

# výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

ke konci školního roku se vám do rukou dostává poslední brožurka letošního ročníku Výfuku. Naleznete v ní řešení posledních dvou sérií a příslušné výsledkové listiny. Svoje konečné umístění najdete i na přiloženém diplomu.

Všem vítězům gratulujeme! A nejen to – řešitelé, kteří se umístili do desátého místa v každé kategorii, získávají nárok na věcné ocenění<sup>1</sup>. Řešitelé, kteří se sice neumístili v první desítce, ale dosáhli lepšího bodového zisku než 45 bodů, od nás získávají psací blok.

Děkujeme vám za čas a úsilí, jenž jste věnovali řešení Výfuku. Máte-li k průběhu semináře nebo k úlohám připomínky, prosím, vyplňte interaktivní elektronickou anketu. Odkaz na anketu naleznete na našem webu.

Chcete-li v řešení zajímavých úkolů pokračovat i o prázdninách, nabízíme vám zapojení se do prázdninové série – sice je soutěž určena primárně pro nové řešitele, ale rádi uvítáme i řešení od vás. Zadání prázdninové série je již zveřejněno na našem webu.

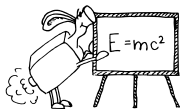
Devěťákům, kteří v řešení Výfuku pokračovat nemohou, doporučujeme začít řešit korespondenční seminář FYKOS. Průběhem se FYKOS velice podobá Výfuku, obsahem a náročností úloh zase odpovídá středoškolské úrovni.

Nezůstává nám nic jiného, než se s vámi pro tento školní rok rozloučit. Přejeme vám pohodové prázdniny plné zážitků a příjemný vstup do následujícího školního roku, přičemž doufáme, že v řešení Výfuku budete pokračovat i ve školním roce 2016/2017.

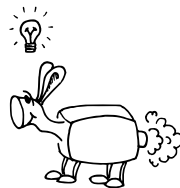
*Organizátoři*

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

<sup>1</sup>Řešitelé s nárokem na ocenění mají v obálce letáček s bližšími informacemi.



## Řešení V. série



## Úloha V.1 ... Dobble

5 bodů; průměr 2,71; řešilo 17 studentů

Bětka s Čajkou si chtěly zahrát Dobble, ale neměly hrací karty. Protože jsou tvořivé, rozhodly se karty vyrobit. Domluvily se, že na každé kartě budou nakresleny tři různé symboly a že celkem použijí 7 různých symbolů. Kolik různých karet mohou vytvořit? Ve hře Dobble mají každé dvě karty stejný právě jeden symbol. Kolik karet Bětce s Čajkou zůstane, aby bylo splněno toto pravidlo?

Celkový počet symbolů lze určit dvěma způsoby – buď si můžeme všechny možnosti vypsát, nebo můžeme použít tzv. kombinační číslo.

Pro snadné vypsání všech možných kombinací si jednotlivé symboly označíme přirozenými čísly 1 až 7. Nyní můžeme snadno zapsat všechny tříčlenné kombinace těchto čísel: 123, 124, 125, 126, 127, 134, 135, ... Při vypisování stačí uvažovat pouze všechny vzestupně uspořádané, neboť nezáleží, v jakém pořadí jsou symboly na kartě nakresleny. Jinými slovy, kombinace symbolů 123, 132, 213, 231, 312 a 321 jsou totožné. Tímto postupem zjistíme, že celkový možný počet karet je 35.

Druhým způsobem je použití tzv. kombinačního čísla, které představuje počet možností, jak z  $n$  různých prvků (v našem případě ze sedmi symbolů) vybrat  $k$  prvků (tři různé symboly). Kombinační číslo se značí

$$\binom{n}{k}$$

(čteme  $n$  nad  $k$ ) a v našem případě jej můžeme vyjádřit jako<sup>2</sup>

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Vykřičník zde čteme „faktoriál“. Jak předchozí výpočet napovídá, faktoriál nějakého přirozeného čísla je rovný součinu daného čísla a všech menších přirozených čísel.

Navíc víme, že oběma postupy jsme se dostali k témuž výsledku – Bětka s Čajkou mohou vytvořit celkem 35 karet.

Přidáním pravidla, že každé dvě karty musí mít právě jeden společný symbol, se počet možností sníží. Nejjednodušší způsob pro určení, kolik karet nám zůstane, je vybrat si ze seznamu všech možných kombinací karet jednu (označenou nejnižším číslem) a vyřadit všechny, které nesplňují požadovanou podmínku. Ze zbylých karet vybereme opět tu s nejnižším označením a takto pokračujeme dál. Postupujeme-li správně, na konci nám zůstane sedm různých karet označených 123, 145, 167, 246, 257, 347 a 356.

**Lukáš Fusek**

lukas@vyfuk.mff.cuni.cz

<sup>2</sup>Tento vzoreček lze nalézt v tabulkách.

**Úloha V.2 ... Zlatovláska**

5 bodů; průměr 3,56; řešilo 62 studentů

Terka si chystá na karneval kostým Zlatovlásky. Během příprav ji napadlo, že by si místo paruky nechala vlasy pozlatit – na každý vlas by nanesla 5  $\mu\text{m}$  tlustou vrstvu zlata. Kolik zlata by Terka potřebovala? Předpokládejte, že všech sto tisíc Terčinych vlasů má délku 0,5 m, průměr 60  $\mu\text{m}$  a tvar válce. Hustota zlata je 19 000  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Nejdříve je nutné zjistit, kolik zlata je potřeba na pokrytí jednoho vlasu. Jelikož známe hustotu zlata  $\rho$ , je hmotnost zlata na jednom vlasu  $m$  z rovnice pro hustotu

$$m = \rho V,$$

kde  $V$  je objem vrstvy zlata na jednom vlasu. Ten zjistíme odečtením objemu vlasu  $V_v$  od objemu vlasu pokrytého vrstvou zlata  $V'_v$ .

Objemy  $V_v$  a  $V'_v$  si vyjádříme pomocí vzorce pro výpočet objemu válce. Nesmíme ale zapomenout, že v zadání se nachází průměr vlasu  $d = 60 \mu\text{m}$  a ne jeho poloměr  $r = d/2$ :

$$V_v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l,$$

kde  $l = 0,5 \text{ m}$  je délka Terčinych vlasů.

Pro výpočet objemu pozlaceného vlasu  $V'_v$  musíme k poloměru přičíst i tloušťku pozlacení  $v = 5 \mu\text{m}$ . K délce vlasu  $l$  přičteme  $v$  jen jednou, protože vlasy vyrůstají pouze jedním svým koncem:

$$V'_v = \pi \left(\frac{d}{2} + v\right)^2 \cdot (l + v).$$

Pro objem zlata tak dostáváme

$$V = V'_v - V_v = \pi \left[ \left(\frac{d}{2} + v\right)^2 \cdot (l + v) - \left(\frac{d}{2}\right)^2 l \right].$$

Takto vyjádřený objem můžeme dosadit do rovnice pro hustotu. Jelikož má Terka na hlavě  $n = 100\,000$  vlasů, výsledná hmotnost zlata  $M$  bude  $n$ -násobek hmotnosti  $m$ . Dostáváme tak výsledný vztah

$$M = nm = n\rho V = n\rho\pi \left[ \left(\frac{d}{2} + v\right)^2 \cdot (l + v) - \left(\frac{d}{2}\right)^2 l \right].$$

Do tohoto vztahu nyní můžeme dosadit zadané hodnoty. Dosadíme-li všechny veličiny v základních jednotkách, zjistíme, že Terka bude potřebovat přibližně 0,97 kg zlata. Jen pro zajímavost, při dnešní ceně zlata asi 1 000 Kč $\cdot\text{g}^{-1}$ , by ji taková paráda vyšla na 970 000 Kč.

**Alžběta Andrášková**  
betka@vyfuk.mff.cuni.cz

**Úloha V.3 ... Běžecká**

5 bodů; průměr 4,34; řešilo 58 studentů

Kuba a Paťo jednou vymýšleli strategii pro štafetový běh, kterého se chtěli s Verčou zúčastnit. Běžecká dráha je dlouhá tři kilometry a štafetově ji poběží všichni tři, přičemž Paťo běží rychlostí 5  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ , Verča 10  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$  a Kuba 15  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Kuba navrhol, aby každý z běžců běžel stejně dlouho, zatímco Paťo zastával strategii, že každý poběží stejně dlouhý úsek. Podle které strategie doběhne tým do cíle za kratší čas?

Ze zadání víme, že dráha  $s$  štafetového běhu je stejná nezávisle na použité strategii. Tudíž potřebujeme zjistit, ve které z možností je čas proběhnutí této dráhy menší. Kubova teorie byla, že všichni (Pato, Verča, Kuba) poběží stejný časový úsek

$$t_P = t_V = t_K = \frac{t_1}{3},$$

kde  $t_1$  je jejich celkový čas. Dále si musíme uvědomit, že jednotlivé dráhy běžců

$$s_P = v_P t_P = v_P \frac{t_1}{3},$$

$$s_V = v_V t_V = v_V \frac{t_1}{3},$$

$$s_K = v_K t_K = v_K \frac{t_1}{3}$$

musí v součtu dát celkovou dráhu  $s$ . Dráhy tedy sečteme, vyjádříme si čas  $t_1$  a dosadíme hodnoty ze zadání:

$$s = s_P + s_V + s_K = (v_P + v_V + v_K) \frac{t_1}{3},$$

$$t_1 = \frac{3s}{v_P + v_V + v_K} = \frac{3 \cdot 3 \text{ km}}{5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} + 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} + 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = 0,3 \text{ h}.$$

Podle Kubovy strategie bude běžcům běh trvat  $t_1 = 0,3 \text{ h} = 20 \text{ min}$ .

Ted musíme zjistit, jestli čas závodu nebude v případě Patovy teorie menší. Pato navrhuje, aby všichni běžci běželi stejnou dráhu, tudíž

$$s_P = s_V = s_K = \frac{s}{3}.$$

Stejně jako u první teorie jsme si museli uvědomit, že součet drah je naše výsledná dráha, tak nyní si musíme uvědomit, že součet časů

$$t_P = \frac{s_P}{v_P} = \frac{s}{3v_P},$$

$$t_V = \frac{s_V}{v_V} = \frac{s}{3v_V},$$

$$t_K = \frac{s_K}{v_K} = \frac{s}{3v_K}$$

musí být výsledný čas  $t_2$ . Nyní tedy stačí časy sečíst a dosadit hodnoty ze zadání. Dostáváme

$$t_2 = \frac{s}{3} \left( \frac{1}{v_P} + \frac{1}{v_V} + \frac{1}{v_K} \right) = \frac{3 \text{ km}}{3} \left( \frac{1}{5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} + \frac{1}{10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} + \frac{1}{15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \right) = \frac{33}{30} \text{ h} = 22 \text{ min}.$$

Porovnáme-li časy  $t_1$  a  $t_2$ , vidíme, že platí  $t_1 < t_2$ , z čehož plyne, že Kubova strategie je pro běžce lepší.

*Petra Štefaníková*  
petras@vyfuk.mff.cuni.cz

**Úloha V.4 . . . Ekologická**

5 bodů; průměr 4,33; řešilo 48 studentů

David loni psal dlouhou školní práci. Jako velký ochranář přírody se ale neuměl rozhodnout, co je ekologičtější – napsat práci na počítači, nebo sepsat práci ručně. David zjistil, že:

- práce napsaná na počítači a vytištěná by měla 32 stran,
- Davidův počítač má příkon 75 W,
- elektrárna, která Davidovi dodává elektřinu, vyrobí spálením stejného množství dřeva jako je potřeba na výrobu 1 kg papíru 3 MJ elektrické energie,
- práce napsaná rukou by měla 48 stran,
- David má po ruce papír o rozměru A4 a standardní gramáži  $80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Pomozte Davidovi a vypočítejte, za jakou dobu musí David stihnout práci napsat na počítači, aby byla tato možnost stejně ekologická co se spotřeby papíru týče, jako samotné psaní na papír?

Začneme určením hmotnosti jednoho listu papiera. List formátu A4 má rozměry  $297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$ , teda jeho obsah je (podľa vzorca pre obsah obdĺžnika)  $S = 62\,370 \text{ mm}^2 = 0,062\,37 \text{ m}^2$ . Plošná hustota papiera<sup>3</sup> je zo zadania  $h = 80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$  – jednoduchým vynásobením tak získame hmotnosť jedného listu papiera

$$m = hS = 80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2} \cdot 0,062\,37 \text{ m}^2 \doteq 5 \text{ g}.$$

Po pozornom prečítaní zadania si uvedomíme, že rozdiel medzi oboma spôsobmi písania je v šesnástich listoch papiera a použitej elektrickej energii potrebnej na chod počítača. Zostáva teda vypočítať, akému množstvu elektrickej energie zodpovedá 16 strán papiera, ktoré vážia  $16 \cdot 5 \text{ g} \doteq 80 \text{ g} = 0,08 \text{ kg}$ .

Dôležitá informácia je, že 1 kg papiera z ekologického hľadiska odpovedá 3 MJ elektrickej energie. Pomocou trojčlenky (priamej úmery) vypočítame, koľko elektriny odpovedá 80 g papiera:

$$E = \frac{0,08 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} \cdot 3 \text{ MJ} = 0,24 \text{ MJ} = 240\,000 \text{ J}.$$

Nakoniec si stačí uvedomiť, že príkon počítača je definovaný ako energia  $E$  potrebná na jeho chod po dobu  $t$ , teda  $P = E/t$ . Z tohto vzťahu jednoducho vyjadríme čas a dosadíme:

$$t = \frac{E}{P} = \frac{240\,000 \text{ J}}{75 \text{ W}} = 3\,200 \text{ s} \doteq 53 \text{ min}.$$

David teda musí stihnúť napísať prácu na počítači za menej ako 53 min.

**Jaroslav Hofierka**

**Úloha V.5 . . . Ubrus**

9 bodů; průměr 4,48; řešilo 33 studentů

Nedílnou součástí všech velikých oslav je zábava, při které se účastníci snaží strhnout z prostřeného stolu ubrus tak, aby ze stolu nic nespadlo na zem. Podívejme se na tento trik zblízka.

Vycházet budeme z druhého Newtonova zákona, který lze zapsat jako  $F = ma$ . Zákon lze chápat dvojm způsobem:

- působí-li na těleso o hmotnosti  $m$  výsledná síla o velikosti  $F$ , těleso bude zrychlovat se zrychlením o velikosti  $a$  ve směru shodném se směrem působící síly,

<sup>3</sup>Tým myslíme hmotnosť  $1 \text{ m}^2$  papiera.

- zrychluje-li podložka zrychlením  $a$ , v soustavě spojené s podložkou působí na všechny předměty na podložce setrvačná síla o velikosti  $F$  ve směru opačném vůči směru zrychlení  $a$ .

Zde roli podložky bude hrát ubrus. Na něm je položen talíř o hmotnosti  $m = 300$  g. Koeficient tření<sup>4</sup> mezi talířem a ubrusem je roven  $f = 0,2$ .

- Adam zatáhl za ubrus tak, že se začal pohybovat se zrychlením  $a_1 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . K jeho překvapení se talíř začal pohybovat spolu s ubrusem. Nakreslete obrázek, do kterého šipkami zaznačíte síly, které na talíř působí. Vypočítejte výslednou sílu, která působila na talíř v soustavě spojené s ubrusem.
- Vypočítejte, jaké musí být nejmenší zrychlení  $a_2$ , aby setrvačná síla překonala sílu tření, a talíř se vzhledem k ubrusu začal pohybovat.
- Borek proto zatáhl za ubrus tak, že zrychloval se zrychlením  $3a_2$ . Určete velikost a směr zrychlení  $a_3$  talíře v soustavě spojené s ubrusem.
- I když Borek za ubrus zatáhl dostatečnou silou, talíř se začal pohybovat i vůči stolu. Vypočítejte velikost a směr tohoto zrychlení  $a'_3$ .
- Pokud jste správně počítali, zrychlení  $a'_3$  vyšlo nezávislé na zrychlení  $a_2$ . To by ale mělo znamenat, že k úspěšnému strhnutí ubrusu stačí překonat zrychlení  $a_2$ . Proč je ale lepší ubrus strhávat co největší silou (s největším zrychlením)?

- Čtěme pozorně zadání: talíř se při zatáhnutí začal pohybovat spolu s ubrusem. To znamená, že v soustavě spojené s ubrusem<sup>5</sup> se talíř *nepohybuje*. Z druhého Newtonova zákona tedy plyne, že výsledná síla působící na talíř bude v této soustavě *nulová*.

To ovšem neznamená, že na talíř nebude působit žádná síla. Podložka (ubrus) pod talířem zrychluje, proto na talíř působí setrvačná síla, a to ve směru opačném, než je směr zrychlení ubrusu. Velikost této síly je  $F_s = ma_1 = 0,3 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 0,3 \text{ N}$ .

Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že na talíř bude působit ještě jedna síla, která bude působení setrvačné síly vyrovnávat. Jelikož setrvačná síla se pokouší talířem pohnout, proti této snaze bude vystupovat síla tření. Její velikost ale nebude rovna  $mgf$ , jak jsme zvyklí! Neobvyklou vlastností tření je jeho snaha pouze vyrovnávat působení jiných sil na těleso tak, aby bránila jeho pohybu. Hodnota  $mgf$  udává pouze *maximální* velikost třecí síly:

$$F_{\text{tm}} = mgf = 0,3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 0,6 \text{ N}.$$

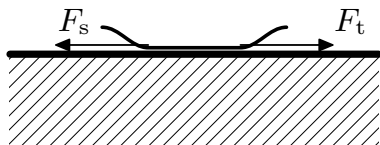
Vidíme, že tato síla je, jak jsme očekávali, větší než síla  $F_s$ . Skutečná velikost třecí síly tedy bude  $F_t = F_s = 0,3 \text{ N}$  a její směr bude shodný se směrem zrychlení ubrusu, viz obrázek 1.

- Bude-li zrychlení  $a_2$  takové, že setrvačná síla  $F_{\text{sm}} = ma_2$  bude mít stejnou velikost jako  $F_{\text{tm}}$ , při sebemenším zvýšení hodnoty zrychlení nebude výsledná síla působící na talíř nulová, jak tomu bývalo doposud. Naopak, nenulová výsledná síla způsobí, že se talíř (podle druhého Newtonova zákona) začne vůči ubrusu pohybovat. Pro hledané zrychlení  $a_2$  tedy platí

$$ma_2 = F_{\text{tm}} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{F_{\text{tm}}}{m} = \frac{mgf}{m} = gf = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

<sup>4</sup>Myslíme tím statický i dynamický koeficient tření.

<sup>5</sup>Představme si, že vedle talíře k ubrusu přilepíme malou kameru a na situaci se budeme dívat prostřednictvím jejího obrazu.



Obr. 1: Obrázek sil působících na talíř v soustavě spojené s ubrusem. Na talíř navíc působí tíhová síla a reakční síla podložky, ty se ale navzájem vyruší, a proto je pro jednoduchost nezakreslujeme.

- (c) Poněvadž Borkem udělené zrychlení  $3a_2$  je bezpečně větší než mezní zrychlení  $a_2$ , talíř se bude jistě vůči ubrusu pohybovat. Je proto jednoduché určit velikosti obou sil (setrvačné a třecí), které na talíř působí v soustavě spojené s ubrusem. Setrvačná síla má velikost  $F_B = 3ma_2 = 3 \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,8 \text{ N}$ , třecí síla je maximální, tzn. má velikost  $F_{tm} = 0,6 \text{ N}$ . Jelikož síly působí proti sobě, velikost výsledné síly je rovna rozdílu

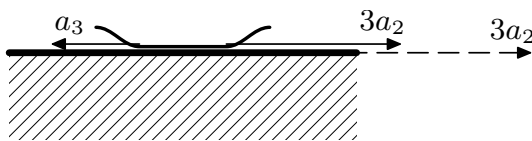
$$F_3 = F_B - F_{tm} = 3ma_2 - m g f = 3 \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 0,3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 = 1,2 \text{ N}.$$

Nakonec, pro zrychlení talíře plyne z Newtonova zákona

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{1,2 \text{ N}}{0,3 \text{ kg}} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zrychlení talíře vůči ubrusu má tedy velikost  $a_3 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a jeho směr je stejný jako směr setrvačné síly, tzn. proti směru tahání ubrusu.

- (d) Soustava spojená se stolem (kameru si nyní představujeme přilepenou na stůl) „vidí“ soustavu spojenou s ubrusem tak, že zrychluje se zrychlením  $3a_2$  ve směru tahání ubrusu. To kupříkladu znamená, že při přechodu do této soustavy musíme *všem* objektům toto zrychlení *ve správném směru* započítat. Pro náš talíř, který doposud zrychloval proti směru tahání ubrusu, musíme toto zrychlení odečíst, neboť jeho směr je opačný ke směru zrychlení  $a_3$ . Zjednodušeně řečeno, pro zrychlení  $a'_3$  platí  $a'_3 = a_3 - 3a_2$ .



Obr. 2: Skládání zrychlení talíře v soustavě spojené se stolem.

Před tím, než hledané zrychlení vyčíslíme, si ve vztahu pro  $a_3$  rozepíšeme sílu  $F_3$ :

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{3ma_2 - m g f}{m} = 3a_2 - g f.$$

Platí tedy

$$a'_3 = a_3 - 3a_2 = 3a_2 - g f - 3a_2 = -g f = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Vyšlo nám tedy, že zrychlení talíře vzhledem ke stolu je závislé pouze na koeficientu tření a na tíhovém zrychlení. Záporné znaménko nám pouze oznamuje, že původní směr zrychlení (proti směru tahání ubrusu) se změnil. Talíř bude tedy zrychlovat ve stejném směru, jako je směr tahání ubrusu.

- (e) Odpověď na poslední část úlohy se skrývá v textu výše. Vyšlo nám, že talíř, který se po strhávání ubrusu klouže, vůči stolu zrychluje. A dovedete si představit, že talíř, který na stole zrychluje, je poněkud nebezpečný. Čím déle bude totiž talíř na ubrusu zrychlovat, tím větší rychlosti nabude a riziko, že talíř spadne ze stolu, roste.

Jelikož zrychlení talíře *nezávisí* na zrychlení ubrusu, nejmenší rychlosti nabude talíř tehdy, když bude na ubrusu klouzat po co nejkratší čas. To ale docílíme tím, že ubrusu udělíme větší zrychlení. Proto je k úspěšnému provedení této zábavy vhodné použít co největší síly, tzn. udělit ubrusu co největší zrychlení.

Pokud našim poněkud překvapivým výsledkům nevěříte, klidně si je ověřte experimentálně. Důrazně ale doporučujeme místo talířů použít nerozbitné předměty, například knížku.

*Patrik Švančara*

pato@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha V.E ... Sešity

7 bodů; průměr 4,87; řešilo 30 studentů

*Pořďte si dva 40-stranové sešity A4, klidně i popsané. Pak sešity spojte tím, že budete prokládat jednotlivé stránky. Poté změřte, jakou silou musíte na jeden ze sešitů působit, abyste je od sebe odtrhli. Měření zopakujte pětkrát pro alespoň pět různých počtů proložených stránek.*

*Poté nakreslete graf závislosti použité síly na počtu proložených stránek a z grafu odhadněte, jaká síla je zapotřebí na odtrhnutí úplně proložených sešitů.*

*Způsob, jak sílu působící na sešit změřit, necháváme na vaší fantazii. V řešení se ale o něj nezapomeňte podělit!*

## Teorie

Úloha není z teoretického hlediska jednoduše popsatelná. Zvláště těžké je dopředu odhadnout, jaká síla bude potřeba na oddělení sešitů. Jistě ale víme, že při jejich oddělování je třeba překonat třecí sílu. Touto silou v našem případě není jen síla, kterou se dva povrchy volně třou o sebe. Do výsledné třecí síly velkou mírou přispívá i síla pocházející od vazby sešitu, která tlačí listy k sobě.

Zjistit, jaká bude síla vazby, už není tak jednoduché. Platí, že čím větší počet listů se v sešitech proloží, tím větší silou vazba působí na listy. Je-li proložených stránek málo, listy sešitů jsou na jeho vazbu téměř kolmé a tudíž síla, kterou vazba přispívá do třecí síly, je malá. Překonat tedy musíme prakticky jen třecí sílu mezi listy.

Když je proložených listů více, úhel, který list svírá s vazbou, už není pravý a tažná síla, kterou sešity od sebe oddělujeme, nepůsobí přímo proti třecí síle. Navíc, čím více listů je proložených, tím větší je vzájemná třecí síla mezi listy, kterou musíme překonat.

Vliv vazby bychom odstranili, pokud bychom použili například sešity s kroužkovou vazbou. Dalším faktorem, který ovlivňuje výslednou velikost síly, je také to, jak moc jsme listy obou sešitů do sebe zastrčili.

Po tomto zamyšlení tak můžeme předpokládat, že už i s malým zvýšením počtu stránek se síla potřebná na jejich oddělení velmi zvýší.

## Postup práce

Způsobů, jak měření zpracovat, je opravdu hodně. Nejvíce přesné by samozřejmě bylo měřit nějakým elektronickým siloměrem. My si ale dokážeme poradit i s domácími alternativami.

K měření jsme použili dva 40-stránkové sešity, které jsme uprostřed obvázáni provázkem. Jeden sešit jsme položili na stůl a provázkem ho upevnili tak, aby se na stole nepohyboval. Oba sešity jsme umístili tak, aby vazba sešitu, za který se tahá, byla asi 2 cm od okraje stolu (abychom co nejméně zamezili tření o stůl). Na druhý sešit jsme na konec provázku přivázali plastovou lahev, do které jsme vždy přilávali vodu, dokud se sešit nepohnul.

Množství vody v lahvi bylo vždy změřeno odměrným válcem. Změřili jsme celkem sedm různých hodnot počtů stránek, z nichž každou jsme třikrát ověřovali.

## Naměřené hodnoty

Hodnoty, které jsme naměřili můžete vidět v tabulce 1. Gramy je poté třeba převést na newtony ( $1 \text{ N} = 100 \text{ g}$ ). Průměry naměřených hodnot jsme zanesli do grafu a proložili je exponenciální křivkou, která nejlépe odpovídala naměřené závislosti. Teoretické zdůvodnění, proč je růst síly exponenciální, vychází ze složitějšího výpočtu, při kterém je třeba vzít v potaz právě úhel, které list svírá s vazbou.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

počet stránek	hmotnost vody potřebná k roztržení/g		
1	60	70	50
3	130	155	140
5	170	200	190
7	390	420	380
8	460	500	475
10	675	680	725
12	1230	1300	1310

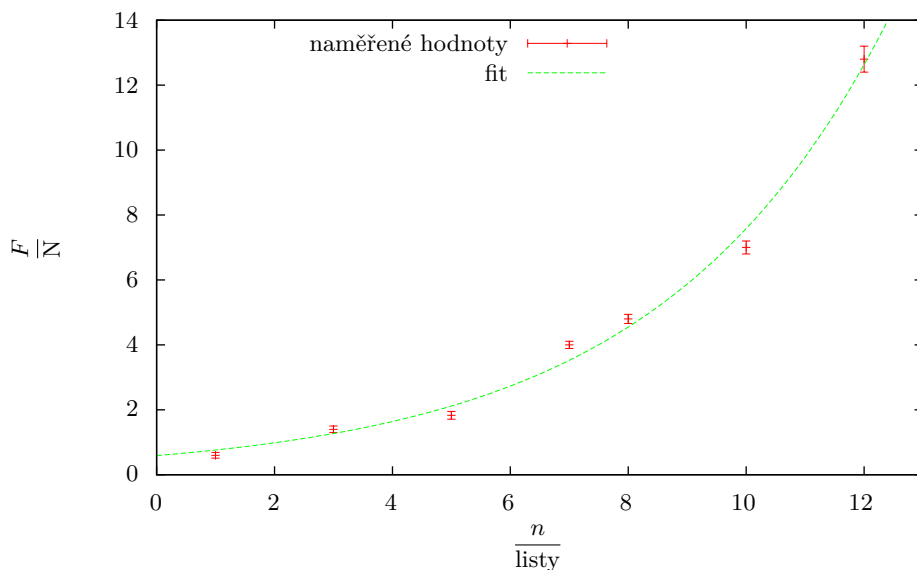
## Chyby měření

V průběhu měření jsme se potýkali se spoustami obtíží. Pokusíme se všechny z nich zmínit.

Pokud jste použili stejnou nebo podobnou metodu, tak jste si určitě všimli, že čím rychleji jste vodu do lahve lili, tím menší sílu potřebnou k odtrhnutí sešitů jste změřili. Tekoucí voda má totiž nějakou rychlost a v lahvi se zastavuje. Tím na lahev působí dodatečnou sílu. Tento problém jsme se snažili vyřešit tím, že jsme nechali vodu stékat po stěnách.

Přibližně od sedmi proložených listů jsme zjistili, že je třeba přidržovat vazbu sešitu, který stabilně ležel na stole, protože oba dva sešity měly spíše tendenci celé spadnout, než se rozdělit. Sešit na stole jsme samozřejmě přidržovali z boku, protože kdybychom tlačili kolmo na vazbu, tak bychom pouze zvyšovali onu sílu vazby a sešity by se nemusely vůbec oddělit.

Jedním ze zásadních problémů, na který jste si snad všichni dali pozor, bylo to, že oba dva sešity bylo vždy nutné do sebe stejně zasunout. Pokud jsme jednou zasunuli sešit 1 cm od vazby



Obr. 3: Graf závislosti síly potřebné k oddělení sešitů na počtu listů

a podruhé 1,5 cm, tak to výrazně změnilo sílu potřebnou k oddělení sešitů a pokus bylo třeba zopakovat znovu.

Chyby se samozřejmě objevily při měření množství vody, protože v lahvi vždycky nějaký zbytek vody zůstal.

## Závěr

Změřili jsme závislost síly potřebné na oddělení sešitů na počtu listů, kterými jsou spojeny. Závislost můžeme vidět v grafu na obrázku 3. Jak jsme předpokládali, naměřená závislost je exponenciální.

Pokud jste graf zpracovávali například v Excelu, tak při přidávání spojnice trendu jste mohli zaškrtnout, že chcete zobrazit i rovnici regrese, která popisuje danou funkci. Pokud za  $x$  v této rovnici dosadíte maximální počet listů (tedy 40), tak se dozvíte sílu, která je teoreticky potřebná k roztržení sešitů. Nám vyšlo, že celková síla k roztržení sešitů je přibližně 11,5 kN, což odpovídá tíhové síle 1,15 t vody. A to je na pár stránek papíru opravdu hodně. V reálném případě by k oddělení sešitů vůbec nedošlo, protože mez pevnosti v tahu papíru velikost A4 je rozhodně menší než 11,5 kN. Sešity by se tedy dříve roztrhly než oddělily.

*Kateřina Stodolová*  
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha V.C ... Vzdálená

7 bodů; průměr 4,44; řešilo 39 studentů

- (a) Marťanský rover Curiosity je jedna z pojízdnych laboratoří, které i teď brázdí povrch Marsu a zkoumají tuto zvláštní planetu. Vypočítejte nejkratší čas, za který signál vyslaný vozítkem dorazí na Zem. Uvažte, že signál se šíří rychlostí světla, Země i Mars obíhají kolem Slunce po téměř kruhových drahách s poloměry  $a_Z = 1 \text{ AU}$  a  $a_M = 1,5 \text{ AU}$ .
- (b) Ondra jednou pozoroval svojí oblíbenou cefeidu a měřil, jak se mění její zdánlivá hvězdná velikost  $m$  v čase  $t$ , viz tabulku. Pomozte Ondrovi a z naměřených dat zjistěte periodu jeho cefeidy a průměrnou zdánlivou hvězdnou velikost (průměrujte pouze v rámci jedné periody). S pomocí textu Výfučtení pak spočítejte její absolutní hvězdnou velikost a konečně i její vzdálenost od Země.

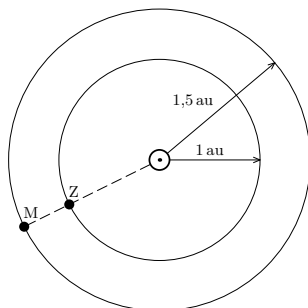
Tabulka 2: Časová závislost zdánlivé hvězdné velikosti Ondrovy cefeidy

$t/d$	0	1	1,5	2	3	4	5	6
$m$	4,12	4,28	4,3	4,2	3,55	3,8	4	4,2
$t/d$	7	8	9	10	11	12	13	
$m$	4,3	3,95	3,55	3,85	4,1	4,28	4,3	

- (a) Jelikož se signál pohybuje konstantní rychlostí, nejkratší doba odpovídá nejmenší vzdálenosti obou planet. Trajektorie Země a Marsu jsou podle zadání soustředné kružnice o poloměrech  $a_Z$  a  $a_M$  se středem ve Slunci. Jak nejbližší, tak i vůči sobě nejvzdálenější polohy těchto planet leží na přímce procházející jejich středem. Nejkratší vzdálenost je tedy právě rozdíl poloměrů trajektorií, tzn.

$$a = a_M - a_Z = 1,5 \text{ au} - 1 \text{ au} = 0,5 \text{ au} \doteq 7,5 \cdot 10^{10} \text{ m}.$$

V posledním kroku jsme využili převodový vztah z Výfučtení.

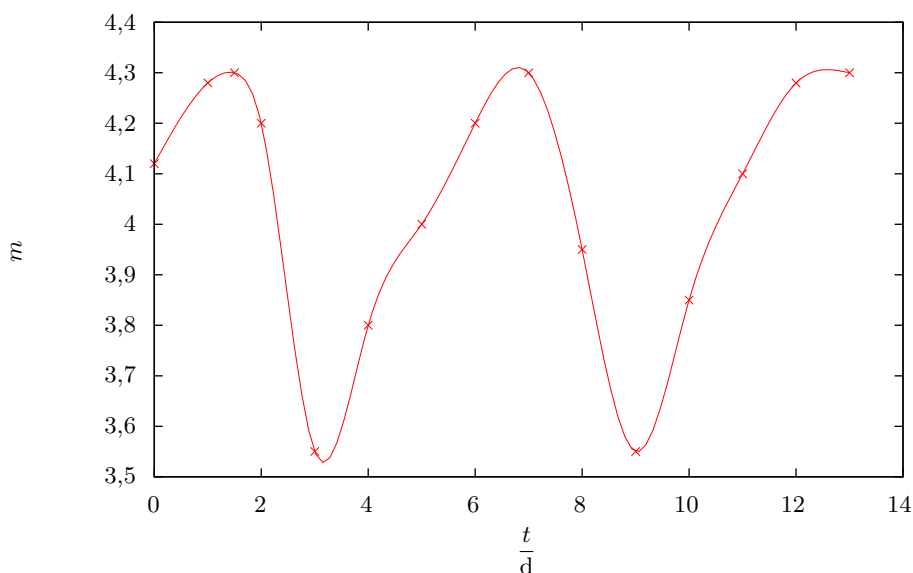


Obr. 4: Hledaná vzájemná poloha Země (Z) a Marsu (M)

Rychlost pohybu planet můžeme vůči rychlosti signálu i na těchto meziplanetárních vzdálenostech zanedbat a tedy čas, za který se dostane signál z jedné planety na druhou, je jednoduše  $t = a/c$ , kde  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  je rychlost světla:

$$t = \frac{a}{c} = \frac{7,5 \cdot 10^{10} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 250 \text{ s} = 4 \text{ min } 10 \text{ s}.$$

- (b) Periodu změn hvězdné velikosti Ondrovy cefeidy lze jednoduše vyčíst z naměřených dat. Jednou z možností je najít dvě po sobě následující maxima a příslušné časy od sebe odečíst. Maximum prvně nastává v čase  $t_1 = 1,5 \text{ d}$ , dále v čase  $t_2 = 7 \text{ d}$  a nakonec i v čase  $t_3 = 13 \text{ d}$ . Dostáváme tak dvě různé periody  $P_1 = t_2 - t_1 = 5,5 \text{ d}$  a  $P_2 = t_3 - t_2 = 6 \text{ d}$ . Opravdová perioda se bude pravděpodobně nacházet mezi  $P_1$  a  $P_2$ , proto v dalších výpočtech budeme uvažovat zprůměrovanou periodu  $P \approx 5,75 \text{ d}$ .



Obr. 5: Graf časové závislosti zdánlivé hvězdné velikosti Ondrovy Cefeidy

Pomocí vztahu z Výfučení lze z periody určit absolutní hvězdnou velikost Ondrovy cefeidy  $M$ :

$$M_C = -2,78 \log(P) - 1,35 \doteq -3,5.$$

Střední hodnotu zdánlivé hvězdné velikosti vypočítáme jako průměr všech (rovnoměrně rozmístěných) měření v rámci jedné periody. Zprůměrováním hodnot mezi časy 7 d a 12 d (včetně) dostáváme střední hodnotu  $m \doteq 4,01$ .

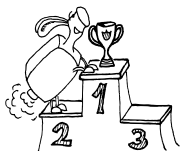
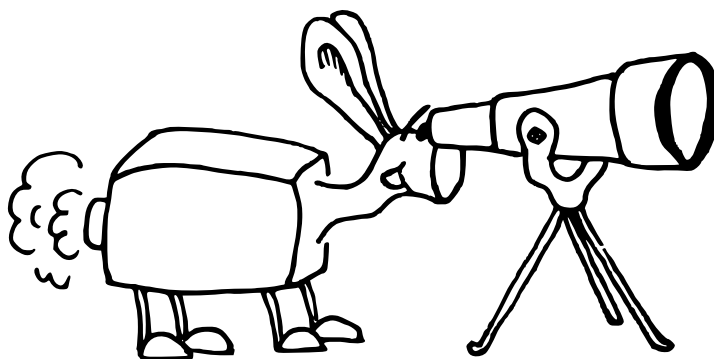
Ze zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti teď můžeme určit přibližnou vzdálenost cefeidy  $d$ , opět pomocí vztahu z Výfučení:

$$d = 10 \text{ pc} \cdot 10^{(m - M_C)/5} = 10 \text{ pc} \cdot 10^{(4,01 + 3,5)/5} \doteq 318 \text{ pc}.$$

Vůči velikosti naší galaxie je taková vzdálenost poměrně malá. Můžeme tedy usoudit, že cefeida se nachází v naší galaxii a je nám navíc docela blízka.

*Ondřej Knopp*

Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz



### Pořadí řešitelů po V. sérii

#### Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	V	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	5	5	9	7	7	<b>43</b>	<b>213</b>
1. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	5	5	4	5	1	-	3	<b>23</b>	<b>132</b>
2. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	-	4	4	5	-	7	-	<b>20</b>	<b>120</b>
3. <i>Patrik Rosenberg</i>	ZŠ Tuháčkova, Brno	1	3	5	2	-	2	2	<b>15</b>	<b>97</b>
4. <i>Pavel Šimůnek</i>	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	3	-	-	-	-	-	-	<b>3</b>	<b>29</b>
5. <i>Matyáš Jurica</i>	ZŠ Valašská Polanka	5	3	-	-	-	-	-	<b>8</b>	<b>12</b>
6. <i>Sára Božoňová</i>	ZŠ, Dělnická, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>3</b>

## Kategorie sedmých ročníků

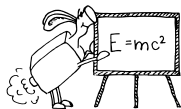
<b>jméno</b>	<b>škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>E</b>	<b>C</b>	<b>V</b>	<b>Σ</b>
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK							
<b>1.</b> <i>Michal Beránek</i>	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	5	5	5	5	8	7	6	<b>41</b>	<b>200</b>
<b>2.</b> <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	5	3	4	5	5	4	6	<b>32</b>	<b>178</b>
<b>3.</b> <i>Kryštof Pravda</i>	G Mensa, Praha	4	5	5	5	–	–	3	<b>22</b>	<b>143</b>
<b>4.</b> <i>Ondřej Valášek</i>	ZŠ V. Kl. Klicpery, Nový Bydžov	2	3	5	3	1	5	3	<b>22</b>	<b>132</b>
<b>5.</b> <i>Ester Galiová</i>	ZŠ a MŠ Středokluky	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>127</b>
<b>6.</b> <i>Radomír Mielec</i>	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	–	–	4	–	–	–	3	<b>7</b>	<b>106</b>
<b>7.</b> <i>Filip Temiak</i>	G, Český Krumlov	1	4	4	5	0	2	–	<b>16</b>	<b>89</b>
<b>8.</b> <i>Tomáš Kudrnáč</i>	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	–	3	3	5	–	–	–	<b>11</b>	<b>88</b>
<b>9.</b> <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	–	3	–	–	–	–	–	<b>3</b>	<b>80</b>
<b>10.</b> <i>Natálie Křivancová</i>	G, Český Krumlov	2	3	5	3	–	–	–	<b>13</b>	<b>79</b>
<b>11.</b> <i>Tomáš Kavena</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>50</b>
<b>12.</b> <i>Vojtěch Vincibr</i>	První české G, Karlovy Vary	0	3	4	2	3	–	3	<b>15</b>	<b>49</b>
<b>13.–14.</b> <i>Jan Hyžák</i>	ZŠ Valašská Polanka	2	3	5	–	–	–	–	<b>10</b>	<b>48</b>
<b>13.–14.</b> <i>Martin Kolovratník</i>	ZŠ Pardubice - Studánka	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>48</b>
<b>15.</b> <i>Adam Korběl</i>	ZŠ J. A. Komenského Blatná	3	3	3	4	–	–	–	<b>13</b>	<b>46</b>
<b>16.</b> <i>David Kocian</i>	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>38</b>
<b>17.</b> <i>Luboš Petráň</i>	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>32</b>
<b>18.</b> <i>Robert Jaworski</i>	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>28</b>
<b>19.</b> <i>Tomáš Trtík</i>	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>27</b>
<b>20.</b> <i>Honza Bartoš</i>	První české G, Karlovy Vary	2	3	–	–	–	–	–	<b>5</b>	<b>26</b>
<b>21.–22.</b> <i>Miroslav Kotsyba</i>	ZŠ a MŠ Helsinská, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>19</b>
<b>21.–22.</b> <i>Filip Matuš</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>19</b>
<b>23.</b> <i>Isabela Andreevská</i>	Spec. soukromé G Integra, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>18</b>
<b>24.</b> <i>Barbora Vosková</i>	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>16</b>
<b>25.</b> <i>Rostislav Jeřábek</i>	ZŠ Valašská Polanka	4	4	–	–	–	–	–	<b>8</b>	<b>15</b>
<b>26.–27.</b> <i>Jakub Dorníák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>14</b>
<b>26.–27.</b> <i>Alexandra Rosenbergová</i>	ZŠ Tuháčkova, Brno	1	2	4	3	–	3	1	<b>14</b>	<b>14</b>
<b>28.</b> <i>Marie Vondrášková</i>	ZŠ Strýčice, Hluboká nad Vltavou	1	–	–	–	–	–	–	<b>1</b>	<b>13</b>
<b>29.–30.</b> <i>Jakub Hembera</i>	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>12</b>
<b>29.–30.</b> <i>Anežka Zobačová</i>	ZŠ Vratislavovo nám., NMnM	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>12</b>
<b>31.</b> <i>Emma Kodyšová</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>11</b>
<b>32.</b> <i>Monika Bambuchová</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>8</b>
<b>33.</b> <i>Jakub Tománek</i>	ZŠ Hošťálková	–	–	–	–	–	–	–	–	<b>1</b>

## Kategorie osmých ročníků

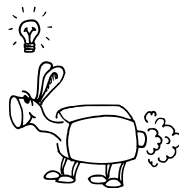
jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	V	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK							
		5	5	5	9	7	7		38	188
1. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	4	5	5	8	5	7	34	181
2. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	-	5	5	5	7	7	6	35	176
3. <i>Lubor Čech</i>	G, Mikulov	-	4	5	5	7	5	6	32	161
4. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	-	4	5	5	6	7	7	34	159
5. <i>Michal Grus</i>	G Dobruška	-	3	2	5	5	5	3	23	140
6. <i>Vladimír Chudý</i>	ZŠ Ronov nad Doubravou	-	3	5	5	0	-	3	16	127
7. <i>Jiří Zikmund</i>	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	-	3	5	5	2	4	4	23	126
8. <i>Julie Rubášová</i>	Biskupské G, Brno	-	3	4	4	4	4	3	22	119
9. <i>Filip Řeháček</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	3	5	3	-	6	2	19	107
10. <i>Karolína Letochová</i>	G Šternberk	-	3	5	3	4	7	3	25	103
11. <i>Vojtěch Kuchař</i>	ZŠ Sobotka	-	4	5	5	-	6	6	26	99
12. <i>Filip Holoubek</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	-	3	3	5	3	-	5	19	96
13. <i>Tereza Boubertlová</i>	Biskupské G, České Budějovice	-	3	5	5	3	-	6	22	83
14. <i>Jan Raja</i>	G, Nymburk	-	4	5	5	0	3	-	17	80
15. <i>Ondřej Polanecký</i>	1. ZŠ TGM Milevsko	-	3	2	5	7	-	-	17	76
16. <i>Lucie Urbanová</i>	G Chotěboř	-	4	5	3	-	-	3	15	74
17. <i>Jiří Szotkowski</i>	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	-	5	5	-	-	-	-	10	72
18. <i>Eliška Novotná</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	-	3	5	5	3	-	3	19	61
19. <i>Radim Šafář</i>	G J. Blahoslava, Ivančice	-	-	-	-	-	-	-	-	48
20. <i>Bartoloměj Pecháček</i>	Církevní G, Plzeň	-	4	4	-	-	3	-	11	37
21. <i>Marek Novák</i>	G, Písek	-	-	-	-	-	-	-	-	31
22. <i>Andriy Volvach</i>	ZŠ Na Smetance, Praha 2	-	-	-	-	-	-	-	-	30
23.-24. <i>Ondřej Man</i>	ZŠ T. G. Masaryka Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	29
23.-24. <i>Jiří Zinecker</i>	G Komenského, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	-	29
25. <i>Jan Antonín Musil</i>	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	28
26. <i>Eliška Švecová</i>	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	26
27. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	25
28. <i>Lada Vestfálová</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	23
29. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	20
30.-31. <i>Petr Budai</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	16
30.-31. <i>Jan Zemek</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	4	-	-	-	-	-	4	16
32.-34. <i>Jakub Salaj</i>	G Uničov	-	-	-	-	-	-	-	-	15
32.-34. <i>Filip Trhlík</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	15
32.-34. <i>Eva Vondráková</i>	G Chotěboř	-	4	5	3	-	-	3	15	15
35. <i>Anna Sovová</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	14
36. <i>Martin Bencko</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	-	1	1	1	-	0	2	5	12
37. <i>Adam Závora</i>	15. základní škola Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	8
38. <i>Pavel Malík</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	-	-	-	-	-	-	-	7
39.-40. <i>Šimon Kovalčík</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	-	-	-	-	-	-	-	5
39.-40. <i>Jan Zindr</i>	ZŠ Poštovní, Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-	5
41. <i>David Zatloukal</i>	ZŠ Stupkova, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	4

## Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	V	Σ
			5	5	5	9	7	7		38	188
1.	<i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	4	5	5	8	7	6	35	183
2.	<i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	-	4	5	5	9	7	7	37	181
3.	<i>Šimon Brázda</i>	ZŠ a MŠ Kameničky	-	4	5	5	8	4	7	33	167
4.	<i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	4	5	5	9	7	5	35	163
5.	<i>Viktor Vařeka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	4	5	5	4	5	5	28	154
6.-7.	<i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	-	4	4	5	5	5	6	29	138
6.-7.	<i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	-	4	4	2	8	4	6	28	138
8.	<i>Rudolf Líbal</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	5	4	5	6	6	4	30	137
9.	<i>Aneta Pouková</i>	ZŠ Horní Černná	-	3	5	5	2	-	4	19	126
10.	<i>Adam Vavrečka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	117
11.	<i>Pavla Rudolfová</i>	ZŠ Komenského náměstí, Slavkov u	-	4	5	5	1	5	-	20	115
12.	<i>Ondřej Macháč</i>	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	-	-	-	-	-	-	-	-	110
13.	<i>Jindřich Hátle</i>	ZŠ Amálská, Kladno	-	4	5	3	-	4	-	16	105
14.	<i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	87
15.-16.	<i>Martin Bína</i>	G, Moravská Třebová	-	-	-	-	-	-	-	-	85
15.-16.	<i>Miroslav Jarý</i>	ZŠ Velké Poříčí	-	4	5	-	-	-	5	14	85
17.	<i>Jaroslav Scheinpflug</i>	ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Bud	-	4	5	5	-	-	-	14	83
18.	<i>Julie Weisová</i>	ZŠ Židlochovice	-	4	3	-	2	-	4	13	82
19.	<i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	-	3	4	5	-	-	-	12	70
20.	<i>Václav Pavlíček</i>	ZŠ a MŠ Ždírec nad Doubravou	-	3	3	-	-	-	-	6	66
21.-22.	<i>Petr Doubravský</i>	ZŠ a MŠ J. A. Komenského Nové St	-	3	3	5	4	-	6	21	59
21.-22.	<i>Michal Suk</i>	ZŠ Svisle, Přerov, Přerov I - Mě	-	4	4	4	-	-	-	12	59
23.	<i>Karel Šebela</i>	Katolické gymnázium Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	56
24.	<i>Adam Nekoňný</i>	G, Písnická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	39
25.	<i>Jana Sládková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	35
26.	<i>Mária Volmanová</i>	ZŠ Kollárova, Jihlava	-	4	4	5	-	-	-	13	33
27.-30.	<i>Jakub Bartoš</i>	G, Písnická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	30
27.-30.	<i>Martin Flidr</i>	G Masarykovo nám., Kroměříž	-	-	-	-	-	-	-	-	30
27.-30.	<i>Tomáš Salavec</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	-	30
27.-30.	<i>Milan Tichavský</i>	ZŠ Hradec nad Moravicí	-	3	5	-	5	-	6	19	30
31.	<i>Lenka Tomanová</i>	ZŠ Měřín	-	-	-	-	-	-	-	-	27
32.	<i>Jindřich Dítě</i>	ZŠ Komenského, Žďár nad Sázavou	-	3	5	-	-	-	-	8	26
33.	<i>Jan Macek</i>	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	24
34.	<i>Roman Varfolomieiev</i>	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10	-	-	-	-	-	-	-	-	19
35.	<i>Dita Chabičovská</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	-	3	4	-	-	-	-	7	18
36.	<i>Vojtěch Ježek</i>	G Legionářů, Příbram	-	-	-	-	-	-	-	-	17
37.-38.	<i>Victoria Grundlerová</i>	ZŠ jazyků Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-	16
37.-38.	<i>Jiří Hocek</i>	ZŠ Veronské náměstí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	16
39.-40.	<i>Eva Horalíková-Polášková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	15
39.-40.	<i>Alena Osvaldová</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	-	-	-	-	-	-	-	-	15
41.	<i>Alice Janáčková</i>	G Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-	-	13
42.-43.	<i>Štěpán Chrástský</i>	Biskupské G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	12
42.-43.	<i>Lucie Kuncárová</i>	G Volgogradská, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	12
44.	<i>Adam Kolomazník</i>	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	-	-	-	-	-	-	-	-	10
45.	<i>Eva Jurčecová</i>	ZŠ sv. Voršily Praha 1	-	-	-	-	-	-	-	-	9
46.	<i>Lucka Hosová</i>	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	8
47.	<i>Klára Šenkeříková</i>	ZŠ a MŠ Nedašov	-	-	-	-	-	-	-	-	7
48.	<i>Petr Čerych</i>	ZŠ Sobotka	-	-	-	-	-	-	-	-	4
49.	<i>Jakub Ucháč</i>	ZŠ Vrané n. Vltavou	-	-	-	-	-	-	-	-	3



## Řešení VI. série



## Úloha VI.1 ... Narozeniny

4 body; průměr 3,83; řešilo 23 studentů

Kačka dostala k narozeninám přesně 8 192 bonbonů. Poněvadž takové množství bonbonů by sama nesnědla, rozhodla se každý den (dnem svých narozenin počínaje) rozdat polovinu bonbonů, které měla v daný den k dispozici. Ke Kaččině překvapení jí ale bonbony začaly rychle ubývat, až jednoho rána zjistila, že jí zůstal poslední bonbon, který snědla sama. Kolik dnů od Kaččiných narozenin do toho dne uběhlo?

K úloze můžeme určitě přistoupit tak, že budeme číslo 8 192 dělit dvěma, dokud nedosáhneme jedničky, tj. posledního bonbónu. Nebo obráceně lze začít u posledního bonbónu a počítat, kolik jich bylo den předtím, tj. násobit vždy aktuální počet dvěma, až se dostaneme na původní číslo. V obou případech pak počet dvojek (tj. kolikrát musíme násobit) odpovídá počtu dní do posledního bonbónu. Určitě vám také vyšlo, že správná odpověď je 13 dní :-).

Úloha má samozřejmě i „matematictější“ řešení, pokud vás napadlo využít logaritmus<sup>6</sup>, jste na správné cestě. Problém oprostíme od jeho reálného významu, tedy zapíšeme čistě matematicky:

$$8\,192 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1,$$

kde  $x$  je hledaný počet dní. Jedná se o tzv. exponenciální rovnici, která se zpravidla řeší právě pomocí logaritmu. Nejprve si však rovnici upravíme:

$$8\,192 = 2^x.$$

Odtud snadno vidíme, že hledané  $x$  je (třeba zadáním do kalkulačky nebo nahlédnutím do logaritmičkových tabulek)

$$x = \log_2(8\,192) = 13.$$

Vskutku nám tedy vyšlo, že od Kaččiných narozenin uplynulo právě 13 dní.

Tereza Uhlířová

teri@vyfuk.mff.cuni.cz

Lukáš Fusek

lukas@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha VI.2 ... Kofola

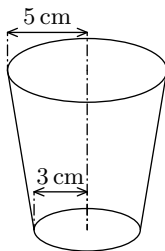
5 bodů; průměr 4,15; řešilo 52 studentů

Tom má rád Kofolu pouze tehdy, když ji má ve sklenici přesně  $\pi$  dl, proto ji pije jen ze své speciální sklenice. Ta má tvar komolého (seříznutého) kužele, viz obrázek. Jakou výšku má Tomova sklenice, víte-li, že její objem je přesně  $\pi$  dl?

Ze zadání víme, že Tomova sklenice má mít objem  $V$ . Proto si v tabulkách musíme najít vztah pro výpočet objemu komolého kužele:

$$V = \frac{1}{3}\pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

<sup>6</sup>Logaritmus,  $x = \log_b a$ , je zápis rovnosti mezi čísly  $x$ ,  $a$  a  $b$ , pro které zároveň platí  $b^x = a$ . Logaritmus tedy pomáhá „sesazovat“ neznámé z exponentů.



kde  $v$  je výška kužele a  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry jeho podstav. Z tohoto vztahu si vyjádříme výšku  $v$ :

$$v = \frac{3V}{\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)}.$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorečku, ale musíme si dát pozor na jednotky. Proto si převedeme objem v decilitrech na centimetry krychlové, aby nám jednotky korespondovaly s jednotkami průměru:

$$V = \pi dl = \pi \cdot 10^{-1} \text{ dm}^3 = \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^3.$$

Nyní již můžeme dosadit do našeho vyjádřeného vztahu pro výšku:

$$v = \frac{3 \cdot \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^3}{\pi [(5 \text{ cm})^2 + 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} + (3 \text{ cm})^2]} = \frac{300}{49} \text{ cm} \doteq 6,12 \text{ cm}.$$

Tomova sklenice musí být tedy vysoká 6,12 cm.

*Petra Štefaníková*  
petras@vyfuk.mff.cuni.cz

### Úloha VI.3 ... Zářivý problém

6 bodů; průměr 4,86; řešilo 43 studentů

*Petr si posledně lámal hlavu nad problémem zapojení tří stejných žárovek. Nevěděl, jak má žárovky připojit ke zdroji konstantního elektrického napětí o velikosti 220 V tak, aby žárovky svítily s co nejvyšším výkonem<sup>7</sup>.*

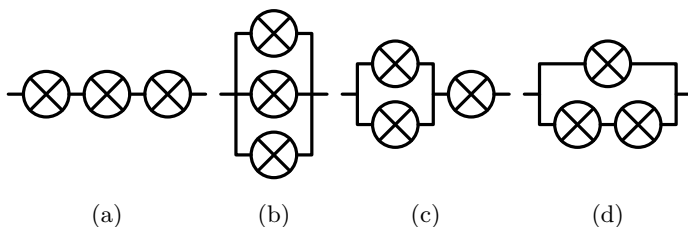
*Navrhněte Petrovi takové zapojení a napište, proč si myslíte, že právě toto zapojení má maximální výkon. Petr vám ještě prozradí, že pokud je jedna taková žárovka připojena k těmto zdrojům přímo, má výkon 40 W.*

Nejdříve se podíváme na vlastnosti dvou druhů zapojení, které známe, tedy na zapojení sériové a paralelní. V sériovém zapojení (tedy takové zapojení, kdy jsou na jednom vodiči umístěny spotřebiče, tj. v našem případě žárovky, v řadě za sebou) je velikost elektrického proudu ve všech jeho částech stejná, protože se obvod nikde nevětví. Naopak, napětí se mění, přičemž záleží na odporu jednotlivých spotřebičů.

Pro paralelní zapojení (tedy takové, kdy se vodič větví, na každé větvi je součástka, a pak se opět spojí do jednoho) může být proud v každé větvi jiný (každá větev si odebere množství proudu, které potřebuje), ale napětí je stejné pro všechny větve.

<sup>7</sup>Elektrický výkon je definován jako součin napětí a proudu, který protéká žárovkou.

Nyní si rozebereme možnosti zapojení tří žárovek do obvodu. První možností je zapojit všechny žárovky sériově, druhá možnost je zapojit je všechny paralelně, třetí je zapojit dvě žárovky paralelně a třetí k nim sériově a poslední možnost je zapojit dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně (viz obrázek 6).



Obr. 6: Schéma možných zapojení tří žárovek

Všechny tři žárovky jsou úplně stejné. Pokud bychom ke zdroji připojili pouze jednu žárovku, bude svítit výkonem

$$P_0 = \frac{(U_0)^2}{R}.$$

Zapojíme-li je všechny sériově, tak napětí se mezi stejné žárovky rozdělí stejně, tzn. na každé žárovce bude napětí  $U_0/3$  ( $U_0 = 220$  V). Protože pro výkon  $P$  platí  $P = UI$  a pro proud  $I = U/R$ , tak zároveň platí  $P = U^2/R$ . Každá žárovka tedy bude „svítit“ výkonem

$$P_s = \frac{(U_0/3)^2}{R} = \frac{1}{9} \frac{U_0^2}{R} = \frac{P_0}{9} = \frac{40}{9} \text{ W},$$

a tedy celkový výkon bude

$$P_{c1} = 3P_s = 3 \cdot \frac{P_0}{9} = \frac{40}{3} \text{ W}.$$

Při paralelním zapojení bude na každé žárovce napětí  $U_0$ , tedy výkon každé z nich bude

$$P_p = \frac{U_0^2}{R} = P_0 = 40 \text{ W}.$$

V tomto zapojení tedy bude mít každá žárovka výkon stejný, jako kdyby byla zapojena samostatně, tedy 40 W, a celkový výkon pak bude

$$P_{c2} = 3P_p = 3P_0 = 120 \text{ W}.$$

Nyní si můžeme všimnout, že při sériovém zapojení klesá napětí na žárovce a tedy i její výkon. V obou dvou zbylých zapojeních kombinujeme jak sériové, tak paralelní zapojení, tedy v obou dvou případech bude alespoň na dvou žárovkách menší napětí než  $U_0$ . Celkový výkon bude nižší než při paralelním zapojení všech žárovek. Přesné hodnoty výkonu tedy nemusíme počítat, neboť nikdy nedosáhneme výkonu vyššího než  $P_{c2}$ .

Nejvyššího výkonu tedy dosáhneme při paralelním zapojení všech tří žárovek, jejichž výkon bude 120 W.

*David Němec*  
david@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha VI.4 ... Koupel

7 bodů; průměr 5,63; řešilo 46 studentů

Orgové Výfuku zjistili, že nejlepší koupel připravíte tak, že do vany napustíte 40 l vody o teplotě 20 °C. Pak přilijete 7 l horké vody o teplotě 60 °C a 3 l ledové vody o teplotě 10 °C. Koupel dobře promícháte a z vany vypustíte 10 l vody. Poté opět dolijete 7 l horké a 3 l ledové vody, promícháte, 10 l vody vypustíte a postup mnohokrát opakujete. Po dostatečném počtu opakování bude mít koupel ideální teplotu. Zjistěte, jaká je tato teplota.

Před samotným řešením úlohy je třeba se zamyslet nad tím, jak bude přilévání vody probíhat. Ze zadání vidíme, že zde budeme používat nejspíše klasickou kalorimetrickou rovnici. Začít ale bezmyšlenkovitě počítat rovnice by bylo špatný krok. Na začátku je ve vaně 40 l vody o určité teplotě a my přilijeme dalších deset litrů směsi studené a horké vody. Pak 10 l smíchané vody vypustíme. Po dostatečném počtu opakování se původních 40 l vody o teplotě 20 °C tedy prakticky úplně vypustí a ve vaně bude pouze směs studené a horké vody, kterou každým krokem doléváme.

Jiné vysvětlení můžeme podat tak, že při každém přilítí další vody se celková teplota vody ve vaně zvýší. V jednom okamžiku logicky nastane maximum teploty. Bude to tehdy, když ve vaně bude pouze směs studené a horké vody.

Stačí tedy spočítat pouze jednu kalorimetrickou rovnici pro míchání horké a ledové vody:

$$m_h c (t_h - t) = m_l c (t - t_l) ,$$

kde  $m_h$  je hmotnost horké vody,  $m_l$  je hmotnost ledové vody,  $t_h$  je teplota horké vody,  $t_l$  je teplota ledové vody,  $c$  je měrná tepelná kapacita vody<sup>8</sup> a  $t$  je výsledná ideální teplota koupele.

Kalorimetrickou rovnici postupně upravujeme tak, abychom vyjádřili  $t$ :

$$\begin{aligned} m_h c (t_h - t) &= m_l c (t - t_l) , \\ m_h (t_h - t) &= m_l (t - t_l) , \\ m_h t_h - m_h t &= m_l t - m_l t_l , \\ m_h t_h + m_l t_l &= m_l t + m_h t , \\ t &= \frac{m_h t_h + m_l t_l}{m_l + m_h} . \end{aligned}$$

Do poslední rovnice dosadíme zadané hodnoty:

$$t = \frac{7 \text{ kg} \cdot 60 \text{ °C} + 3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ °C}}{3 \text{ kg} + 7 \text{ kg}} = 45 \text{ °C} .$$

V rovnici jsme využili poznatek, že 1 l vody váží 1 kg. Zjistili jsme tedy, že ideální teplota vody je 45 °C.

*Kateřina Stodolová*  
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

<sup>8</sup>Měrná tepelná kapacita je v našem rozsahu teplot nezávislá na teplotě.

## Úloha VI.5 ... Kolo štěstí

8 bodů; průměr 5,88; řešilo 26 studentů

Radka se jednou dostala do televize, kde si mohla zatočit kolem štěstí. Kolo v rozhodujícím momentu roztočila úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Radku by samozřejmě zajímalo, na jaké pozici se kolo zastaví a jakou cenu vyhraje.

Kolo je brzděné speciálním mechanismem, poskytující zpomalení (změna úhlové rychlosti za krátký časový úsek  $\Delta t$ ) v jednotkách  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0,3 + \frac{\omega}{10}. \quad (1)$$

Takovýto pohyb již není jednoduše vyjádřitelný pomocí vzorců, a proto si ho naprogramujte v tabulkovém kalkulátoru (MS Excel nebo OpenOffice Calc).

- Otevřete si váš oblíbený kalkulátor a založte si první sloupec, do kterého budete vynášet čas  $t$  v sekundách s krokem  $\Delta t = 0,1$  s.
- Do prvního řádku, vedle času  $t_0 = 0$  s, запиšte počáteční veličiny: počáteční úhel  $\varphi_0 = 0$  rad a počáteční úhlovou rychlost  $\omega_0 = 8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Do čtvrtého sloupce vypočítejte velikost zpomalení  $\varepsilon_0$ .
- Další hodnoty úhlu  $\varphi_n$  a úhlové rychlosti  $\omega_n$  počítejte postupně pomocí vztahů

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega_{n-1}\Delta t, \quad \omega_n = \omega_{n-1} - \varepsilon_{n-1}\Delta t$$

a zpomalení  $\varepsilon_n$  určete pomocí vztahu (1) dosazením úhlové rychlosti  $\omega_n$ .

Vše vypočítaných datech pak naleznete čas, kdy je úhlová rychlost nulová, tzn. kolo se zastavilo. Pak určete, na jakém úhlu se kolo štěstí zastavilo.<sup>9</sup> Do řešení zkuste vložit i kus své tabulky s daty.

Při řešení postupujeme podle zadaného návodu: v tabulkovém kalkulátoru si založíme nový soubor a postupně začneme vypisovat jednotlivé sloupce. V prvním řádku si pro lepší orientaci nejprve vytvoříme jednoduché záhlaví a poté doplníme první tři řádky našeho „programu“. Pro přehlednost jsou v tabulce 3 (níže) uvedeny hodnoty, které byly do buněk zapsány (v kalkulátoru ale nejsou takto zobrazeny).

Tabulka 3: Obsah prvních čtyř řádek tabulky v Excelu.

	A	B	C	D
1	Čas (s)	Úhel (rad)	Rychlost (rad/s)	Zpomalení ( $\text{rad}/\text{s}^{-2}$ )
2	0	0	8	$= 0,3 + C2/10$
3	0,1	$= B2 + C2 * 0,1$	$= C2 - D2 * 0,1$	$= 0,3 + C3/10$
4	0,2	$= B3 + C3 * 0,1$	$= C3 - D3 * 0,1$	$= 0,3 + C4/10$

Hodnoty v buňkách **B4**, **C4**, **D3** a **D4** můžeme zkopírovat z odpovídajících buněk na předchozím řádku. Nyní označíme poslední dva řádky (tedy 8 buněk) a tažením za malý čtvereček úchytu je překopírujeme do asi 200 řádků. Tím „nasimulujeme“ prvních 20 s točení. Všimněte

<sup>9</sup>Nezapomeňte, že úhly v radiánech udáváme v intervalu  $(0; 2\pi)$ .

si, že kalkulátor sám doplnil čas se zadaným krokem  $\Delta t = 0,1$  s a upravil i odkazy na buňky ve vzorcích.

Sloupec, který nás bude zajímat, je sloupec odpovídající úhlové rychlosti (tzn. sloupec **C**). Můžeme pozorovat, že úhlová rychlost postupně klesá z původní hodnoty  $\omega_0$ , což skutečně odpovídá zpomalování Radčína kola. Výřezy z celé simulace uvádíme v tabulce 4.

V momentu, kdy je úhlová rychlost rovna nule, se kolo zastavilo. V dalších řádcích však pozorujeme, že úhlová rychlost neustále klesá do záporných hodnot. Mohlo by se tedy zdát, že kolo se začne roztáčet v opačném směru. Takové chování ale není fyzikální, je to pouze nedostatek této simulace. Nulové hodnotě úhlové rychlosti odpovídá čas  $t = 12,9$  s. Z toho stejného řádku vidíme, že odpovídající úhel je  $\varphi \doteq 41,2$  rad. Toto ale ještě není výsledek – nezajímá nás totiž, kolikrát se kolo otočilo, ale kde se zastavilo, proto musíme z této hodnoty odečíst několik násobků  $2\pi$ , které odpovídají otočení o jedno celé kolo.

Výsledkem je tedy zbytek po dělení  $2\pi$ , což je matematicky zapsáno jako

$$\varphi = 41,2 \text{ rad mod } 2\pi \doteq 3,5 \text{ rad}.$$

Kolo štěstí se zastavilo na úhlu 3,5 rad.

Tabulka 4: Výřezy z finální tabulky

	A	B	C	D
<b>1</b>	Čas (s)	Úhel (rad)	Rychlost (rad/s)	Zpomalení (rad/s <sup>-2</sup> )
<b>2</b>	0	0	8	1,1
<b>3</b>	0,1	0,8	7,89	1,089
<b>4</b>	0,2	1,589	7,7811	1,07811
<b>5</b>	0,3	2,36711	7,673289	1,0673289
<b>6</b>	0,4	3,1344389	7,56655611	1,056655611
<b>7</b>	0,5	3,891094511	7,460890549	1,046089055
<b>127</b>	12,5	41,18214494	0,131785506	0,313178551
<b>128</b>	12,6	41,19532349	0,100467651	0,310046765
<b>129</b>	12,7	41,20537026	0,069462974	0,306946297
<b>130</b>	12,8	41,21231655	0,038768345	0,303876834
<b>131</b>	<b>12,9</b>	<b>41,21619339</b>	<b>0,008380661</b>	<b>0,300838066</b>
<b>132</b>	13,0	41,21703145	-0,021703145	0,297829685

## Úloha VI.E ... Kyvadlo

8 bodů; průměr 5,25; řešilo 32 studentů

Dva orgové Výfuku dostali za úkol přezkoumat, na jakých veličinách a jak závisí perioda kmitů kyvadla  $T$ , které vychylujeme s počáteční výchylkou  $5^\circ$ .

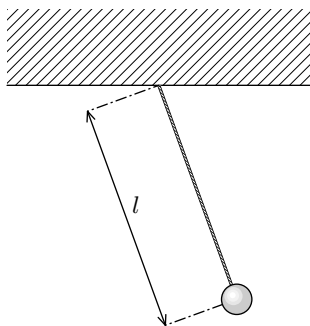
- (a) Jarda zkoumal dobu kmitů kyvadla s délkou závěsu 1 m. Zjistil, že perioda kmitů  $T$  je přímo úměrná druhé mocnině hmotnosti závaží na konci kyvadla.
- (b) David zjišťoval, jak závisí perioda  $T$  na délce závěsu kyvadla a dospěl k závěru, že perioda  $T$  je přímo úměrná délce závěsu.

Jak již jistě tušíte, vaší úlohou bude experimentálně prověřit jednotlivá tvrzení. Je-li tvrzení špatné, proveďte všechna potřebná měření k nalezení správného tvrzení.

Tip: Nejpřesněji se perioda kyvadla měří tak, že změříte čas, za který kyvadlo urazí deset period a změřený čas pak vydělíte deseti.

## Teorie

V této experimentální úloze se zabýváme kyvadly. Jak takové kyvadlo vlastně vypadá? Je to těleso na pevně uchyceném závěsu, jehož délka se nejčastěji počítá od bodu úchyty k těžišti zavěšeného tělesa, viz obrázek 7.



Obr. 7: Schéma matematického kyvadla.

Ve fyzice rozlišujeme dva základní druhy kyvadel – matematické a fyzikální (nebo také fyzické). Hlavní rozdíl mezi nimi je, že pokud považujeme kyvadlo za matematické, zanedbáváme hmotnost závěsu a rozměry závaží, což vede k jednoduššímu fyzikálnímu popisu pohybu kyvadla. V našem případě bude tento jednodušší model naprosto dostačující.

## Měření

- (a) První tvrzení ověříme tak, že na kyvadlo zavěsíme postupně několik závaží o různých hmotnostech  $m$ . My jsme použili závaží o hmotnostech  $m_0 = 0,3$  kg,  $m_1 = 2m_0 = 0,6$  kg a  $m_2 = 3m_0 = 0,9$  kg. Kyvadlo uchytíme do závěsu a nejprve ho necháme ustávit v klidové poloze. Poté ho napnuté pomocí úhlooměru vychýlíme o  $\alpha = 5^\circ$ . Pak kyvadlo pustíme a necháme ho desetkrát se „zhoupnout“, čímž změříme dobu *pěti* period.<sup>10</sup> Nejlépe je měření několikrát

<sup>10</sup>Jedna perioda je doba, kdy se kyvadlo zhoupne z krajní polohy tam a zpět, tzn. opět se ocitne v místě, odkud jsme ho vypustili.

zopakovat a poté použít průměrnou hodnotu. To samé opakujeme i s ostatními závažími. Naše výsledky jsou zaznamenány v tabulce 5.

Tabulka 5: Tabulka s naměřenými hodnotami dob pěti period pro různé hmotnosti závaží  $m_i$ . V prvním sloupci je uvedena příslušná hmotnost závaží.

$m_i/\text{kg}$	$5T/\text{s}$										$\overline{5T}/\text{s}$
0,3	10,02	9,86	9,91	9,88	9,91	10,08	10,06	9,90	9,96	10,17	9,98
0,6	9,81	9,96	9,91	10,02	9,53	9,92	9,94	10,14	10,02	9,88	9,91
0,9	10,08	10,04	10,16	10,02	9,97	10,26	9,85	10,29	10,06	9,97	10,07

Jak je z tabulky patrné, naměřené hodnoty jsou si navzájem podobné i přes to, že odpovídají různým hmotnostem závaží. Průměrné hodnoty těchto měření přepočtené na jednu periodu jsou si také velmi podobné: pro závaží o hmotnostech  $m_0$ ,  $m_1$  a  $m_2$  dostáváme  $T_0 = 1,96\text{ s}$ ,  $T_1 = 1,98\text{ s}$  a  $T_2 = 2,01\text{ s}$ .

Jardovo tvrzení je tedy zjevně nesprávné, protože poměr  $T_0 : T_1 : T_2$  neodpovídá poměru  $m_0^2 : m_1^2 : m_2^2 = 1 : 4 : 9$ . Nejpravděpodobnější znění správného tvrzení vyvozeného na základě naměřených hodnot je, že perioda kyvadla jednoduše *nezávisí* na hmotnosti závaží.

- (b) Druhé tvrzení budeme dokazovat podobně: zvolíme si závaží o konstantní hmotnosti (my jsme si zvolili hmotnost  $m = 1\text{ kg}$ ) a stejným postupem změříme délku jedné periody pro několik různě dlouhých závěsů. V našem měření jsme použili tři různé délky:  $l_0 = 1\text{ m}$ ,  $l_1 = 0,75l_0 = 0,75\text{ m}$  a  $l_2 = 0,5l_0 = 0,5\text{ m}$ . Naměřené hodnoty jsou zaneseny v tabulce 6.

Tabulka 6: Tabulka s naměřenými hodnotami dob pěti period pro různé délky závěsu  $l_i$ . V prvním sloupci je uvedena délka příslušného závěsu.

$l_i/\text{m}$	$5T/\text{s}$										$\overline{5T}/\text{s}$
1 m	9.99	9.96	10.22	10.15	10.08	9.93	10.07	10.17	9.98	10.02	10,06
0,75 m	8.62	8.76	8.73	8.64	8.69	8.48	8.75	8.68	8.58	8.71	8,61
0,5 m	7.00	7.22	7.10	7.02	7.26	6.97	7.27	7.13	7.19	7.13	7,13

Z tabulky je patrné, že perioda se zde již mění. Průměrná hodnota pro periody je pro délku  $l_0$  rovna  $T_0 \doteq 2,01\text{ s}$ , pro délku  $l_1$  je to  $T_1 \doteq 1,72\text{ s}$  a pro nejkratší délku  $l_2$  je průměrná perioda kmitů rovna  $T_2 \doteq 1,43\text{ s}$ . Platí tedy, že doba periody kyvadla klesá se zmenšující se délkou závěsu. Jedná se ale o *přímou úměru*?

Když se pozorněji zaměříme na zkracování doby jedné periody, zjistíme, že se nezkracuje stejným „tempem“ jako námi navolené délky závěsů! Když zmenšíme závěs z délky  $l_0$  na  $l_1 = 0,75l_0$ , podle přímé úměry bychom měli dostat stejný výsledek i pro periodu, tzn.  $T_1 = 0,75T_0$ . Tedy změřené době  $T_0 = 2,01\text{ s}$  odpovídá očekávaná hodnota  $T_1' = 0,75 \cdot 2,01\text{ s} \approx 1,51\text{ s}$ . Tato hodnota se ale neshoduje s měřením ( $T_1 = 1,74\text{ s}$ ). Předpoklad, že perioda závisí přímo na délce závěsu, se tedy nezdá pravdivý.

Pro ověření této hypotézy provedeme stejný postup i pro třetí délku závěsu  $l_2 = 0,5l_0$ . Očekávaná doba jedné periody je  $T_2' = 0,5T_0 = 0,5 \cdot 2,01\text{ s} \doteq 1,005\text{ s}$ , zatímco změřená hodnota je  $T_2 = 1,43\text{ s}$ . Vzhledem ke značné odchylce tohoto výsledku od očekávané hodnoty můžeme prohlásit, že perioda kyvadla *nezávisí* přímo úměrně na délce závěsu. Perioda je

tedy zřejmě závislá na délce v jiném, než „základním“ tvaru.<sup>11</sup>

## Závěr a chyby měření

Naše měření obě dvě teorie vyvrátilo. Zjistili jsme, že perioda kyvadla nezávisí na hmotnosti závaží a že perioda kyvadla závisí na odmocnině z délky závěsu.

Teoretický výpočet pro matematické kyvadlo vede ke vztahu pro periodu v případě malých úhlových výchylek:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde  $l$  je délka kyvadla a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je gravitační zrychlení. Naše dvě měření jsou s tímto vztahem v úplné shodě.

Možné chyby měření mohly nastat tehdy, když jste délku závěsu nezměřili až k těžišti tělesa. U nehomogenních těles mohlo navíc dojít ke špatnému odhadnutí polohy těžiště a tím pádem také ke špatnému určení délky závěsu.

Dále je možné, že po rozhoupání se kyvadlo nebude houpat jen přesně do stran, ale také trochu i dopředu a dozadu, což může ovlivnit dobu jedné periody.

Měření periody může ovlivnit i to, že budete na jedno rozkmitání měřit příliš mnoho kmitů, kmity se pak příliš utlumí a budou špatně měřitelné. Sice ani jeden z těchto faktorů neovlivní měření nijak výrazně, ale je dobré vědět, na co si dát pozor a co mohlo způsobit odchylky naměřených hodnot od teoretických předpovědí.

## Poznámky k došlým řešením

Když jste někteří z vás měřili tuhle experimentální úlohu, nepřipsali jste postup či dokonce chyběly naměřené hodnoty (obvykle se měří kolem deseti měření, která se poté zprůměrují). Postup má sloužit k tomu, aby ten, kdo si váš protokol úlohy přečte, pochopil, jak jste danou úlohu měřili. Pomůcka pro dobrý postup je jednoduchá: až budete mít postup sepsaný, pročtete si znovu celý text a představte si, že byste jen podle toho textu měli provést měření. Občas si po takovéto „kontrolě“ uvědomíte, že vám v protokolu něco chybí nebo že nějaká věta je tam zbytečná.

Další problém u několika z vás nastal, když jste měli potvrdit, jestli perioda kmitu závisí *přímo úměrně* na délce závaží kyvadla. Přímo úměrně znamená, že kolikrát se zvětší/zmenší nezávislá proměnná (zde délka), tolikrát se zvětší/zmenší i proměnná závislá (perioda).

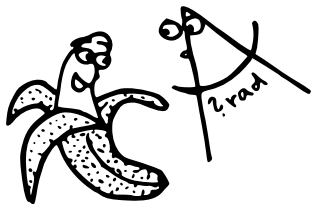
Poslední bod se týká vašich odhadů: pokud dokazujete závislost periody na druhé mocnince hmotnosti a naměříte velmi podobné výsledky lišící se např. až na setinném místě sekundy, jedná se pravděpodobně o chybu měření. Experiment není nikdy tak dokonale přesný, abyste dostali vždy na chlup stejné výsledky, k jakým dojdete podle teoretických úvah a výpočtů. A zrovna tady lze po logické úvaze usoudit, že aby se druhá mocnina hmotnosti změnila v řádech stovek a tisíců a perioda se změnila v řádech sedetin či setin sekund je prakticky nesmysl.

**Pavla Trembulaková**  
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

<sup>11</sup>Po chvilce hledání můžeme nakonec zjistit, že poměry period  $T_0 : T_1 : T_2 \doteq 1 : 0,86 : 0,71$  velmi dobře souhlasí s poměry odmocnin délek závěsů  $\sqrt{l_0} : \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} = 1 : 0,87 : 0,71$ , takže perioda kyvadla je úměrná odmocnině délky jeho závěsu.

## Úloha VI.C ... 3,1415...

7 bodů; průměr 4,69; řešilo 52 studentů



- (a) Jindru číslo  $\pi$  velice zaujalo, proto si ho přál znát nazpaměť. Bohužel ale  $\pi$  má nekonečný desetinný rozvoj, a tak se Jindra musel spokojit s pamatováním si pouze prvních deseti číslic za desetinnou čárkou. Jindrovi spolužáci však tak pilní nejsou. Ondra si zapamatoval  $\pi$  na pět míst, Lukáš na tři, Káťa na dvě a Jarda jen na jedno. Zanedlouho měli v testu za úkol spočítat obvod Země. Jak moc se odpovědi jednotlivých žáků lišily? Kolik to je v procentech, vezmeme-li v úvahu Jindrovu odpověď za „správnou“? Na kolik desetinných míst je podle vás výhodné si číslo  $\pi$  pamatovat? Poloměr Země a  $\pi$  na dostatečný počet desetinných míst si vyhledejte například na internetu nebo v tabulkách a předpokládejte, že Země je ideální koule.
- (b) Najděte a odůvodněte převodní vztah z radiánů na stupně (kolik stupňů je 1 rad) a naopak (kolik radiánů je  $1^\circ$ ).
- (c) Domorodci z daleké země Umbuqa používají jako jednotku úhlu banány (ozn. b). Jejich vědci zjistili, že plný kruh odpovídá 4,5 b. Kolik radiánů odpovídá úhlu o velikosti 1 b?

- (a) Nejprve musíme zjistit, čemu se rovná  $\pi$  na deset desetinných míst. Na webu<sup>12</sup> se dozvíme, že  $\pi$  na prvních deset desetinných míst je rovno  $\pi = 3,141\,592\,653\,6$ . Ondra se tedy naučil číslo  $\pi = 3,141\,59$ , Lukáš se naučil  $\pi = 3,141$ , Káťa  $\pi = 3,14$  a Jarda se naučil  $\pi = 3,1$ . Abychom mohli určit, jaký obvod Země každý z nich vypočítal, musíme použít vztah pro výpočet obvodu kruhu  $O = 2\pi r$ . Snadno nalezneme, že poloměr Země činí 6 378 km. Jindrovi tedy vyšlo

$$O = 2\pi r = 2 \cdot 3,141\,592\,653\,6 \cdot 6\,378 \text{ km} = 40\,074,16 \text{ km}.$$

Stejným dosazením zjistíme, že Ondrovi vyšlo  $O_O = 40\,074,12 \text{ km}$ , Lukášovi vyšlo  $O_L = 40\,066,60 \text{ km}$ , Kátě vyšlo  $O_K = 40\,053,84 \text{ km}$  a Jardovi vyšlo  $O_J = 39\,543,60 \text{ km}$ .

Procentuální odchylku Ondrova a Jindrova výsledku vypočteme tak, že nejprve určíme rozdíl jejich výsledků v kilometrech, který činí

$$\Delta O_O = O_J - O_O = 40\,074,16 \text{ km} - 40\,074,12 \text{ km} = 0,04 \text{ km}.$$

Tento rozdíl pak převedeme na procenta pomocí trojčlenky. Uvažme, že celek, tedy 100 %, je roven Jindrovu výsledku. Pak procentuální odchylka  $\delta O_O$  je

$$x = \frac{\Delta O_O}{O_J} \cdot 100 \% = \frac{0,04 \text{ km}}{40\,074,16 \text{ km}} \cdot 100 \% \doteq 0,0001 \%$$

<sup>12</sup><http://www.piday.org/million/>

Ondrova procentuální odchylka je tedy přibližně 0,0001 %. Úplně stejným způsobem můžeme vypočítat, že procentuální odchylka Lukášova výsledku je 0,019 %, odchylka Kátina výsledku je 0,051 % a Jardova odchylka je 1,32 %.

Vidíme, že procentuální odchylka je v prvních tří případech menší než procento. Nejběžněji používaná hodnota  $\pi = 3,14$  nám tedy ve většině praktických výpočtů úplně postačuje. Používání příliš přesné hodnoty  $\pi$  se nevyplatí, protože typicky i ostatní veličiny známe jen s omezenou přesností. Například zde vnáší do výsledku větší chybu zjednodušení, že tvar Země je koule.

- (b) Převodní vztah mezi radiány a stupni můžeme snadno odvodit ze vztahu mezi velikostí plného úhlu v radiánech a stupních, který najdeme ve Výfučení. Dozvíme se, že platí rovnost  $360^\circ = 2\pi$  rad. Úpravou této rovnice zjistíme, že jeden stupeň se rovná

$$1^\circ = \frac{1^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \text{ rad} \doteq 0,017 \text{ rad}.$$

Stejným způsobem vypočítáme i převodní vztah z radiánů na stupně:

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \cdot 360^\circ \doteq 57,3^\circ.$$

- (c) Víme-li, že plný kruh má  $2\pi$  rad a zároveň 4,5 b, můžeme stejným způsobem jako výše vypočítat, čemu se rovná jeden banán:

$$1 \text{ b} = \frac{1 \text{ b}}{4,5 \text{ b}} \cdot 2\pi \text{ rad} \doteq 1,4 \text{ rad} = 80^\circ.$$

Úhel 1 b tedy odpovídá úhlu asi 1,4 rad.

*Marek Božoň*

marek@vyfuk.mff.cuni.cz



## Pořadí řešitelů po VI. sérii

### Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	VI	$\Sigma$
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	6	7	8	8	7	45	258
1. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	4	4	6	7	3	5	3	32	164
2. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	4	5	6	–	0	8	6	29	149
3. <i>Patrik Rosenberg</i>	ZŠ Tuháčkova, Brno	4	5	1	6	–	–	5	21	118
4. <i>Pavel Šimůnek</i>	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	–	–	–	–	–	–	–	–	29
5. <i>Matyáš Juřica</i>	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	4	16
6. <i>Lukáš Žák</i>	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	4	4
7. <i>Sára Božoňová</i>	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	3

## Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	VI	Σ
		4	5	6	7	8	8	7	45	258
1. <i>Michal Beránek</i>	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	3	5	6	7	8	8	5	42	242
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	3	5	6	7	–	8	4	33	211
3.–4. <i>Kryštof Pravda</i>	G Mensa, Praha	4	5	–	–	–	–	3	12	155
3.–4. <i>Ondřej Valášek</i>	ZŠ V. Kl. Klicpery, Nový Bydžov	4	5	4	2	–	6	2	23	155
5. <i>Ester Galiová</i>	ZŠ a MŠ Středokluky	4	4	6	7	–	–	4	25	152
6. <i>Filip Temiak</i>	G, Český Krumlov	4	4	4	4	–	4	5	25	114
7. <i>Radomír Mielec</i>	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	106
8. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	4	5	4	4	2	3	2	24	104
9. <i>Tomáš Kudrnáč</i>	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	4	1	–	–	–	–	–	5	93
10. <i>Natálie Křivancová</i>	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	79
11. <i>David Kocian</i>	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	4	2	6	3	–	1	3	19	57
12. <i>Jan Hyžák</i>	ZŠ Valašská Polanka	4	4	–	–	–	–	–	8	56
13. <i>Tomáš Kavena</i>	Křestanské G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	50
14. <i>Vojtěch Vincibr</i>	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	49
15. <i>Martin Kolovratník</i>	ZŠ Pardubice - Studánka	–	–	–	–	–	–	–	–	48
16. <i>Adam Korběl</i>	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	–	46
17. <i>Luboš Petráň</i>	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	4	–	–	–	–	–	–	4	36
18. <i>Alexandra Rosenber- gová</i>	ZŠ Tuháčkova, Brno	4	5	0	6	–	–	5	20	34
19. <i>Emma Kodyšová</i>	G Z. Wintra, Rakovník	4	5	–	7	–	–	6	22	33
20. <i>Honza Bartoš</i>	První české G, Karlovy Vary	3	–	–	–	–	–	1	4	30
21.–22. <i>Robert Jaworski</i>	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	28
21.–22. <i>Miroslav Kotsyba</i>	ZŠ a MŠ Helsinská, Tábor	4	–	–	–	–	–	5	9	28
23. <i>Tomáš Trtík</i>	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	27
24.–25. <i>Rostislav Jeřábek</i>	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	4	19
24.–25. <i>Filip Matůš</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	19
26. <i>Isabela Andreevská</i>	Spec. soukromé G Integra, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	18
27. <i>Barbora Vosková</i>	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	16
28. <i>Anežka Zobačová</i>	ZŠ Vratislavovo nám., NMnM	3	–	–	–	–	–	–	3	15
29. <i>Jakub Dorňák</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	14
30. <i>Marie Vondrášková</i>	ZŠ Strýčice, Hluboká nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	13
31. <i>Jakub Hembera</i>	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	–	12
32. <i>Monika Bambuchová</i>	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	8
33. <i>Jakub Tománek</i>	ZŠ Hošťálková	–	–	–	–	–	–	–	–	1

## Kategorie osmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	VI	Σ	
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	5	6	7	8	8	7	41	229
1. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	4	6	7	8	6	6	<b>37</b>	<b>218</b>	
2. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	-	5	6	7	8	7	7	<b>40</b>	<b>216</b>	
3. <i>Lubor Čech</i>	G, Mikulov	-	5	6	7	8	6	6	<b>38</b>	<b>199</b>	
4. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	-	5	6	7	8	7	5	<b>38</b>	<b>197</b>	
5. <i>Michal Grus</i>	G Dobruška	-	4	6	7	7	7	6	<b>37</b>	<b>177</b>	
6. <i>Julie Rubášová</i>	Biskupské G, Brno	-	3	6	7	8	8	5	<b>37</b>	<b>156</b>	
7. <i>Vladimír Chudý</i>	ZŠ Ronov nad Doubravou	-	5	6	7	-	4	5	<b>27</b>	<b>154</b>	
8. <i>Jiří Zikmund</i>	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	-	5	2	7	0	3	3	<b>20</b>	<b>146</b>	
9. <i>Karolína Letochová</i>	G Šternberk	-	2	5	2	5	6	7	<b>27</b>	<b>130</b>	
10. <i>Filip Řeháček</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	5	4	4	5	-	3	<b>21</b>	<b>128</b>	
11. <i>Vojtěch Kuchař</i>	ZŠ Sobotka	-	5	4	7	7	-	5	<b>28</b>	<b>127</b>	
12. <i>Filip Holoubek</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	-	3	3	-	-	0	3	<b>9</b>	<b>105</b>	
13. <i>Jan Raja</i>	G, Nymburk	-	5	1	-	2	4	<b>12</b>	<b>92</b>		
14. <i>Lucie Urbanová</i>	G Chotěboř	-	4	6	-	-	7	<b>17</b>	<b>91</b>		
15. <i>Ondřej Polanecký</i>	1. ZŠ TGM Milevsko	-	2	4	7	-	-	-	<b>13</b>	<b>89</b>	
16. <i>Jiří Szotkowski</i>	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	-	4	-	6	-	-	6	<b>16</b>	<b>88</b>	
17. <i>Tereza Boubertlová</i>	Biskupské G, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>83</b>	
18. <i>Eliška Novotná</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>61</b>	
19. <i>Radim Šafář</i>	G J. Blahoslava, Ivančice	-	3	-	7	-	-	2	<b>12</b>	<b>60</b>	
20. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	-	5	6	7	8	-	6	<b>32</b>	<b>52</b>	
21. <i>Bartoloměj Pecháček</i>	Církevní G, Plzeň	-	-	2	-	-	4	-	<b>6</b>	<b>43</b>	
22. <i>Marek Novák</i>	G, Písek	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>31</b>	
23. <i>Andriy Volvach</i>	ZŠ Na Smetance, Praha 2	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>30</b>	
24.-25. <i>Ondřej Man</i>	ZŠ T. G. Masaryka Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>29</b>	
24.-25. <i>Jiří Zinecker</i>	G Komenského, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>29</b>	
26. <i>Jan Antonín Musil</i>	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>28</b>	
27. <i>Eliška Švecová</i>	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>26</b>	
28. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>25</b>	
29. <i>Lada Vestfálová</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>23</b>	
30. <i>Martin Bencko</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	-	2	3	0	-	1	0	<b>6</b>	<b>18</b>	
31.-32. <i>Petr Budai</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>16</b>	
31.-32. <i>Jan Zemek</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>16</b>	
33.-35. <i>Jakub Salaj</i>	G Uničov	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15</b>	
33.-35. <i>Filip Trhlík</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15</b>	
33.-35. <i>Eva Vondráková</i>	G Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>15</b>	
36. <i>Anna Sovová</i>	Klasické a španělské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>14</b>	
37. <i>Adam Závora</i>	15. základní škola Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>8</b>	
38. <i>Pavel Malík</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>7</b>	
39.-40. <i>Šimon Kovalčík</i>	ZŠ Valašská Polanka	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>5</b>	
39.-40. <i>Jan Zindr</i>	ZŠ Poštovní, Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>5</b>	
41. <i>David Zatloukal</i>	ZŠ Stupkova, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>4</b>	

## Kategorie devátých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	VI	Σ	
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	5	6	7	8	8	7	41	229
1. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	5	6	7	8	7	6		<b>39</b>	<b>222</b>
2. Martin Schmiéd	G Jihlava	-	5	6	7	7	8	5		<b>38</b>	<b>219</b>
3. Šimon Brázda	ZŠ a MŠ Kameničky	-	5	6	7	8	6	5		<b>37</b>	<b>204</b>
4. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	3	6	3	8	6	7		<b>33</b>	<b>196</b>
5. Viktor Vařeka	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	5	2	7	3	7	6		<b>30</b>	<b>184</b>
6.-7. Rudolf Líbal	G Christiana Dopplera, Praha	-	5	6	7	8	6	5		<b>37</b>	<b>174</b>
6.-7. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	-	5	6	7	3	8	7		<b>36</b>	<b>174</b>
8. Filip Wagner	G Tišnov	-	3	4	7	1	3	5		<b>23</b>	<b>161</b>
9. Aneta Pouková	ZŠ Horní Čermná	-	5	6	4	7	-	6		<b>28</b>	<b>154</b>
10. Ondřej Macháč	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	-	5	6	7	7	5	6		<b>36</b>	<b>146</b>
11. Jindřich Hátle	ZŠ Amálská, Kladno	-	4	6	4	-	5	7		<b>26</b>	<b>131</b>
12. Adam Vavrečka	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>117</b>
13. Pavla Rudolfová	ZŠ Komenského náměstí, Slavkov u	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>115</b>
14.-15. Martin Bína	G, Moravská Třebová	-	5	-	7	-	-	2		<b>14</b>	<b>99</b>
14.-15. Jaroslav Scheinpflug	ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Bud	-	5	-	6	-	-	5		<b>16</b>	<b>99</b>
16. Julie Weisová	ZŠ Židlochovice	-	5	2	3	-	-	3		<b>13</b>	<b>95</b>
17. Petr Doubravský	ZŠ a MŠ J. A. Komenského Nové St	-	4	6	7	8	3	7		<b>35</b>	<b>94</b>
18. Filip Novotný	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>87</b>
19. Miroslav Jarý	ZŠ Velké Poříčí	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>85</b>
20. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	-	2	-	3	-	-	3		<b>8</b>	<b>78</b>
21. Václav Pavlíček	ZŠ a MŠ Ždírec nad Doubravou	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>66</b>
22. Michal Suk	ZŠ Svisle, Přerov, Přerov I - Mě	-	-	-	-	-	-	4		<b>4</b>	<b>63</b>
23. Karel Šebela	Katolické gymnázium Třebíč	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>56</b>
24. Mária Volmanová	ZŠ Kollárova, Jihlava	-	5	-	2	-	-	-		<b>7</b>	<b>40</b>
25. Adam Nekolný	G, Písnická, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>39</b>
26. Milan Tichavský	ZŠ Hradec nad Moravicí	-	-	-	-	-	-	7		<b>7</b>	<b>37</b>
27.-28. Jindřich Dítě	ZŠ Komenského, Žďár nad Sázavou	-	2	-	7	-	-	-		<b>9</b>	<b>35</b>
27.-28. Jana Sládková	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>35</b>
29. Roman Varfolomeiev	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10	-	3	6	-	-	-	3		<b>12</b>	<b>31</b>
30.-32. Jakub Bartoš	G, Písnická, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>30</b>
30.-32. Martin Flidr	G Masarykovo nám., Kroměříž	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>30</b>
30.-32. Tomáš Salavec	BG B. Balbína, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>30</b>
33. Lenka Tomanová	ZŠ Měřín	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>27</b>
34. Jan Macek	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>24</b>
35. Dita Chabičovská	G Nad Kavalírkou, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>18</b>
36. Vojtěch Ježek	G Legionářů, Příbram	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>17</b>
37.-38. Victoria Grundlerová	ZŠ jazyků Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>16</b>
37.-38. Jiří Hocek	ZŠ Veronské náměstí, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>16</b>
39.-40. Eva Horálková-Polášková	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>15</b>
39.-40. Alena Osvaldová	G J. Š. Baara, Domažlice	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>15</b>
41. Alice Janáčková	G Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>13</b>
42.-43. Štěpán Chrástský	Biskupské G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>12</b>
42.-43. Lucie Kuncárová	G Volgogradská, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>12</b>
44. Adam Kolomazník	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>10</b>
45. Eva Jurčecová	ZŠ sv. Vršily Praha 1	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>9</b>
46. Lucka Hosová	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>8</b>
47. Klára Šenkeříková	ZŠ a MŠ Nedašov	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>7</b>
48. Petr Čerych	ZŠ Sobotka	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>4</b>
49. Jakub Ucháč	ZŠ Vrané n. Vltavou	-	-	-	-	-	-	-		-	<b>3</b>





**Korespondenční seminář Výfuk  
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8**

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>  
e-mail: [vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz](mailto:vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz)

Výfuk je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.