{ N}.$$

Vidíme, že tato síla je, jak jsme očekávali, větší než síla F_s . Skutečná velikost třecí síly tedy bude $F_t = F_s = 0,3 \text{ N}$ a její směr bude shodný se směrem zrychlení ubrusu, viz obrázek 1.

¹Myslíme tím statický i dynamický koeficient tření.

²Představme si, že vedle talíře k ubrusu přilepíme malou kameru a na situaci se budeme dívat prostřednictvím jejího obrazu.



Obr. 1: Obrázek sil působících na talíř v soustavě spojené s ubrusem. Na talíř navíc působí tíhová síla a reakční síla podložky, ty se ale navzájem vyruší, a proto je pro jednoduchost nezakresluje.

- (b) Bude-li zrychlení a_2 takové, že setrvačná síla $F_{sm} = ma_2$ bude mít stejnou velikost jako F_{tm} , při sebemenším zvýšení hodnoty zrychlení nebude výsledná síla působící na talíř nulová, jak tomu bývalo doposud. Naopak, nenulová výsledná síla způsobí, že se talíř (podle druhého Newtonova zákona) začne vůči ubrusu pohybovat. Pro hledané zrychlení a_2 tedy platí

$$ma_2 = F_{tm} \Rightarrow a_2 = \frac{F_{tm}}{m} = \frac{mgf}{m} = gf = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

- (c) Poněvadž Borkem udělené zrychlení $3a_2$ je bezpečně větší než mezní zrychlení a_2 , talíř se bude jistě vůči ubrusu pohybovat. Je proto jednoduché určit velikosti obou sil (setrvačné a třecí), které na talíř působí v soustavě spojené s ubrusem. Setrvačná síla má velikost $F_B = = 3ma_2 = 3 \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,8 \text{ N}$, třecí síla je maximální, tzn. má velikost $F_{tm} = 0,6 \text{ N}$. Jelikož síly působí proti sobě, velikost výsledné síly je rovna rozdílu

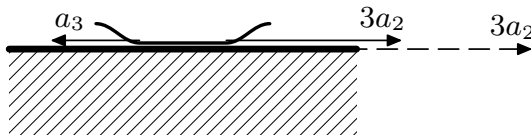
$$F_3 = F_B - F_{tm} = 3ma_2 - mgf = 3 \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 0,3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 1,2 \text{ N}.$$

Nakonec, pro zrychlení talíře plyne z Newtonova zákona

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{1,2 \text{ N}}{0,3 \text{ kg}} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zrychlení talíře vůči ubrusu má tedy velikost $a_3 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a jeho směr je stejný jako směr setrvačné síly, tzn. proti směru tahání ubrusu.

- (d) Soustava spojená se stolem (kameru si nyní představujeme přilepenou na stůl) „vidí“ soustavu spojenou s ubrusem tak, že zrychluje se zrychlením $3a_2$ ve směru tahání ubrusu. To kupříkladu znamená, že při přechodu do této soustavy musíme *všem* objektům toto zrychlení *ve správném směru* započítat. Pro náš talíř, který doposud zrychloval proti směru tahání ubrusu, musíme toto zrychlení odečíst, neboť jeho směr je opačný ke směru zrychlení a_3 . Zjednodušeně řečeno, pro zrychlení a'_3 platí $a'_3 = a_3 - 3a_2$.



Obr. 2: Skládání zrychlení talíře v soustavě spojené se stolem.

Před tím, než hledané zrychlení vyčíslíme, si ve vztahu pro a_3 rozepíšeme sílu F_3 :

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{3ma_2 - mgf}{m} = 3a_2 - gf.$$

Platí tedy

$$a'_3 = a_3 - 3a_2 = 3a_2 - gf - 3a_2 = -gf = -10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,2 = -2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Vyšlo nám tedy, že zrychlení talíře vzhledem ke stolu je závislé pouze na koeficientu tření a na tíhovém zrychlení. Záporné znaménko nám pouze oznamuje, že původní směr zrychlení (proti směru tahání ubrusu) se změnil. Talíř bude tedy zrychlovat ve stejném směru, jako je směr tahání ubrusu.

- (e) Odpověď na poslední část úlohy se skrývá v textu výše. Vyšlo nám, že talíř, který se po strhávaném ubrusu klouže, vůči stolu zrychluje. A dovedete si představit, že talíř, který na stole zrychluje, je poněkud nebezpečný. Čím déle bude totiž talíř na ubrusu zrychlovat, tím větší rychlosti nabude a riziko, že talíř spadne ze stolu, roste.

Jelikož zrychlení talíře *nezávisí* na zrychlení ubrusu, nejmenší rychlosti nabude talíř tehdy, když bude na ubrusu klouzat po co nejkratší čas. To ale docílíme tím, že ubrusu udělíme větší zrychlení. Proto je k úspěšnému provedení této zábavy vhodné použít co největší síly, tzn. udělit ubrusu co největší zrychlení.

Pokud našim poněkud překvapivým výsledkům nevěříte, klidně si je ověřte experimentálně. Důrazně ale doporučujeme místo talířů použít nerozbitné předměty, například knížku.

Patrik Švančara

pato@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.