Úloha II.5 ... James Bond

8 bodů; (chybí statistiky)

Agent 007 byl zase jednou vyslán na mimořádně riskantní záchrannou misi. Tentokrát jde ale o hodně – jiný agent britské tajné služby MI6 je vězněn ve zločineckém doupěti a jde mu o život! Agent je pevně připoután k židli na dně obdélníkového bazénu s rozměry $a = 10\,\mathrm{m}$ a $b = 5\,\mathrm{m}$, přičemž jeho obličej je ve výšce přesně $h = 1\,\mathrm{m}$ nade dnem bazénu.

V momentě, kdy se James Bond plížil potichu doupětem a byl od svého kolegy vzdálen pouze $s = 500\,\mathrm{m}$, byl odhalen elektrickým senzorem. Zločinec hlídající uvězněného agenta se tedy rozhodl konat a otočil kohoutem, který do bazénu napouští vodu průtokem $Q = 50\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$, a v té samé chvíli se vydal na okružní pochůzku doupětem. Tato pochůzka trvá zločinci přesně dobu $t_1 = 2\,\mathrm{min}$, po kterých se vrátí a čas $t_2 = 1\,\mathrm{min}$ zůstane u agenta. Pak odejde na další stejnou pochůzku, zpět k agentovi, a tak dále.

Na to, aby James Bond mohl kolegu osvobodit, musí přijít dostatečně brzy před tím, než se voda dostane na úroveň obličeje jeho kolegy. Rovněž ale nemůže přijít tehdy, kdy je u bazénu zločinec a ani $\tau = 25\,\mathrm{s}$ před příchodem zločince – tolik času totiž zabere vysvobození spoutaného agenta.

(a) Spočtěte, kolik času zbývá uvězněnému agentovi, než voda dosáhne na úroveň jeho obličeje.
(b) Zjistěte, za jakou nejkratší dobu James Bond dojde k bazénu, pokud se nedokáže plížit rychleji než rychlostí $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
(c) Najděte intervaly (rozsahy) časů, ve kterých se může James Bond doplížit k bazénu a kolegu osvobodit.
(d) K intervalům času určete příslušné intervaly rychlostí, kterými se může James Bond plížit doupětem, aby byla mise úspěšná.

James Bond není jenom tajný agent, ale i šikovný fyzik! Nedělá mu proto problém bez mrknutí oka cokoliv spočítat. Ukážeme si přesně, jak to vlastně agent 007 dokázal.

(a) Uvězněný agent je přivázaný k židli na dně bazénu. Ze zadaných rozměrů bazénu a z výšky h můžeme spočítat objem vody, který do bazénu nateče, než se agent utopí. Voda bude totiž vytvářet kvádr, jehož objem se rovná součinu plochy podstavy a výšky: $V = abh$. Do tohoto vztahu dosadíme zadané hodnoty a pro další výpočty převedeme výsledek na litry:

$$V = 10\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}^3 = 50\,000\,\mathrm{dm}^3 = 50\,000\,\mathrm{l}\,.$$

Chceme-li vědět, za jak dlouho se agent utopí, tento objem vydělíme průtokem přitékající vody[1] Q:

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{50\,000\,\mathrm{l}}{50\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}} = 1\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Agentovi tedy zbývá $1\,000\,\mathrm{s} \doteq 16{,}7\,\mathrm{min}$, než voda dosáhne jeho hlavy a utopí se.

(b) Druhý úkol je jednoduchý, ale velmi důležitý pro další úvahy. Pouze použijeme vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb – vydělíme dráhu, kterou agent musí ujít, maximální rychlostí, kterou se plíží:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{500\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 500\,\mathrm{s}\,.$$

James Bond tedy může dorazit k bazénu nejdříve v čase 500 s od začátku napouštění vody do bazénu.

[1] Průtok je veličina, která vyjadřuje závislost množství nateklé vody V na čase t, takže jeho jednotka je $\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. Správnost výpočtu můžeme tedy ověřit rozměrovou zkouškou.

(c) Teď si pojďme rozebrat, jak se vlastně pohybuje zločinec, který agenta věží v bazénu. V počátečním čase začal napouštět vodu do bazénu a vydal se na pochůzku. Šel $t_1 = 120\,\mathrm{s}$ k bazénu, zde setrval $t_2 = 60\,\mathrm{s}$ a poté zase 120 s šel a 60 s čekal. Celkově mu obchůzka i s čekáním trvá vždy $t_1 + t_2 = 180\,\mathrm{s}$.

Jinak řečeno, zločinec svoji obchůzku začne v časech rovných násobkům 180 s, přičemž prvních 120 s obchůzky se u zajatého agenta nenachází. Abychom určili intervaly časů, kdy může agent 007 kolegu osvobodit, musíme započítat i $\tau = 25\,\mathrm{s}$, kterých Jamesi Bondovi trvá osvobodit agenta. Proto má James Bond při každé obchůzce na osvobození kolegy pouze $t_1 - \tau = 95\,\mathrm{s}$ od začátku každé obchůzky.

Vhodné intervaly časů tedy můžeme zapsat jako $(n \cdot 180; n \cdot 180 + 95)$ s, kde $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Po dosazení za jednotlivá n tak dostáváme intervaly $(0; 95)$ s, $(180; 275)$ s, $(360; 455)$ s, dále $(540; 635)$ s a $(720; 815)$ s.

U dalšího intervalu, který začíná v čase $5 \cdot 180\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{s}$ si musíme dát pozor, protože v čase $T = 1\,000\,\mathrm{s}$ agent zemře a James potřebuje nejméně 25 s na záchranu. Zachraňování musí proto začít nejpozději v čase 975 s, tzn. poslední přípustný interval je $(900; 975)$ s.

V předchozím bodě jsme si spočetli, že James Bond k bazénu dojde v nejkratším čase $T = 500\,\mathrm{s}$. Trefí se tedy zrovna do času mezi druhým a třetím intervalem[2], kdy u bazénu čeká zločinec. Musí se tedy plížit pomaleji, aby k bazénu došel ve třetím, respektive čtvrtém nebo pátém intervalu.

(d) Intervaly příznivých časů známe (jsou tři) a známe i vzdálenost s, kterou musí James Bond ujít. Pro zjištění přípustných intervalů rychlostí tak stačí dosadit krajní hodnoty časových intervalů do vzorce $v = s/t$:

$$\begin{aligned}
\text{třetí interval:} \quad & v_{3_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{540\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \qquad v_{3_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{635\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \\
\text{čtvrtý interval:} \quad & v_{4_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{720\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}69\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \qquad v_{4_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{815\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}61\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \\
\text{pátý interval:} \quad & v_{5_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{900\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \qquad v_{5_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{975\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}51\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.
\end{aligned}$$

James Bond se tedy může k uvězněnému kolegovi plížit rychlostí, která se nachází ve spojení intervalů

$$[(0{,}51; 0{,}56) \cup (0{,}61; 0{,}69) \cup (0{,}79; 0{,}93)]\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

[2] Pokud intervaly začínáme číslovat podle n, tzn. nultý, první, druhý interval a tak dále.