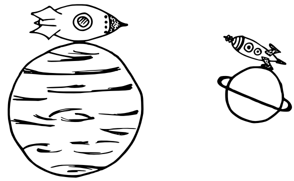
Úloha II.3 ... Dobývání planet

6 bodů; průměr 3,96; řešilo 57 studentů



Píše se rok 3 333 a výzkum vzdálených planet je v plném proudu. Přednedávnem dvě kosmické lodě úspěšně přistály na dvou malých planetách, označených α a β. Obě lodě byly vybaveny citlivými senzory, které měřily základní parametry planetek. Senzory zjistily, že na planetě α trvá den šestkrát déle než na planetě β a dále zjistily, že poloměr planety α je oproti poloměru planety β čtyřnásobný.

Po chvilce měření se ale oba senzory porouchaly, a to kvůli přílišné odstředivé síle, která na ně působila. Zjistěte, na který ze senzorů působila větší odstředivá síla, víte-li, že senzor měřící na planetě α vážil $m_\alpha = 9\,\mathrm{kg}$, zatímco senzor na druhé planetě měl hmotnost $m_\beta = 1\,\mathrm{kg}$. Pro odstředivou sílu na povrchu libovolné planety platí vztah

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

kde m je hmotnost uvažovaného senzoru, v je obvodová rychlost planety daná její rotací a r je poloměr dané planety.

Kvůli přehlednosti si informace ze zadání zapišme do tabulky 1. Označíme-li délku dne na planetě β jako T, ze zadání je délka dne na planetě α rovna $6T$. Stejně postupujeme i u poloměrů planet. Pokud je poloměr planety β rovný r, poloměr planety α je $4r$. Nakonec si ještě všimneme, že hmotnost senzoru umístěného na planetě α je $9m$, kde m jsme označili hmotnost senzoru na planetě β.

Tabulka 1: Známé údaje o planetách

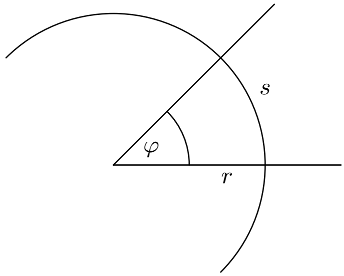
atribut planety	α	β
délka dne	$6T$	T
poloměr planety	$4r$	r
hmotnost senzoru	$9\,\mathrm{kg}$	$1\,\mathrm{kg}$

Ze získaných informací máme pak spočítat odstředivou sílu, která závisí na hmotnosti, obvodové rychlosti a poloměru. Hmotnost senzoru i poloměr planety známe, rychlost bude potřeba vypočítat. Rychlost definujeme jako podíl dráhy a času ($v = s/t$). Naším cílem ale je spočítat obvodovou rychlost způsobenou rotací planety. Než si ale řekneme, jak se počítá, musíme si vysvětlit několik pojmů. Planeta se otáčí okolo své osy, takže trajektorií každého jejího bodu v prostoru je kružnice.

V případě rovnoměrného pohybu těles po kružnici zavádíme veličinu zvanou úhlová rychlost vztahem $\omega = \varphi/t$, kde φ je úhlová dráha a t je čas.

Úhlová dráha s je prezentována na obrázku 1. Jednotkou úhlové dráhy jsou radiány. Jeden radián je definován jako středový úhel, který náleží oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Radián je tedy poměr délky oblouku s a poloměru kružnice r, přičemž $s = r$. Můžeme taktéž zapsat, že úhlová dráha je poměr délky oblouku a poloměru kružnice $\varphi = s/r$.

Proč by to ale nemohlo být opačně? Abychom se o tom přesvědčili, můžeme provést jednoduchý důkaz. Pokud změříte obvod jakékoli kružnice a vydělíte ho jejím průměrem, dostanete



Obr. 1: Vztah mezi úhlem a kružnicovým obloukem

číslo, které se rovná přibližně 3,14. Je vám určitě dobře známo, že toto číslo se nazývá Ludolfovo číslo π. Znamená to tedy, že π je poměrem obvodu kružnice o a jejího průměru d, tzn. $\pi = o/d$. Zajímavé opravdu je, že tento poměr je vždy konstantní.

Průměr kružnice můžeme zapsat jako dvojnásobek poloměru. A pokud z předchozí rovnice vyjádříme obvod, dostaneme vztah pro obvod kružnice

$$o = 2\pi r\,.$$

Námi vyjádřený obvod o je to samé jako délka oblouku s. Za s tedy dosadíme do rovnice pro úhlovou dráhu a dostáváme

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,.$$

Nyní jsme si dokázali, že středový úhel kruhu je 2π rad neboli $360°$.

Pokud bychom celý postup ovšem udělali opačně, tedy

$$\varphi = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \doteq 0{,}16\,,$$

zjistíme, že středový úhel by byl menší než jedna. Ale vzhledem k tomu, že samotný jeden radián je definovaný jako úhel, který náleží oblouku o stejné délce jako je poloměr kružnice, středový úhel celé kružnice musí být určitě větší než jeden radián. Z předchozího obrázku, který definuje jeden radián, je dobře vidět, že středový úhel je větší než jeden radián.

Nyní jsme si dokázali, že úhlová dráha (neboli středový úhel) je vskutku rovna s/r. Můžeme tedy dosadit do vzorce pro úhlovou rychlost:

$$\omega = \frac{\frac{s}{r}}{t} = \frac{s}{rt}\,.$$

Při bližším prozkoumání vzorce uvidíme, že se nám zde vyskytuje rychlost jako člen s/t. Tato rychlost (ozn. v) se nazývá postupná obvodová rychlost a je to přesně ta rychlost, kterou při výpočtu dostředivé síly potřebujeme:

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{s}{t} = \frac{1}{r} v \quad \Rightarrow \quad v = \omega r\,.$$

Teď se vraťme na začátek k naší tabulce a blíže si vysvětleme, co to je délka dne. Představte si naši planetu Zemi, na které vychází v určitém místě v pět hodin ráno slunce. V průběhu dne je světlo, večer se stmívá a potom nastane tma. Druhý den v pět hodin zase na tom samém místě vyjde slunce. Určitě dobře víte, že stmívání je způsobené tím, že se naše planeta otáčí okolo své osy. Tím, že se otáčí, se odklání od slunce a stmívá se. To, že druhý den ráno zase vyjde slunce, znamená, že Země se celá otočila, a to o 360° neboli 2π. Planeta α se o 2π otočila za čas $6T$ a planeta β za čas T. Jinak řečeno jsme si teď slovy popsali, jakou mají obě planety úhlovou rychlost. Musí platit

$$\omega_\alpha = \frac{2\pi}{6T}\,, \qquad \omega_\beta = \frac{2\pi}{T}\,.$$

A konečně už známe všechny veličiny a můžeme použít vzorec pro dostředivou sílu. Protože chceme zjistit, na který ze senzorů působila větší odstředivá síla, dáme obě síly do poměru:

$$\frac{F_{o_\alpha}}{F_{o_\beta}} = \frac{\dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{r_\alpha}}{\dfrac{m_\beta v_\beta^2}{r_\beta}} = \frac{\dfrac{m_\alpha r_\alpha^2 \omega_\alpha^2}{r_\alpha}}{\dfrac{m_\beta r_\beta^2 \omega_\beta^2}{r_\beta}} = \frac{m_\alpha r_\alpha \dfrac{4\pi^2}{36T^2}}{m_\beta r_\beta \dfrac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{9\cdot 4r\cdot \dfrac{4\pi^2}{36T^2}}{1\cdot r\cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{r\cdot \dfrac{4\pi^2}{T^2}}{r\cdot \dfrac{4\pi^2}{T^2}} = 1\,.$$

Z výsledku vidíme, že na oba senzory působí stejně velká odstředivá síla.

Poznámky k došlým řešením

Z výsledkové listiny můžete vidět, že plný počet bodů jsem udělila jen několika z vás. K dosažení maximální bodové hranice bylo nutno splnit především dvě kritéria. První z nich bylo si dobře přečíst zadání, a tudíž si dobře označit proměnné. Velké množství z vás totiž planety α a β prohodilo a místo, abyste napsali, že $r_\alpha = 6r$, tak jste počítali s tím, že $r_\beta = 6r$. V tomto případě stačí logicky uvažovat.

Poloměr planety α je šestkrát větší než poloměr planety β. Pokud je poloměr planety β například 100 km, tak poloměr planety α je šestkrát větší, tudíž je 600 km. Můžete zapsat, že $r_\alpha = 6r$ a $r_\beta = r$. Stejně postupujeme i u případu s délkou dne. Úloha byla bohužel (vlastně spíš naschvál) zadaná tak, aby na senzory působila stejná odstředivá síla. Proto pokud jste proměnné prohodili, vyšel vám stále stejný výsledek. Za toto špatné označení jsem strhávala jeden bod.

Přejděme k druhému kritériu. Ještě větší množství z vás uvažovalo, že když délka dne je $6T$, tak rychlost je $6v$. Ale to je fyzikálně špatná dedukce. Jak se může čas rovnat rychlosti? Samozřejmě, že nemůže. V případě výpočtu rychlosti hraje velkou roli dráha, na kterou jste zapomínali. Pokud jste nesplnili toto kritérium, vaše bodové ohodnocení bylo poloviční. S tím souvisí i to, že je dobré si pro sebe někam bokem na papír vždy udělat rozměrovou zkoušku, abyste věděli, že vám opravdu vyjde to, k čemu jste se chtěli dopočítat.

Jednou z méně častých chyb bylo, že jste místo obvodové rychlosti uvažovali normální rychlost. V zadání byl schválně uveden vzorec pro výpočet a schválně označena rychlost v jako obvodová. Pravděpodobně se většina z vás nikdy s tímto pojmem nesetkala. A pokud vám nějaký pojem není známý, zkuste si o něm něco zjistit před tím, než ho mylně nahradíte něčím, co už znáte. Vzorec pro obvodovou rychlost vychází ze vzorce pro klasickou rychlost, což jste někteří z vás pochopili a dráhu nahradili obvodem kruhu. Jiní jste dráhu jednoduše nahradili poloměrem, což bylo také špatně.

Rozpracovávat řešení obecně se sice více naučíte až na střední škole (někteří z vás to bravurně zvládají už teď), ale pár z vás doplatilo na číselnou metodu, a kvůli zaokrouhlování jim vyšel jiný výsledek.

Jmenovitě bych ráda pochválila Šimona Brázdu a Vláďu Chudého, kteří měli velmi pěkná řešení.

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz