

Úloha II.E ... Ledová

7 bodů; průměr 6,10; řešilo 48 studentů

Ponevadž je zima přede dveřmi, je potřeba se na ni připravit. Kupříkladu tak, že zjistíme, jak rychle taje led různých rozměrů. První část této úlohy sestává z výroby ledových vzorků. Nejdříve si z kartonu vystihněte a poskládejte tři „nádoby“ ve tvaru krychliček s hranami dlouhými 5 cm, 7,5 cm a 10 cm. Pak si vezměte potravinovou fólii (nebo sáček) a vlepťte ji na vnitřní strany papírových forem, naplňte je asi do 9/10 vodou a nechte je zmrazit. Měli byste tak získat tři krásné ledové kostky.

Kostky posléze vytáhněte z forem, odstraňte z nich fólie a položte je na rovnou plochu (například na táč). Vaší úlohou bude změřit čas, za který kostky zcela roztají. Kolikrát delší bude čas, za který roztají větší kostky v porovnání s tou nejmenší? Popište, jak se tento poměr liší od

- (a) poměru délek stran,
- (b) poměru povrchů,
- (c) poměru objemů.

Oceníme, když svoje experimentální snažení doplníte fotografiemi.

Před uděláním jakéhokoliv experimentu bývá užitečné (a u větších experimentů vlastně docela podstatné) nejdříve se teoreticky zamyslet nad pokusem a zkusit odhadnout, jaké výsledky můžeme očekávat. Zkusíme to proto i zde.

Po vytažení kostek z mrazáku se potýkáme s daným objemem ledu o nějaké teplotě, která je nižší než bod tání. Led nám očividně začne tát, ale to až potom, co dosáhne teploty tání. Ohřívání ledu je poměrně komplikované, protože probíhá postupně od povrchu do středu kostky. Vypočítat ale umíme celkové teplo, které je potřeba k ohřátí celé kostky. Toto teplo Q_1 je dané vztahem

$$Q_1 = mc\Delta t,$$

kde c je měrná tepelná kapacita ledu, m je hmotnost kostky a Δt je rozdíl mezi výchozí teplotou ledu a teplotou tání.

Dále po zahřátí kostek na teplotu tání pak dochází k jejich tání. Opět umíme spočítat celkové teplo, které k tomu spotřebujeme:

$$Q_2 = l_t m = l_t \rho V,$$

kde l_t značí měrné skupenské teplo tání ledu.

Na úplné roztání musí proto ledová kostka od svého okolí získat teplo $Q = Q_1 + Q_2$. Možné jsou tři způsoby předávání tepla: vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a zářením (radiací).

Předávání tepla prouděním zde hraje pouze drobnou drobnou roli, neboť tento jev se uplatňuje zejména v tekutinách. Naopak, tepelné záření přijímají naše kostičky ode všeho okolo (např. od radiátorů nebo od lidí kolem), a přestože jsou bílé, spoustu z něj nakonec pohltí. Množství záření, které kostička pohlcuje, závisí přímo úměrně na její ploše. Je snadné si rozmyslet, že plocha kostiček závisí na druhé mocnině délky strany. Na předávání tepla se podílí rovněž i vedení tepla taktéž skrze jejich povrch. Oba významné efekty předávání tepla tedy závisí na druhé mocnině délky strany kostky.

Výše popsané předávání tepla lze ve fyzice charakterizovat veličinou zvanou *tepelný výkon* (ozn. P), který jednoduše popisuje, kolik tepla okolí kostce předalo za sekundu.

Čas t potřebný k roztání kostky pak lze odhadnout jako poměr tepla, které potřebujeme dodat (tzn. teplo Q), a jak rychle ho od okolí dostáváme (tzn. tepelný výkon P):

$$t = \frac{Q}{P}.$$

Tabulka 1: Přehled poměrů délek hran, povrchů a objemů kostek a dob jejich tání

veličina	nejmenší	prostřední	největší
hrana	1,0	1,5	2,0
doba tání	1,0	1,9	2,9
povrch	1,0	2,25	4,0
objem	1,0	3,38	8,0

Všimněme si, že teplo Q závisí, kromě fyzikálních konstant, na hmotnosti kostky m . Pro hmotnost ale platí $m = \rho V$, kde ρ je hustota a V objem kostky. Lze tedy říci, že teplo Q závisí přímo úměrně na objemu kostky, neboli na třetí mocnině délky její strany.

Vydělíme-li teplo Q , které závisí na třetí mocnině délky strany, výkonem P , jenž závisí na druhé mocnině délky, dostáváme, že doba tání t bude úměrná první mocnině délky strany kostky. Jinak řečeno, naše úvahy předpovídají, že kostka s dvakrát větší hranou bude tát dvakrát delší čas.

Tento jednoduchý model ale nepopisuje realitu dostatečně přesně, neboť na výslednou dobu tání mají vliv i další efekty, které naše předpověď nezahrnuje (průvan, nestálá teplota okolí, atp.). Proto musíme provést experiment, který je vlastně poměrně jednoduchý. Po výrobě kostek je vyndáme z mrazáku a čekáme. Poté, co roztají, zaznamenáme odpovídající čas. Náročnost experimentu se ale ukáže hned, jak zjistíme, jak dlouho kostky tály.

Jelikož nám mnoho z vás zaslalo velmi kvalitní data, rozhodli jsme se vypočítat průměrné časy tání ze všech došlých řešení. Výsledné časy byly $t_1 = 3 \text{ h } 35 \text{ min}$, $t_2 = 6 \text{ h } 23 \text{ min}$ a $t_3 = 9 \text{ h } 33 \text{ min}$ (pro kostky vzestupně podle velikosti).

Abychom mohli povědět o našem výsledku více, určíme poměr dob tání vůči sobě. Ten se nejlépe a nejpráhledněji zjistí tak, že vydělíme čas pro prostřední a největší kostičku časem tání té nejmenší. Dostáváme

$$t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 1,9 : 2,9.$$

Stejným způsobem určíme i poměry délek hran kostek, poměry jejich povrchů a objemů (hodnotu pro prostřední a největší kostku vydělíme tou nejmenší) a získáme čísla, která jsou uvedena v tabulce 1. Zde si můžeme všimnout, že poměry dob tání jsou trochu vyšší než předpovězené poměry stran. Důvod, proč tomu tak je, už asi jednoduše neobjasníme. Nejspíše to můžeme přičítat nerovnoměrnému ohřevu kostky, popřípadě dalším vlivům prostředí. Lze konstatovat, že tyto efekty způsobují, že větší kostky tají o kousek déle, než bychom očekávali.

Petr Doležal

petr.d@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.