výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

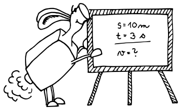
právě otevíráte již pátou brožurku Výfuku v tomto školním roce. Jako obvykle v této brožurce naleznete zadání v pořadí páté série tohoto ročníku, stejně tak jako řešení série třetí. Nedávno jsme také na našich webových stránkách zveřejnili v elektronické podobě řešení čtvrté série.

Aktuální Výfučtení věnujeme vesmíru, přesněji řečeno měření vzdáleností v něm. Podíváme se na to, jak je metr vlastně krátký, jak je světlo vlastně rychlé a jak je vlastně vesmír prázdný.

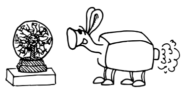
Na konci této brožurky se pak nachází pololetní výsledková listina, na jejímž základě pak v obálce spolu s touto brožurkou máte i pozvánku na náš letní tábor.

Mnoho zdaru při řešení přejí

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



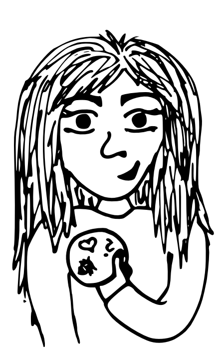
Zadání V. série



Termín doručení: 28. 3. 2016 20.00

Úloha V.1 ... Dobble ❻ ❼ — 5 bodů

Bětka s Čajkou si chtěly zahrát Dobble, ale neměly hrací karty. Protože jsou tvořivé, rozhodly se karty vyrobit. Domluvily se, že na každé kartě budou nakresleny tři různé symboly a že celkem použijí 7 různých symbolů. Kolik různých karet mohou vytvořit? Ve hře Dobble mají každé dvě karty stejný právě jeden symbol. Kolik karet Bětce s Čajkou zůstane, aby bylo splněno toto pravidlo?



matfyz

Úloha V.2 ... Zlatovláska ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Terka si chystá na karneval kostým Zlatovlásky. Během příprav ji napadlo, že by si místo paruky nechala vlasy pozlatit – na každý vlas by nanesla 5 µm tlustou vrstvu zlata. Kolik zlata by Terka potřebovala? Předpokládejte, že všech sto tisíc Terčiných vlasů má délku 0,5 m, průměr 60 µm a tvar válce. Hustota zlata je $19\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Úloha V.3 ... Běžecká ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Kuba a Paťo jednou vymýšleli strategii pro štafetový běh, kterého se chtěli s Verčou zúčastnit. Běžecká dráha je dlouhá tři kilometry a štafetově ji poběží všichni tři, přičemž Paťo běží rychlostí $5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, Verča $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a Kuba $15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Kuba navrhoval, aby každý z běžců běžel stejně dlouho, zatímco Paťo zastával strategii, že každý poběží stejně dlouhý úsek. Podle které strategie doběhne tým do cíle za kratší čas?

Úloha V.4 ... Ekologická ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

David loni psal dlouhou školní práci. Jako velký ochranář přírody se ale neuměl rozhodnout, co je ekologičtější – napsat práci na počítači, nebo sepsat práci ručně. David zjistil, že:

- práce napsaná na počítači a vytištěná by měla 32 stran,
- Davidův počítač má příkon 75 W,
- elektrárna, která Davidovi dodává elektřinu, vyrobí spálením stejného množství dřeva jako je potřeba na výrobu 1 kg papíru 3 MJ elektrické energie,
- práce napsaná rukou by měla 48 stran,
- David má po ruce papír o rozměru A4 a standardní gramáži $80\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}$.

Pomozte Davidovi a vypočítejte, za jakou dobu musí David stihnout práci napsat na počítači, aby byla tato možnost stejně ekologická co se spotřeby papíru týče, jako samotné psaní na papír?

Úloha V.5 ... Ubrus ❻ ❼ ❽ ❾ ✩ 9 bodů

Nedílnou součástí všech velikých oslav je zábava, při které se účastníci snaží strhnout z prostřeného stolu ubrus tak, aby ze stolu nic nespadlo na zem. Podívejme se na tento trik zblízka.

Vycházet budeme z druhého Newtonova zákona, který lze zapsat jako $F = ma$. Zákon lze chápat dvojím způsobem:

- působí-li na těleso o hmotnosti m výsledná síla o velikosti F, těleso bude zrychlovat se zrychlením o velikosti a ve směru shodném se směrem působící síly,
- zrychluje-li podložka zrychlením a, v soustavě *spojené s podložkou* působí na všechny předměty na podložce setrvačná síla o velikosti F ve směru opačném vůči směru zrychlení a.

Zde roli podložky bude hrát ubrus. Na něm je položen talíř o hmotnosti $m = 300\,\mathrm{g}$. Koeficient tření[1] mezi talířem a ubrusem je roven $f = 0{,}2$.

(a) Adam zatáhl za ubrus tak, že se začal pohybovat se zrychlením $a_1 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. K jeho překvapení se talíř začal pohybovat spolu s ubrusem. Nakreslete obrázek, do kterého šipkami zaznačíte síly, které na talíř působí. Vypočítejte výslednou sílu, která působila na talíř v soustavě spojené s ubrusem.

(b) Vypočítejte, jaké musí být nejmenší zrychlení a_2, aby setrvačná síla překonala sílu tření, a talíř se vzhledem k ubrusu začal pohybovat.

[1] Myslíme tím statický i dynamický koeficient tření.

(c) Borek proto zatáhl za ubrus tak, že zrychloval se zrychlením $3a_2$. Určete velikost a směr zrychlení a_3 talíře v soustavě spojené s ubrusem.
(d) I když Borek za ubrus zatáhl dostatečnou silou, talíř se začal pohybovat i vůči stolu. Vypočítejte velikost a směr tohoto zrychlení a_3'.
(e) Pokud jste správně počítali, zrychlení a_3' vyšlo nezávislé na zrychlení a_2. To by ale mělo znamenat, že k úspěšnému strhnutí ubrusu stačí překonat zrychlení a_2. Proč je ale lepší ubrus strhávat co největší silou (s největším zrychlením)?

Úloha V.E ... Sešity ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Pořiďte si dva 40-stranové sešity A4, klidně i popsané. Pak sešity spojte tím, že budete prokládat jednotlivé stránky. Poté změřte, jakou silou musíte na jeden ze sešitů působit, abyste je od sebe odtrhli. Měření zopakujte pětkrát pro alespoň pět různých počtů proložených stránek.

Poté nakreslete graf závislosti použité síly na počtu proložených stránek a z grafu odhadněte, jaká síla je zapotřebí na odtrhnutí úplně proložených sešitů.

Způsob, jak sílu působící na sešit změřit, necháváme na vaší fantazii. V řešení se ale o něj nezapomeňte podělit!

Úloha V.C ... Vzdálená ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

(a) Marťanský rover Curiosity je jedna z pojízdných laboratoří, které i teď brázdí povrch Marsu a zkoumají tuto zvláštní planetu. Vypočítejte nejkratší čas, za který signál vyslaný vozítkem dorazí na Zem. Uvažte, že signál se šíří rychlostí světla, Země i Mars obíhají kolem Slunce po téměř kruhových dráhách s poloměry $a_\mathrm{Z} = 1\,\mathrm{AU}$ a $a_\mathrm{M} = 1{,}5\,\mathrm{AU}$.
(b) Ondra jednou pozoroval svojí oblíbenou cefeidu a měřil, jak se mění její zdánlivá hvězdná velikost m v čase t, viz tabulku. Pomozte Ondrovi a z naměřených dat zjistěte periodu jeho cefeidy a průměrnou zdánlivou hvězdnou velikost (průměrujte pouze v rámci jedné periody). S pomocí textu Výfučtení pak spočtěte její absolutní hvězdnou velikost a konečně i její vzdálenost od Země.

Tabulka 1: Časová závislost zdánlivé hvězdné velikosti Ondrovy cefeidy

t/d	0	1	1,5	2	3	4	5	6
m	4,12	4,28	4,3	4,2	3,55	3,8	4	4,2
t/d	7	8	9	10	11	12	13	
m	4,3	3,95	3,55	3,85	4,1	4,28	4,3	

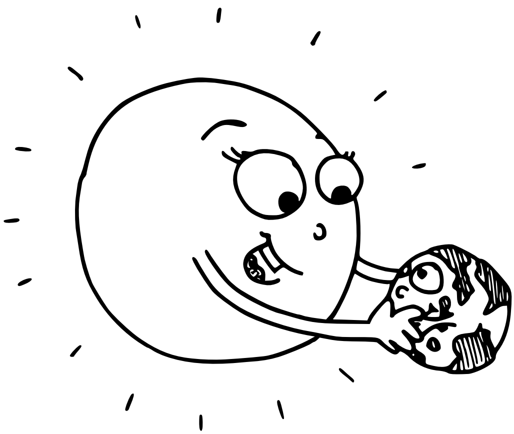
Výfučtení: Vzdálenosti ve vesmíru

Není jednotka jako jednotka

Na měření rozměrů nebo vzdáleností různých objektů je nutné zavést nějakou *jednotku* vzdálenosti. Jednou ze základních jednotek soustavy SI je metr. Metr spolu s jeho odvozenými jednotkami (milimetr, kilometr, atd.) používáme na běžná měření různých věcí na Zemi. Navíc jsou s jeho pomocí vyjádřeny i další důležité odvozené jednotky SI (například jednotka rychlosti kilometr za hodinu).

Bohužel Země samotná je vůči velikostem a vzdálenostem objektů, které pozorujeme ve vesmíru, strašně malá. Jenom Slunce má poloměr přibližně stokrát větší než Země; Zemi samotnou bychom mohli mezi ni a Slunce naskládat asi dvanáct tisíc krát. K měření těchto a daleko větších vzdáleností je použití metrů velmi nepraktické. Nejen kvůli jednoduché představitelnosti, ale i z důvodu zpřehlednění matematických operací zavádíme nové jednotky vzdálenosti.

Tento díl Výfučtení bude vyprávět právě o těchto nových jednotkách. A nejen to – povíme si i o tom, jakými metodami lze obrovské vzdálenosti ve vesmíru měřit.



Astronomická jednotka

Ukazuje se, že pro měření vzdáleností v naší Sluneční soustavě je vhodné používat jako základní jednotku vzdálenost Slunce od Země. Mnozí víte, že taková vzdálenost se ale v průběhu roku mění. Proto se pro definici tzv. astronomické jednotky (značka AU nebo také au z angl. astronomical unit) používá *střední* vzdálenost Země od Slunce. Platí tedy

$$1\,\mathrm{au} = 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}\,.$$

V praxi se používá zaokrouhlená, lehce zapamatovatelná hodnota $1\,\mathrm{au} = 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$.

Jak již bylo zmíněno, astronomická jednotka je užitečná například k měření vzdáleností planet od Slunce. Třeba Jupiter je od Slunce vzdálen 5,2 au, nejvzdálenější planeta Neptun 30 au. Na druhou stranu, poloměr Slunce je méně než 0,005 au, k jeho vyjádření proto stále používáme kilometry.

Světelný rok

Pro vyjadřování vzdálenějších objektů, například okolních hvězd, je přirozenou jednotkou světelný rok (značka ly z angl. light year). Jeden světelný rok je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden juliánský rok, tedy přesně 365,25 dn. V přepočtu platí

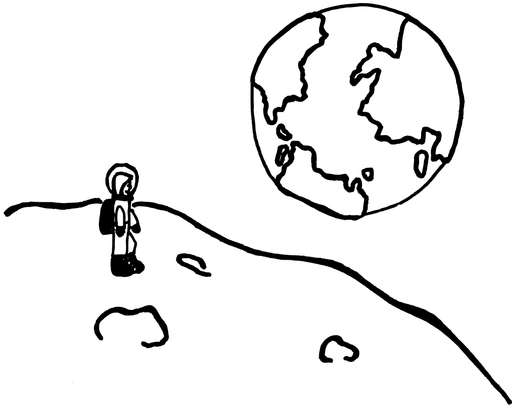
$$1\,\mathrm{ly} \doteq 9{,}46 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km} \doteq 63\,200\,\mathrm{au}\,.$$

Ku příkladu jedna z možných „hranic" naší Sluneční soustavy, Oortův oblak, je vzdálen přibližně 1,6 ly a naše nejbližší hvězda po Slunci, Proxima Centauri, se nachází ve vzdálenosti přibližně 4,2 ly. Většina objektů, které můžete vidět na noční obloze, je vzdálených o mnoho více. Střed naší galaxie je vzdálen 26 000 ly a nám nejbližší galaxie (galaxie M31 v Andromedě) je vzdálena až $2{,}5 \cdot 10^6$ ly.

Vzdálenost měřená ve světelných rocích zároveň vypovídá i o době, po kterou k nám světlo, které pozorujeme, putovalo. Ve skutečnosti sledujeme vzdálené objekty mladší, než ve skutečnosti jsou. Extrémním příkladem je supernova ASASSN-15lh v souhvězdí Indiána, která je vzdálená $3{,}8 \cdot 10^9$ ly. To znamená, že hvězda, která předtím zabírala její místo, ukončila svůj život přibližně v době, kdy naše Země vznikala, přesto však tuto událost pozorujeme až teď.

Paralaxa a parsec

Pod pojmem *paralaxa* rozumíme rozdíl úhlů, pod kterým pozorujeme nějaký objekt vůči posuvu pozorovatele. Na základě známého posunutí a změřeného úhlu pak můžeme určit vzdálenost pozorovaného objektu.

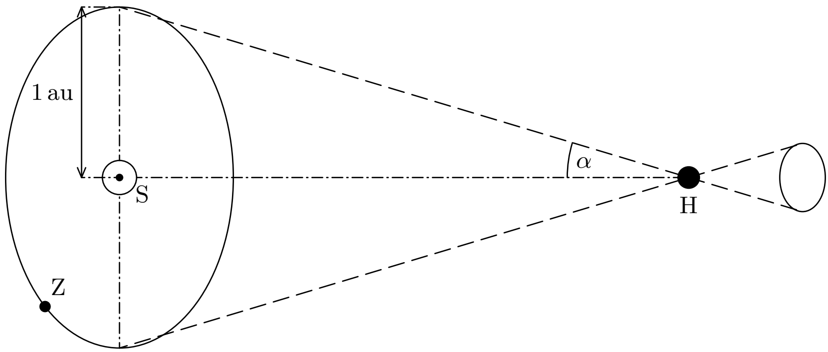


Měření pomocí paralaxy si ukážeme na jednoduchém příkladu. Představme si, že na louce pozorujeme vzdálený strom. Pak si vezmeme kompas a zapíšeme si úhlovou polohu stromu vůči severu. Pak se projdeme ve směru kolmém na naši spojnici se stromem a následně strom opět zaměříme kompasem. Rozdíl změřených úhlů je paralaxa stromu. Řekněme, že změřená paralaxa byla $\alpha = 2°$ a ušlá vzdálenost $x = 3\,\mathrm{m}$. S pomocí trigonometrické funkce tangens pak lze vyjádřit vzdálenost stromu d jako

$$d = \frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{3\,\mathrm{m}}{\mathrm{tg}\,(2°)} \doteq 86\,\mathrm{m}\,.$$

Paralaxy, které měří astronomové, jsou často mnohem menší, než 1°. Pro tak malé úhly platí s dostatečnou přesností i vztah $d = x/\alpha$, přičemž ale úhel α musí být vyjádřen v radiánech.[2]

Jak tedy takové měření hvězdných paralax probíhá? Abychom dosáhli měřitelné paralaxy, změna polohy pozorovatele musí být o mnoho větší, než pouhá procházka po poli. Největší pohyb, který Země periodicky vykonává vůči hvězdám, je obíhání okolo Slunce. Této metodě se říká *roční paralaxa* a uvažuje se paralaxa odpovídající posunutí o 1 au. Jinak řečeno, roční paralaxa je též úhel, pod kterým vidíme z pozorované hvězdy vzdálenost 1 au.



Obr. 1: Schéma roční paralaxy. Písmeny S, Z a H je (v tomto pořadí) označeno Slunce, Země a (v nesprávném měřítku) hvězda. Zdánlivý pohyb hvězdy po elipse pozorujeme vzhledem k ještě vzdálenějším objektům, jejichž roční paralaxa je zanedbatelně malá.

Právě z měření paralaxy se zavedla i nová jednotka vzdálenosti – parsec (značka pc). Jeden parsec je vzdálenost bodu od Slunce, který při kolmém posuvu na tuto vzdálenost o 1 au pozorujeme s paralaxou 1″ (jedné úhlové vteřiny, tzn. 1/3 600 stupně). Lze vypočíst, že platí

$$1\,\mathrm{pc} \doteq 3{,}08 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km} \doteq 206\,265\,\mathrm{au} \doteq 3{,}26\,\mathrm{ly}\,.$$

V parsecích se měří vzdálenosti blízkých hvězd. Už zmiňovaná Proxima Centauri je vzdálena asi 1,3 pc a Polárka je vzdálena přibližně 99 pc. V astronomii se ale také používají i násobné jednotky, například kiloparsec ($1\,\mathrm{kpc} = 10 \cdot 10^3\,\mathrm{pc}$) a megaparsec $1\,\mathrm{Mpc} = 10 \cdot 10^6\,\mathrm{pc}$). V takových jednotkách se už měří vážně velké vzdálenosti. Taková galaxie v Andromedě je vzdálena asi 0,78 Mpc.

Měření velkých vzdáleností

Problém měření paralaxy popsané výše spočívá v tom, že běžné roční paralaxy hvězd jsou menší, než 1″. Jenom paralaxa Proximy Centauri je pouze 0,77″, s rostoucí vzdáleností hvězd paralaxa dále klesá. Z důvodu konečného rozlišení dalekohledů jsme omezeni na měření paralax hvězd, které jsou vzdáleny maximálně asi 1 600 ly.

Astronomové proto vymysleli i jiné metody, jak zjistit vzdálenosti k mnohem vzdálenějším objektům, ať už k hvězdám v naši Galaxii nebo k okolním mlhovinám, hvězdokupám atd.

---

[2] Radián je, podobně jako stupeň, jednotkou úhlové velikosti. Mezi radiány a stupni platí převodní vztah $1\,\mathrm{rad} \doteq 57°$. Více se o radiánech dočtete v dalším díle Výfučtení.

Hvězdná velikost

Hvězdná velikost nebo hvězdná magnituda m je veličina popisující pozorovanou *jasnost* hvězd. Hvězdné velikosti pozorované ze Země říkáme *zdánlivá* hvězdná velikost. Historicky je tato veličina zavedena tak, že jasné hvězdě Vega v souhvězdí Lyry byla přiřazena velikost 0. Objekty, které se ze Země jeví jasnější než Vega, mají pak hvězdnou velikost zápornou, a objekty, které jsou méně jasné, mají hvězdnou velikost kladnou. Kupříkladu Slunce má zdánlivou hvězdnou velikost asi $-26{,}7$, zatímco hvězdy na hranici rozlišitelnosti lidským okem nabývají hvězdné velikosti 6.

Kromě zdánlivé velikosti zavádíme i *absolutní* hvězdnou velikost M. Ta je definována jako zdánlivá velikost hvězdy, kterou pozorujeme ze vzdálenosti 10 pc. Absolutní hvězdná velikost Slunce je pouze 4,8.

Fakt, že s rostoucí vzdáleností pozorovatele od hvězdy klesá její zdánlivá hvězdná velikost, popisuje tzv. Pogsonova rovnice

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \right) ,$$

kde d je vzdálenost hvězdy (typicky udávaná v parsecích), funkci log říkáme logaritmus.[3] Rovnici lze upravit a vyjádřit z ní vzdálenost

$$d = 10\,\mathrm{pc} \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} .$$

Základem pro měření vzdáleností pomocí hvězdných velikostí je poznatek, že pro různé typy hvězd lze *odhadnout* jejich absolutní hvězdnou velikost na základě jejich teploty, vyzařovaného spektra, věku a podobně. Pozorujeme-li ze Země blízkou hvězdu, jejíž vzdálenost určíme například pomocí paralaxy, z Pogsonovy rovnice lze určit její absolutní hvězdnou velikost, a tudíž i vzdálenosti podobných, ale vzdálenějších hvězd. Této metodě říkáme *spektroskopická paralaxa* a je použitelná do vzdálenosti asi 10 000 pc.

Cefeidy

Cefeidy jsou speciálním typem hvězd, jejichž hvězdná velikost se mění v pravidelných intervalech. Periody těchto změn se pohybují v jednotkách nebo desítkách dnů. Na začátku 20. století Henrietta Leavittová zjistila, že mezi střední hodnotou hvězdné velikosti cefeid M_C a jejich periodou P vyjádřené ve dnech platí vztah

$$M_\mathrm{C} = -2{,}78 \log{(P)} - 1{,}35 .$$

Z měření period a jasností cefeid pak lze nejen určit jejich vzdálenost, ale vzhledem k jejich výrazné jasnosti i vzdálenost objektů v jejich okolí. Typicky se pomocí jasných cefeid měří vzdálenosti blízkých galaxií.

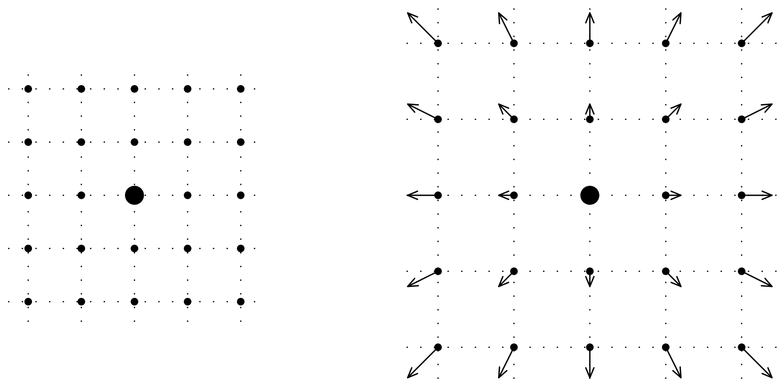
[3] Více se o logaritmu můžete dozvědět ve Výfučtení 5. série 3. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`.

Rozpínání vesmíru a červený posuv

Ve dvacátých letech 20. století se (teoreticky i experimentálně) zjistilo rozpínání vesmíru, které má za následek vzájemné vzdalování většiny galaxií. Platí přitom, že rychlost vzdalování v je úměrná vzdálenosti d, tzv. Hubbleův zákon

$$v = H_0 d\,,$$

Kde $H_0 \approx 68\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}}$ je Hubblova konstanta. Právě Edwin Hubble ji poprvé experimentálně změřil. Její obskurní jednotku chápeme tak, že galaxie, která se nachází ve vzdálenosti $1\,\mathrm{Mpc}$, se od nás vzdaluje rychlostí $68\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 2: Rozpínaní vesmíru si lze představit pomocí natahování dvourozměrné mřížky. Všimněte si, že při jejim natahování se vzdálenější body pohybují rychleji než ty blízké, což je také podstata Hubbleova zákona.

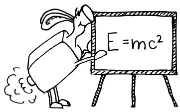
Vidíme tedy, že ze známé hodnoty rychlosti vzdalování jsme schopni vypočítat odpovídající vzdálenost. Tuto rychlost musíme měřit, a to nejčastěji tzv. *červeným posuvem.* Červený posuv je důsledek Dopplerova jevu, který říká, že vlnová délka světla, jehož zdroj se od pozorovatele vzdaluje rychlostí v, se zvětší. Zvětšení vlnové délky světla například znamená, že původně žlutá hvězda začne svítit více do oranžova.

Matematicky červený posuv značíme z a platí pro něj

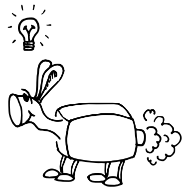
$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\,,$$

kde λ je pozorovaná vlnová délka záření (pozorujeme například vyzařování charakteristických prvků: vodíku, helia, atd.), λ_0 je odpovídající vlnová délka stojícího zdroje (kterou změříme na stejných prvcích v laboratoři) a $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla.

Měření červeného posuvu umožňuje astronomům měřit i ty největší vzdálenosti ve vesmíru a dokonce, díky měření červeného posuvu zbytkového záření po Velkém třesku, i jeho věk.



Řešení III. série



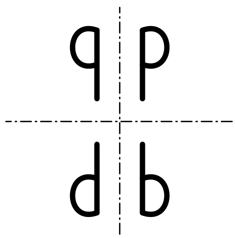
Úloha III.1 ... Symetrická

5 bodů; průměr 4,26; řešilo 19 studentů

Jistě jste si všimli, že některá písmena jsou symetrická vůči nějaké ose, popřípadě středu symetrie. Nakreslete nám tedy čtyři obrázky, ze kterých bude jasné, jak vzniknou z písmena q *písmena* p, b *a* d *a o jaký typ symetrie (osová, středová souměrnost) jde.*

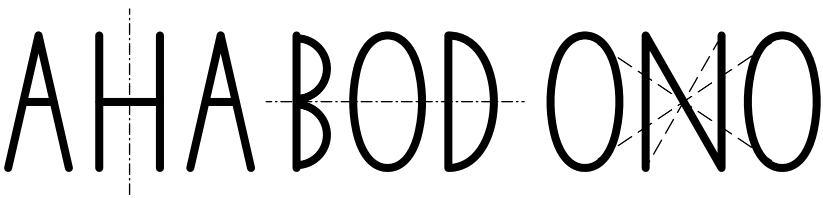
Pak se zamyslete a zkuste vymyslet tři slova s osou či bodem symetrie, která jsou symetrické jako celky. Můžete použít malá i velká písmena.

Písmenko q přezrcadlíme podle svislé osy na písmenko p, které následně překlopíme podle vodorovné osy na písmenko b (což je ekvivalentní otočení podle středu přímo z písmenka q). Písmenko d získáme překlopením písmenka q podle vodorovné osy.



Obr. 3: Symetrie písmen q, p, b a d

Slov se symetriemi je mnoho. Jako příklady lze uvést slovo AHA, které je symetrické podle svislé osy, a slovo BOD, které je symetrické podle vodorovné osy. Dále ku příkladu slovo ONO je středově symetrické.



Obr. 4: Některá symetrická slova

Tereza Uhlířová
`teri@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.2 ... Sněhuláci

5 bodů; průměr 3,91; řešilo 67 studentů

Když se Lucka ráno probudila, zjistila, že celou noc sněžilo. Do zahrady o rozměrech $a = 15\,\mathrm{m}$ a $b = 16\,\mathrm{m}$ napadla vrstva sněhu vysoká $c = 5\,\mathrm{cm}$. Lucka se tedy rozhodla sníh využít a postavila z něho sněhuláka. Ten sestával ze tří koulí o poloměrech v poměru 1 : 2 : 3. Jak byl sněhulák vysoký, pokud víte, že Lucka použila všechen sníh ze zahrady a při stavění sněhuláka sníh udusala na desetinu jeho původního objemu?

Poradíme vám, že vzorec pro objem koule je

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3\,,$$

kde r je její poloměr.

Nejprve spočítáme, kolik sněhu vlastně Lucka měla. Rozměry zahrady již známe, vrstva sněhu je vysoká $c = 5\,\mathrm{cm}$. To můžeme převést na metry, tzn. $c = 0{,}05\,\mathrm{m}$. Nesmíme však zapomenout, že Lucka při stavbě sněhuláka sníh udusala na desetinu jeho původního objemu, tudíž výsledný objem sněhuláka získáme tak, že vynásobíme tyto tři rozměry a výsledek vydělíme deseti:

$$V = \frac{abc}{10} = \frac{15\,\mathrm{m}\cdot 16\,\mathrm{m}\cdot 0{,}05\,\mathrm{m}}{10} = 1{,}2\,\mathrm{m}^3\,.$$

Ze zadání je zřejmé, že tento objem bude rovný objemu tří koulí, ze kterých Lucka sněhuláka postavila. Navíc platí, že poloměry první, druhé a třetí koule, tzn. postupně r_1, r_2 a r_3, jsou v poměru 1 : 2 : 3. Tudíž můžeme psát, že $r_2 = 2r_1$ a $r_3 = 3r_1$. S pomocí zadaného vztahu na výpočet objemu koule můžeme napsat objem první (nejmenší) koule jako

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3\,,$$

a druhé a třetí koule jako

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\,(2r_1)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8r_1^3 = 8V_1\,,$$
$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r_3^3 = \frac{4}{3}\pi\,(3r_1)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27r_1^3 = 27V_1\,.$$

Objem celého sněhuláka spočítáme jako součet objemů jednotlivých koulí:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + 8V_1 + 27V_1 = 36V_1 = 36 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3\,.$$

Z posledního vztahu si vyjádříme r_1:

$$r_1^3 = \frac{3V}{36 \cdot 4\pi}\,,$$
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{48\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}2\,\mathrm{m}^3}{48\pi}} \doteq 0{,}20\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{cm}\,.$$

Z tohoto výsledku už pak snadno můžeme dopočítat, že $r_2 = 2r_1 = 40\,\mathrm{cm}$ a $r_3 = 3r_1 = 60\,\mathrm{cm}$.

Dále pak není těžké si rozmyslet, že hledanou výšku sněhuláka vypočítáme jako součet průměrů jednotlivých koulí. Nalezené poloměry tedy vynásobíme dvěma a pak je sečteme:

$$h = 2\,(r_1 + r_2 + r_3) = 2\,(20\,\mathrm{cm} + 40\,\mathrm{cm} + 60\,\mathrm{cm}) = 2{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Lucčin sněhulák měřil 2,4 m.

Petr Šimůnek
petas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... Úsporná

5 bodů; průměr 4,77; řešilo 62 studentů

Káťu máma zase napomenula, že v pokoji nechává svítit a zbytečně utrácí peníze. Vypočítejte, jak dlouho by musela svítit žárovka ve vašem pokoji, aby to vaši maminku stálo pět korun. Nezapomeňte nám do řešení napsat parametry vaší žárovky a zdroj, kde jste našli cenu elektrické energie.

Spotřebovaná elektrická energie se udává v jednotkách zvaných watthodiny, udávajících počet wattů spotřebovaných za hodinu. Z různých zdrojů se dozvíme různé informace o jejich ceně, protože ta se odvíjí od mnoha parametrů. Zájemci si mohou zjistit více.[4]

Internetové stránky ČEZu[5] říkají, že jedna MWh stojí asi 4 241 Kč. Trojčlenkou můžeme dopočítat, že 5 Kč je ekvivalentní energii 1 179 Wh.

Kolik musíme spotřebovat energie už jsme zjistili. Teď potřebujeme nějaké informace o žárovce, ale nevíme přesně, jaké žárovky se u Káti doma používají. Mezi čtyři nejpoužívanější typy patří klasická žárovka (ta se už dnes ale nesmí vyrábět), halogenová žárovka, úsporná žárovka a LED osvětlení. Tyto čtyři druhy svítidel se liší v mnoha parametrech jako jsou životnost, ekologická zátěž, cena, světelný tok nebo příkon, který je pro energetickou spotřebu velmi

[4] Například na stránce http://www.cenyenergie.cz/cena-elektriny-z-ceho-je-slozena/#/promo-ele nebo http://www.penize.cz/spotrebitel/256691-distribucni-sazby-elektriny-mate-tu-spravnou.

[5] https://www.cez.cz/edee/content/file/produkty-a-sluzby/obcane-a-domacnosti/elektrina-2015/cez_cz_ele_cenikmoo_2015-01-01_comfort.pdf

podstatný společně s účinností.[6] My budeme uvažovat, že u Káti doma se používají klasické žárovky o příkonu 100 W.

Už víme, kolik energie (joule = wattsekunda) spotřebujeme, a známe i příkon. Můžeme dopočítat čas, za který při tomto příkonu spotřebujeme tolik watthodin. Ten logicky spočítáme jako podíl watthodin a wattů. Klasická žárovka o příkonu 100 W spotřebuje pět korun za

$$t_1 = \frac{1\,179\,\mathrm{Wh}}{100\,\mathrm{W}} = 11{,}79\,\mathrm{h} \doteq 11\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min}\,.$$

Stejným způsobem lze spočítat počet hodin i pro úspornější žárovky o jiných příkonech. Z výsledku vidíme, že přestože necháme na pár minut nebo dokonce hodin svítit, maminka neutratí příliš mnoho peněz (což samozřejmě neznamená, že byste to měli dělat).

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... Simulace Měsíce

6 bodů; průměr 4,42; řešilo 52 studentů

Astronauti trénují práci na Měsíci tak, že se ve skafandrech ponoří do bazénu, kde jsou nadnášeni vztlakem vody. Vypočítejte, na jaký objem V mají inženýři skafandr s astronautem nafouknout, aby astronaut vážící $m = 90\,\mathrm{kg}$ pociťoval tíhové zrychlení stejné jako na Měsíci, tzn. šestinu zemského tíhového zrychlení? Samotný skafandr váží $M = 40\,\mathrm{kg}$, hmotnost vzduchu ve skafandru zanedbejte.

Pokud chceme, aby astronaut pociťoval stejné tíhové zrychlení jako na Měsíci díky vztlakové síle vody, musíme si představit, jak na našeho astronauta tyto síly v bazénu působí. Víme, že se zde nachází vztlaková síla F_{vz} směrem k hladině a směrem dolů síla tíhová F_g. Pokud bychom dali tyto síly do rovnosti, potápěč by se mohl ve vodě volně vznášet. My ale chceme, aby byl přitahován ke dnu „tíhovou silou Měsíce“ F_{M}, tudíž od složky tíhové síly F_g musíme odečíst sílu F_{M}:

$$F_{\mathrm{vz}} = F_g - F_{\mathrm{M}}\,. \tag{1}$$

Nyní si vyjádříme tyto síly, víme-li, že vztlaková síla se vypočítá jako součin objemu ponořeného tělesa V, hustoty kapaliny (hustota vody je $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) a tíhového zrychlení g:

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g\,.$$

Dále známe i tíhové síly z druhého Newtonova zákona. Tudíž tíhová síla Země je $F_g = (M+m)\,g$. Pokud víme, že na Měsíci je zrychlení $a = g/6$, můžeme uvést i tíhovou sílu na Měsíci $F_{\mathrm{M}} = (M+m)\,g/6$.

Nyní víme, jak vypočítat všechny síly v naší rovnici, můžeme tedy do rovnice 1 dosadit:

$$V\varrho g = (M+m)\,g - (M+m)\,\frac{g}{6}\,,$$

$$V = \frac{5}{6}\cdot\frac{M+m}{\varrho}\,,$$

$$V = \frac{5}{6}\cdot\frac{40\,\mathrm{kg} + 90\,\mathrm{kg}}{1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}} \doteq 0{,}108\,\mathrm{m^3} = 108\,\mathrm{l}\,.$$

[6] Zájemci se mohou opět více dočíst na www.t-led.cz/srovnani-zarovek-a-led-diod.

Skafandr astronauta musí tedy nafouknout na objem 108 l.

Petra Štefaníková
petras@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.5 ... Cesta na sever

7 bodů; průměr 3,43; řešilo 47 studentů

Petr se rozhodl o prázdninách dobýt severní pól. Základní tábor si založil na 89,9° s.š. a vydal se na lyžích rovnoměrným přímočarým pohybem na sever. Poté, co dosáhl severního pólu, pokračoval stále rovně, tedy na jih. Když byl od severního pólu stejně daleko jako na začátku, začala mu být zima, a tak vyrazil po rovnoběžce zpátky do základního tábora.
a) Jak daleko byl jeho tábor od severního pólu?
b) Za jak dlouho se dostal zpátky do tábora, když jel stálou rychlostí $v = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?
c) Nakreslete graf závislosti Petrovy vzdálenosti od severního pólu na čase.
d) Nakreslete také graf závislosti jeho rychlosti směrem na sever na čase.
Zemi považujte za přesnou kouli s poloměrem $R = 6\,378\,\mathrm{km}$.

a) Nejdříve si musíme uvědomit, co nám vlastně říká zadání: Petrův tábor je na 89,9° s.š. ve vzdálenosti s_1 od severního pólu. To znamená, že pomyslná spojnice tábora a středu Země svírá s rovníkem úhel právě 89,9°. Vzdálenost s_1 na povrchu Země tedy odpovídá délce oblouku kružnice o středovém úhlu $\alpha = 90^\circ - 89{,}9^\circ = 0{,}1^\circ$.
Hledanou vzdálenost pak můžeme vypočítat jako délku kružnicového oblouku (tj. části kružnice) odpovídající danému úhlu.
Platí, že kružnice vedená po povrchu Země a jejíž obvod je rovný $2\pi R$, odpovídá středovému úhlu o velikosti 360°. Pro oblouk se středovým úhlem 0,1° tedy na základě přímé úměry platí
$$\frac{s_1}{2\pi R} = \frac{0{,}1^\circ}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2\pi R\frac{0{,}1^\circ}{360^\circ}\,.$$
Po dosazení dostáváme, že hledaná vzdálenost je
$$s_1 = 2\pi \cdot 6\,378\,\mathrm{km}\frac{0{,}1^\circ}{360^\circ} \doteq 11{,}13\,\mathrm{km}\,.$$
Všimněme si, že zde nemusíme počítat se základními jednotkami, poněvadž výsledek nám opět vyjde v kilometrech. Petrův tábor je tedy od severního pólu vzdálený přibližně 11,13 km.

b) Podle zadání jel Petr nejprve k pólu, pak pokračoval po stejně dlouhé dráze na jih a vracel se po rovnoběžce. Pohyb k pólu a na jih k rovnoběžce je jednoduché spočítat – je to dvojnásobná velikost hodnoty s_1. Pak nám už zbývá jen vypočítat délku cesty zpátky. Když si představíme její tvar, je to půlkruh s poloměrem r. Tento poloměr je zároveň odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je rovna R. Navíc, jeden z úhlů tohoto trojúhelníka je nám známý úhel α.
Na to, abychom ze známého úhlu α a přepony R spočetli protilehlou odvěsnu r, použijeme goniometrickou funkci sinus:
$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad r = R\sin\alpha = 6\,378\,\mathrm{km} \cdot \sin\left(0{,}1^\circ\right) \doteq 11{,}13\,\mathrm{km}\,.$$

Možná si říkáte, že je zvláštní, že nám s přesností na dvě desetinná místa (tzn. s přesností na 10 m) vyšlo $r = s_1$. Ve skutečnosti jsou přesnější hodnoty z kalkulačky rozdílné: $r = 11{,}131\,704\,\mathrm{km}$, $s_1 = 11{,}131\,709\,\mathrm{km}$. Tento nepatrný rozdíl je tak malý proto, že i úhel $0{,}1^\circ$ je při takovýchto rozměrech skoro neznatelný.

Nyní vypočítáme délku Petrovy dráhy zpět do tábora s_2. Jak jsme již psali výše, jde o polovinu obvodu kružnice s poloměrem r:

$$s_2 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi R \sin\alpha = \pi \cdot 6\,378\,\mathrm{km} \cdot \sin(0{,}1^\circ) \doteq 35{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Celková dráha je rovna součtu délky cesty k pólu (na sever), délky cesty na jih a délky cesty po rovnoběžce. Všechny tři úseky tedy sečteme. Dobu trvání výletu pak vypočteme jednoduše jako podíl celkové dráhy a Petrovy rychlosti

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2s_1 + s_2}{v} = \frac{2 \cdot 11{,}13\,\mathrm{km} + 35{,}5\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} \doteq 5{,}776\,\mathrm{h} \doteq 5\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min}\,.$$

Petr se tedy vrátil do tábora za více jak pět a tři čtvrtě hodiny.

c) Hledáme závislost vzdálenosti od severního pólu na čase. To znamená, že na svislou osu vyneseme vzdálenost a na vodorovnou osu čas. Petrovu cestu si opět rozdělíme na tři části: na první, kdy jel od tábora k pólu, na druhou, kdy jel od pólu na jih a na třetí, kdy jel po rovnoběžce zpět do tábora. V grafu budou důležité časy, kdy bude Petr na pólu a kdy dojede do nejjižnějšího bodu své cesty a vydá se po rovnoběžce zpět do tábora.

První úsek začíná Petr v čase $t_1 = 0\,\mathrm{h}$, kdy bude jeho vzdálenost od severního pólu rovna $s_1 = 11{,}13\,\mathrm{km}$ (Petr se nachází v základním táboru). Graf tedy začíná v bodě $[0\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$ (první hodnota v závorkách označuje souřadnice bodu na vodorovné ose a druhá hodnotu souřadnice bodu na svislé ose). Jelikož se Petr přibližuje rovnoměrně, tj. za stejný časový úsek urazí stejnou vzdálenost, tato část grafu tedy bude klesající přímka, která bude klesat až do bodu kdy bude hodnota vzdálenosti od pólu rovna nule (tzn. Petr dosáhl severního pólu).

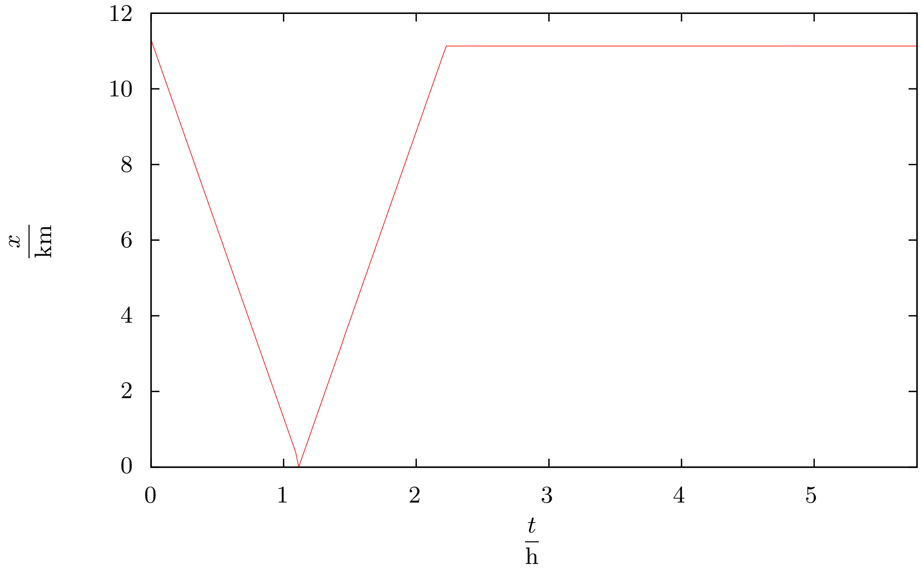
Jako další bod grafu tedy spočtěme, za jaký čas Petr k pólu dorazí. Víme, že za tuto dobu musí Petr urazit od začátku své cesty dráhu s_1 rychlostí v. Podle vztahu $t = s/v$ spočítáme odpovídající čas:

$$t_2 = \frac{s_1}{v} = \frac{11{,}13\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} 1{,}113\,\mathrm{h}\,.$$

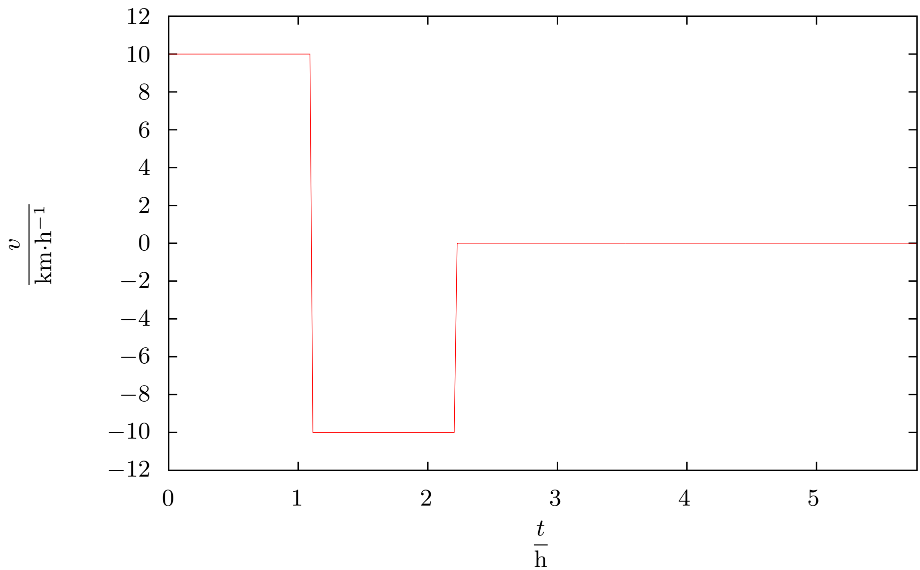
První část grafu bude tedy úsečka s počátkem v bodě $[0\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$ a koncem v bodě $[1{,}113\,\mathrm{h}; 0\,\mathrm{km}]$.

Poté Petr vyrazí na jih, až dosáhne zase $0{,}1^\circ$ s.š. a ujede opět dráhu o velikosti s_1, přičemž se pořád pohybuje konstantní rychlostí v. Opět mu tedy tato cesta trvala čas $t_2 = 1{,}113\,\mathrm{h}$, tzn. začala v čase t_2 a skončila v čase $t_2 + t_2 = 2t_2 = 2{,}226\,\mathrm{h}$. Odpovídající vzdálenost od pólu v tomto čase bude stejná jako na začátku, tedy další bod našeho grafu má souřadnice $[2{,}226\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$.

Poslední část Petrovy cesty je cesta po rovnoběžce. Co to znamená pro náš graf? Znamená to, že jeho vzdálenost od severního pólu bude pořád konstantní, protože on bod severního pólu vlastně „obkrouží“ v konstantní vzdálenosti s_1. Tato část grafu tedy bude rovnoběžná s vodorovnou osou, která bude končit v bodě grafu mající časovou souřadnici rovnou $t = 5{,}776\,\mathrm{h}$, za který Petr urazil celou dráhu od tábora přes pól a zpět do tábora (viz výpočet ve třetím bodě). Tomuto bodu tedy odpovídají souřadnice $[5{,}776\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$, celý graf pak můžete vidět na obrázku 5.



Obr. 5: Závislost dráhy na čase, který Petr urazil.



Obr. 6: Závislost Petrovy rychlosti směrem na sever na čase.

d) V posledním bodě nám opět pomůže rozčlenění Petrovy cesty na tři části. Hledáme závislost rychlosti směrem na sever na čase, což znamená, že na vodorovné ose budeme vyznačovat čas a na svislé ose vyznačíme rychlost směrem na sever.
Když se bude Petr pohybovat z tábora k pólu, jeho rychlost ve směru na pól bude stejně velká jako rychlost jeho pohybu, tedy $v_1 = v = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Po minutí severního pólu se bude pohybovat směrem na jih, tedy směrem opačným než na sever. Jeho rychlost od pólu se tedy v čase t_2 rázem změní na $v_2 = -v = -10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Poslední část jeho cesty po rovnoběžce bude zanesena v grafu s rychlostí $v_3 = 0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, protože Petrova vzdálenost od pólu se při cestě po rovnoběžce nemění. Časy, ve kterých se bude graf „lámat“, budou stejné, jako v předchozí otázce. Výsledný graf uvádíme na obrázku 6.

Poznámky k došlým řešením

Největší problém jste měli se zadáním, ve kterém jste se bohužel někteří zamotali. Nejvážnější početní problém však nastal v bodě, kdy jste měli spočítat vzdálenost cesty zpět, která kopírovala půlku rovnoběžky 89,9° severní šířky s poloměrem *rozdílným* od vzdálenosti pól-tábor, kterou jste všichni úspěšně spočítali v první části úlohy. Dráha pól-tábor je po povrchu Země, kdežto pomyslný poloměr rovnoběžky vede těsně pod povrchem Země. Hodnoty se vám sice moc nelišily, ale to jen díky tomu, že úhel 0,1° je opravdu malý. Za tento prohřešek jsem samozřejmě body odečíst musela.

Pavla Trembulaková
`pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.E ... Nenasytné kapesníčky
7 bodů; průměr 5,58; řešilo 60 studentů

Říká se, že kapesníčky jsou velmi savé, ale my bychom si to chtěli ověřit v praxi. Proto jsme vám se zadáním zaslali pět kapesníčků. Nejdříve si na kapesníčky nakreslete stupnici s dílky po centimetru. Pak je pověste nad nádobu s vodou tak, aby se voda do kapesníčku nasávala podél jedné z jeho stran. Vaší úlohou bude měřit časy, za které stoupne hranice smáčené části kapesníčku o centimetr. Měření zopakujte se všemi kapesníčky a naměřené hodnoty odpovídající stejné výšce zprůměrujte. Pak nakreslete graf závislosti těchto časů na výšce smáčené části kapesníčků.

Jak to funguje

Jak je vůbec možné, že voda se samovolně nasává do kapesníčků? Na první pohled to přece fyzika zakazuje: pokud kapička vody vystoupá po kapesníčku do nějaké výšky, spotřebuje na to energii, která je rovna práci konané proti tíhové síle (této práci se též říká *potenciální energie*). Touto energií ale kapička vody jistě nedisponuje!

Na rozlousknutí této záhady bude mít svůj podíl samotný kapesníček a materiál, z něhož je vyroben. Kapesníček, který jste obdrželi, měl čtyři vrstvy, a mezi nimi tři úzké mezery vyplněné vzduchem. Energie rozhraní[7] kapesníček-vzduch je ale vyšší než energie rozhraní kapesníček-voda. Je tedy energeticky výhodné, když se vzduchové mezery v kapesníčku nahradí vodou;

[7] Ano, každé rozhraní dvou látek má svoji energii. Její velikost závisí na velikosti plochy rozhraní a také na tzv. povrchovém napětí, které závisí na materiálech, mezi kterými rozhraní zkoumáme.

takto „uvolněná“ energie se pak spotřebuje na dosud nevysvětlené stoupání vody a zkoumaný jev tedy může nastat.

Měření

Pokud postupujeme podle zadání, není těžké si kapesníčky připravit k měření. My jsme kapesníček pověsili nad misku s vodou tak, aby byl kapesníček ponořen do hloubky 1 cm pod hladinu. Tak dosáhneme optimální kontakt kapesníčku s vodou a zároveň můžeme měřit stoupání vody o centimetry podle předem nakreslené stupnice.

Ovšem přesné měření času bylo trochu obtížné, neboť voda se do kapesníčku nenasávala úplně rovnoměrně a hranice suché a smáčené části nebyla vůbec rovná. Největší obtíž jsme pozorovali v okolí místa, kde byl kapesníček přeložen. Měřený časový úsek jsme tedy zaznamenali v momentu, kdy hranice smáčeného kapesníčku již z větší části překročila přes měřenou hranici. Všechny naměřené hodnoty časů t pro pět různých kapesníčků a osm různých výšek i jejich průměry uvádíme v tabulce 2.

Na popsání nepřesnosti jednotlivých měření jsme vypočítali i nepřesnosti vypočítaných průměrů, a to velmi jednoduchým způsobem, který se ve fyzice velmi často využívá:

1) od naměřených časů jsme odečetli průměr a tento rozdíl jsme umocnili na druhou,
2) tyto čísla jsme v rámci jednoho měření sečetli,
3) součet jsme vydělili výrazem $N\,(N+1)$, kde N je počet měření, tzn. v našem případě $N = 5$ a $N\,(N+1) = 5 \cdot 6 = 30$,
4) nakonec jsme toto číslo odmocnili.

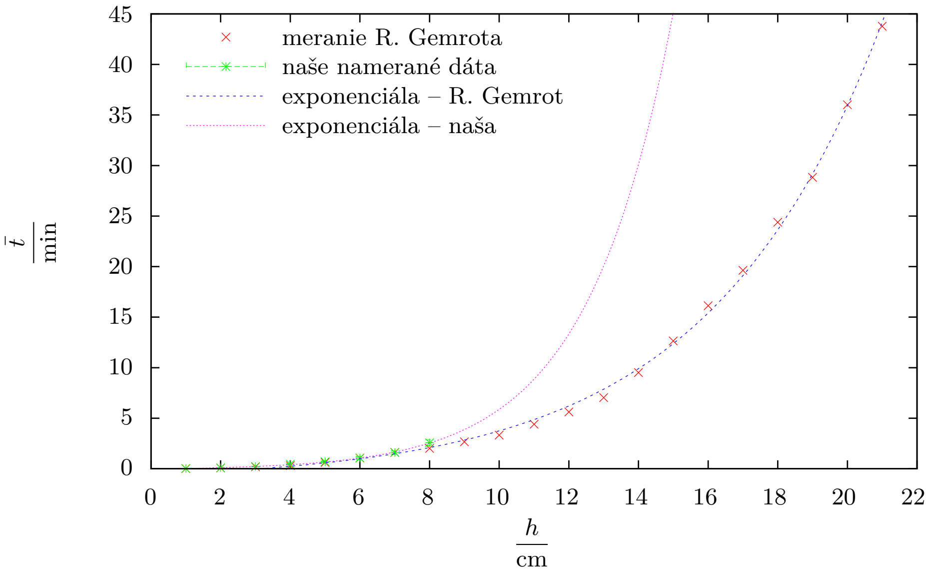
Tabulka 2: Naměřené hodnoty. Výška h označuje počátek měřeného úseku, tzn. v prvním sloupci jsou uvedeny časy, za které hranice smáčené části kapesníčku vystoupala z výšky 1 cm do výšky 2 cm.

$\frac{h}{\text{cm}}$	naměřené časy t/s A	B	C	D	E	$\frac{\bar{t}}{\text{s}}$	$\frac{\sigma}{\text{s}}$
1	1,0	1,9	1,0	1,0	1,2	1,2	0,2
2	6,0	6,1	4,7	3,2	6,9	5,4	0,6
3	15,4	14,0	13,4	11,7	14,0	13,7	0,5
4	34	34	34	22	38	27	4
5	66	44	49	31	54	41	6
6	98	65	68	53	96	64	9
7	132	106	107	95	133	96	10
8	208	179	173	144	216	154	17

V tabulce je tato nepřesnost uvedena v posledním sloupci a označena řeckým písmenem σ (sigma). Na závěr jsme spočítané průměry vynesli do grafu na obrázku 7.

Nepřesnosti měření zde uvádíme jako chybové úsečky (ikdyž jsou vůči rozsahu grafu opravdu malé). Vidíme, že čas potřebný na smáčení dalšího a dalšího centimetru kapesníčku velmi rychle roste. Ve fyzice se velká část takto rostoucích procesů řídí exponenciální funkcí.[8]

Tuto funkci, v počítači naškálovanou tak, aby nám co nejpřesněji kopírovala naše data, uvádíme rovněž v grafu na obrázku. Vidíme, že shoda dat s funkcí je v rámci chyb velmi dobrá. Tím jsme ukázali, že nasávání vody do kapesníčků není vůbec chaotický proces, právě naopak, zajisté se řídí nějakým, nám neznámým zákonem.



Obr. 7: Graf závislosti času zmáčania 1 cm kapesníčku na výške zmáčaného rozhrania

Poznámky k došlým řešením

Najčastejšia (a v podstate jediná zásadná) chyba, ktorú urobilo niekoľko z vás, sa týkala osí grafu. V zadaní sme od vás požadovali zostrojiť závislosť času na výške zmáčanej časti. Táto formulácia znamená, že čas budeme vynášať na zvislú a výšku na vodorovnú os, nie naopak. Naviac, medzi fyzikmi je zaužívané pravidlo, že veličinu, ktorú *meriame*, vynášame takmer vždy na zvislú os. Za túto chybu som vám strhol jeden bod.

Rovnako bod som strhol riešiteľom, ktorí poslali riešenie obsahujúce iba tabuľku s číslami a graf (aj keď často správny), no žiaden slovný komentár o tom, ako meranie prebiehalo. Na druhej strane chcem pochváliť riešiteľov, ktorí si všimli rôzne zaujímavé vlastnosti experimentu a podelili sa s nami o ne.

[8] Exponenciální funkce, zkráceně exponenciála, je funkce typu $y = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} \doteq 2{,}72$ je Eulerovo číslo. Více o exponenciální funkci nalezněte ve Výfučtení 5. série 4. ročníku na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`.

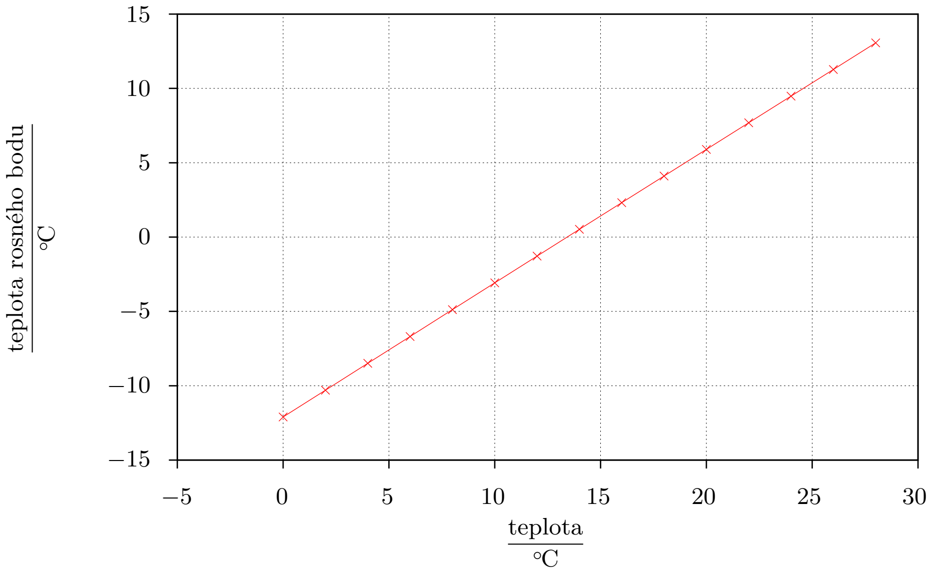
Na záver musím ale dodať, že takmer všetci ste namerali kvalitné dáta, ktoré naozaj ukazovali, že nameraná závislosť je exponenciálna. Vďaka výnimočne trpezlivým riešiteľom máme vzlínanie vody namerané až do nasiaknutia vody do celého kapesníčku (jedno meranie tak trvalo takmer hodinu). Namerané hodnoty Roberta Gemrota si môžete prezrieť na obrázku 7.

Patrik Švančara
pato@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.C ... Oblaka

7 bodů; průměr 6,00; řešilo 34 studentů

a) *David na podzim změřil, že teplý vzduch o teplotě $t_0 = 20\,°\mathrm{C}$ a relativní vlhkosti $r_0 = 40\,\%$ stoupá nahoru při suchoadiabatickém gradientu o velikosti $G = 1\,°\mathrm{C}/100\,\mathrm{m}$. V jaké výšce se z tohoto vzduchu začnou tvořit oblaka (tzn. relativní vlhkost vzduchu bude $r = 100\,\%$)?*



Obr. 8: Závislost teploty rosného bodu pro 40% vlhkost

b) *Paťo jednou testoval zvláštní oblak plynu. Ve své laboratoři změřil, že jeho vzorek plynu má hustotu $\varrho = 1{,}84\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, teplotu $t = 27{,}7\,°\mathrm{C}$ a tlak $p = 100\,\mathrm{kPa}$.*
Chemická analýza Paťova plynu ukázala, že plyn se skládá z jednoho druhu molekul, jež obsahují pouze kyslík a dusík. Vypočítejte molární hmotnost Paťova plynu a určete, o jaký plyn jde. Pokud si s určením nevíte rady, poproste o pomoc svého učitele chemie či fyziky.

a) Z grafu ze zadání vyčteme, že pro teplotu vzduchu $t_0 = 20\,°\mathrm{C}$ při relativní vlhkosti $r_0 = 40\,\%$ má rosný bod hodnotu $t_{\mathrm{rb}} = 6\,°\mathrm{C}$. Protože se při stoupání bude tento vzduch suchoadibaticky ochlazovat, tak jeho teplota bude klesat podle suchoadiabatického teplotního gradientu o velikosti $G = 1\,°\mathrm{C}/100\,\mathrm{m}$. Protože je potřeba, aby teplota klesla o $\Delta t = t_0 - t_{\mathrm{rb}} = 14\,°\mathrm{C}$, tak vzduch bude muset vystoupat o

$$\Delta h = \frac{\Delta t}{G} = \frac{14\,°\mathrm{C}}{1\,°\mathrm{C}/100\,\mathrm{m}} = \frac{14\,°\mathrm{C}}{1\,°\mathrm{C}} \cdot 100\,\mathrm{m} = 1\,400\,\mathrm{m}\,.$$

Aby se vzduch ochladil o $14\,°\mathrm{C}$, musí vystoupat o $1\,400\,\mathrm{m}$ výše.

b) Z rovnice pro hustotu vzduchu z Výfučtení, v níž se vyskytuje molární hmotnost, si ji vyjádříme:

$$\varrho = \frac{pM}{RT} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\varrho RT}{p}\,.$$

Do tohoto tvaru budeme moci dosadit, ale nejdříve budeme muset převést všechny zadané veličiny do základních jednotek. Tlak je $p = 100\,\mathrm{kPa} = 100\,000\,\mathrm{Pa}$, teplotu bude potřeba převést na termodynamickou teplotu, tzn. $T = t + 273{,}15\,\mathrm{K} = (27{,}7 + 273{,}15)\ \mathrm{K} = 300{,}85\,\mathrm{K}$. Nyní již skutečně můžeme dosadit:

$$M = \frac{\varrho RT}{p} = \frac{1{,}84\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \cdot 300{,}85\,\mathrm{K}}{100\,000\,\mathrm{Pa}} \doteq 0{,}046\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}} = 46\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}\,.$$

Molární hmotnost prvku vyčteme z periodické tabulky prvků, její číselná hodnota odpovídá relativní atomové hmotnosti daného prvku v jednotce $\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Zjistíme, že relativní atomová hmotnost dusíku je 14 a kyslíku 16. Protože $14 + 16 + 16 = 46$, molekula hledaného plynu bude obsahovat jeden atom dusíku a dva atomy kyslíku. Paťův plyn je tedy NO_2 (oxid dusičitý).

David Němec
`david@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	5	6	7	7	7	**42**	**128**
1.	*Martin Kysela*	G Český Krumlov	4	5	5	3	5	7	7	**36**	**89**
2.–3.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	5	5	5	6	4	–	–	**25**	**60**
2.–3.	*Patrik Rosenberg*	ZŠ Tuháčkova, Brno	5	2	5	3	–	7	–	**22**	**60**
4.	*Pavel Šimůnek*	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	4	–	–	–	–	6	–	**10**	**17**
5.	*Sára Božoňová*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	5	6	7	7	7	**42**	**128**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	5	5	5	5	7	7	7	**41**	**121**
2.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	5	3	5	4	4	6	7	**34**	**106**
3.	*Kryštof Pravda*	G Mensa, Praha	5	5	5	6	4	4	–	**29**	**95**
4.	*Ester Galiová*	ZŠ a MŠ Středokluky	5	4	5	6	5	6	–	**31**	**93**
5.	*Ondřej Valášek*	ZŠ V. Kl. Klicpery, Nový Bydžov	3	3	5	6	1	3	3	**24**	**86**
6.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	5	5	–	–	–	7	7	**24**	**69**
7.	*Tomáš Kudrnáč*	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	–	3	5	3	1	6	–	**18**	**61**
8.–9.	*Adam Krška*	G Mikulov	–	–	–	–	–	–	–	–	**53**
8.–9.	*Filip Temiak*	G Český Krumlov	5	3	5	–	1	7	–	**21**	**53**
10.	*Tomáš Kavena*	Křesťanské G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**50**
11.	*Natálie Křivancová*	G Český Krumlov	5	3	5	1	–	4	–	**18**	**45**
12.	*Martin Kolovratník*	ZŠ Pardubice - Studánka	5	5	5	4	2	5	–	**26**	**36**
13.–14.	*David Kocian*	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	1	3	3	1	1	3	–	**12**	**27**
13.–14.	*Tomáš Trtík*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
15.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	3	5	–	–	–	6	–	**14**	**26**
16.	*Vojtěch Vincíbr*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
17.–18.	*Filip Matůš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
17.–18.	*Luboš Petráň*	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	–	–	–	4	–	–	–	**4**	**19**
19.	*Isabela Andreevská*	Spec. soukromé G Integra, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
20.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
21.	*Barbora Vosková*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
22.–24.	*Honza Bartoš*	První české G, Karlovy Vary	–	–	5	–	–	–	–	**5**	**14**
22.–24.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	3	–	–	–	–	6	–	**9**	**14**
22.–24.	*Robert Jaworski*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
25.–26.	*Jakub Hembera*	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
25.–26.	*Marie Vondrášková*	ZŠ Strýčice, Hluboká nad Vltavou	3	–	–	–	–	2	–	**5**	**12**
27.–28.	*Emma Kodyšová*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	–	–	3	–	3	**11**	**11**
27.–28.	*Miroslav Kotsyba*	ZŠ a MŠ Helsinská, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
29.	*Monika Bambuchová*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
30.	*Anežka Zobačová*	ZŠ Vratislavovo nám., NMnM	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
31.	*Jakub Tománek*	ZŠ Hošťálková	–	–	–	–	–	–	–	–	**1**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**III**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	6	7	7	7	**37**	**113**
1.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	–	5	5	6	7	7	7	**37**	**110**
2.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	3	5	6	7	7	7	**35**	**106**
3.	*Lubor Čech*	G Mikulov	–	3	5	6	3	7	6	**30**	**98**
4.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	–	4	5	6	5	5	7	**32**	**96**
5.	*Michal Grus*	G Dobruška	–	5	5	5	2	7	7	**31**	**89**
6.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	4	5	6	7	7	5	**34**	**83**
7.	*Jiří Zikmund*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	4	4	5	2	3	7	**25**	**74**
8.	*Julie Rubášová*	Biskupské G, Brno	–	3	5	3	3	6	–	**20**	**70**
9.–11.	*Filip Holoubek*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	3	5	3	1	5	3	**20**	**62**
9.–11.	*Filip Řeháček*	Klasické a španělské G, Brno	–	3	5	–	–	–	–	**8**	**62**
9.–11.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	–	5	6	–	6	–	**17**	**62**
12.–13.	*Tereza Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	5	5	4	2	5	7	**28**	**61**
12.–13.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	–	3	5	3	1	6	4	**22**	**61**
14.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	3	5	4	2	2	–	**16**	**55**
15.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	3	5	6	1	5	4	**24**	**50**
16.	*Ondřej Polanecký*	1. ZŠ TGM Milevsko	–	3	5	4	2	–	7	**21**	**47**
17.	*Vojtěch Kuchař*	ZŠ Sobotka	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**43**
18.	*Radim Šafář*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**37**
19.	*Andriy Volvach*	ZŠ Na Smetance, Praha 2	–	–	5	–	–	–	–	**5**	**30**
20.–21.	*Ondřej Man*	ZŠ T. G. Masaryka Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
20.–21.	*Jiří Zinecker*	G Komenského, Havířov	–	3	5	4	3	4	3	**22**	**29**
22.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	–	5	–	–	–	6	–	**11**	**28**
23.	*František Krůs*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
24.–25.	*Eliška Novotná*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	3	5	3	–	5	7	**23**	**23**
24.–25.	*Lada Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	0	6	1	3	–	**15**	**23**
26.–27.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
26.–27.	*Marek Novák*	G, Písek	–	5	5	3	2	5	–	**20**	**20**
28.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
29.	*Eliška Švecová*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
30.	*Petr Budai*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
31.–32.	*Jakub Salaj*	G Uničov	–	3	5	5	2	–	–	**15**	**15**
31.–32.	*Filip Trhlík*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
33.	*Anna Sovová*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
34.	*Adam Závora*	15. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
35.–37.	*Šimon Kovalčík*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
35.–37.	*Pavel Malik*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
35.–37.	*Jan Zemek*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
38.	*David Zatloukal*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**
39.	*Jan Zindr*	ZŠ Poštovní, Karlovy Vary	–	–	2	–	–	–	–	**2**	**2**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**III**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	6	7	7	7	**37**	**113**
1.	*Václav Zvoníček*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	5	6	7	7	7	**37**	**111**
2.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	5	5	6	7	7	7	**37**	**110**
3.	*Šimon Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	5	4	7	6	7	**34**	**103**
4.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	5	6	3	6	7	**32**	**94**
5.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	3	5	5	5	5	7	**30**	**92**
6.	*Adam Vavrečka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	5	6	4	6	7	**33**	**84**
7.	*Aneta Pouková*	ZŠ Horní Čermná	–	2	5	4	5	7	7	**30**	**83**
8.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	2	5	3	5	6	7	**28**	**82**
9.	*Filip Wagner*	G Tišnov	–	3	5	4	6	6	7	**31**	**81**
10.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	5	5	5	1	5	7	**28**	**80**
11.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	5	4	2	6	7	**29**	**78**
12.	*Pavla Rudolfová*	ZŠ Komenského náměstí, Slavkov u	–	3	5	6	2	6	4	**26**	**74**
13.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	5	–	3	6	–	**19**	**64**
14.	*Filip Novotný*	G Jihlava	–	3	5	4	–	–	–	**12**	**61**
15.	*Miroslav Jarý*	ZŠ Velké Poříčí	–	4	–	5	–	7	–	**16**	**57**
16.	*Karel Šebela*	Katolické gymnázium Třebíč	–	5	5	4	7	6	3	**30**	**56**
17.	*Martin Bína*	G, Moravská Třebová	–	4	–	3	1	–	–	**8**	**55**
18.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	3	5	–	–	7	–	**15**	**53**
19.–20.	*Jaroslav Scheinpflug*	ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Bud	–	3	5	3	2	7	–	**20**	**52**
19.–20.	*Jan Vondra*	G Týn nad Vltavou	–	3	5	1	3	6	–	**18**	**52**
21.	*Václav Pavlíček*	ZŠ a MŠ Ždírec nad Doubravou	–	3	–	–	–	7	–	**10**	**47**
22.	*Michal Suk*	ZŠ Svisle, Přerov, Přerov I - Mě	–	3	4	–	–	4	–	**11**	**41**
23.	*Adam Nekolný*	G, Písnická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**39**
24.–25.	*Jakub Bartoš*	G, Písnická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
24.–25.	*Tomáš Salavec*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
26.–27.	*Martin Flídr*	G Masarykovo nám., Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
26.–27.	*Lenka Tomanová*	ZŠ Měřín	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
28.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**22**
29.	*Mária Volmanová*	ZŠ Kollárova, Jihlava	–	3	5	–	–	–	–	**8**	**20**
30.	*Petr Doubravský*	ZŠ a MŠ J. A. Komenského Nové St	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**18**
31.	*Vojtěch Ježek*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
32.–33.	*Victoria Grundlerová*	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
32.–33.	*Jiří Hocek*	ZŠ Veronské náměstí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
34.–36.	*Eva Horalíková-Polášková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	5	–	–	–	5	**15**	**15**
34.–36.	*Jan Macek*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
34.–36.	*Alena Osvaldová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
37.	*Alice Janáčková*	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
38.–40.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
38.–40.	*Lucie Kunčarová*	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
38.–40.	*Roman Varfolomieiev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10	–	3	3	–	–	2	–	**8**	**12**
41.	*Dita Chabičovská*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
42.–43.	*Jindřich Dítě*	ZŠ Komenského, Žďár nad Sázavou	–	5	–	5	–	–	–	**10**	**10**
42.–43.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**10**
44.	*Eva Jurčeková*	ZŠ sv. Voršily Praha 1	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
45.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
46.	*Klára Šenkeříková*	ZŠ a MŠ Nedašov	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
47.	*Petr Čerych*	ZŠ Sobotka	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**
48.	*Jakub Ucháč*	ZŠ Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://vyfuk.mff.cuni.cz
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.