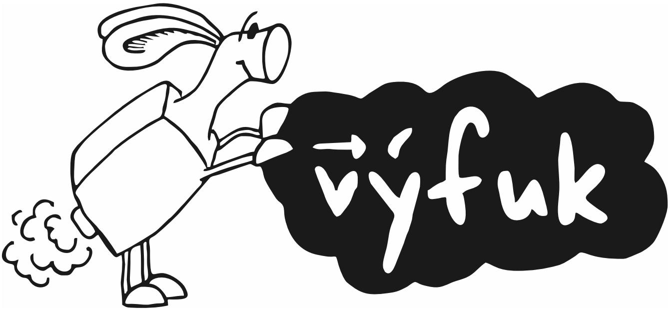


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

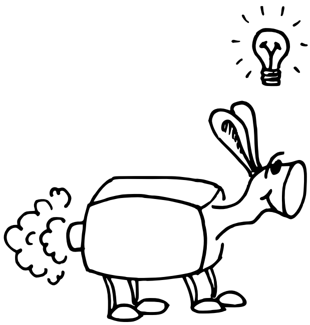
do rukou se vám dostává již čtvrtá brožurka Výfuku. Kromě zadání 4. série a dalšího Výfučtení v ní naleznete vzorová řešení k úlohám druhé série. Vzorová řešení série třetí si můžete zatím prohlédnout na našem webu v sekci Archiv úloh.

Pozorně sledujte i sekci Pořadí, kde se pokusíme co nejdříve přidat souhrnnou výsledkovou listinu za první tři série, neboť tyto výsledky rozhodnou, zda-li vás na Letní tábor Výfuku pozveme řádně, nebo jako náhradníky. Připomínáme, že tábor se letos uskuteční ve dnech 31. 7. – 13. 8. v Uhelné Příbrami.

Nakonec bychom vám chtěli oznámit, že 10. února v 9 hodin se uskuteční druhý ročník online týmové matematické soutěže MatX, kterou pořádá organizace P-Mat. Soutěž je určena pro čtyřčlenné týmy ze 7.-9. třídy ZŠ nebo odpovídajících ročníků osmiletých gymnázií. Registraci a další informace hledejte na stránce soutěže.[1]

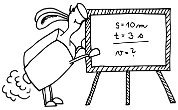
Hodně zdaru v řešení této série vám přejí

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

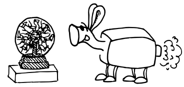


[1] http://matx.p-mat.sk/

matfyz



Zadání IV. série

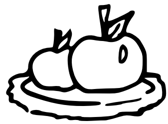


Termín doručení: 22. 2. 2016 20.00

Úloha IV.1 ... Záhadný fix ❻ ❼ 5 bodů

Andřejka při kreslení Výfučka přemýšlela, z jakých barev se skládá její černý fix. Spolu se zadáním Vám posíláme pět vzorků[2] Andřejčiny fixy na savém papíře. Pomůžete jí zodpovědět její otázku? Do řešení nezapomeňte uvést i postup, jak jste jednotlivé barvy zjistili.

Úloha IV.2 ... Křížaly ❻ ❼ ❽ ❾ 4 body



Pavla měla doma 10 kg jablek, a protože má velice ráda křížaly (sušená jablka), usmyslela si, že všechna jablka usuší. Rozkrájela je tedy na tenké plátky a nechala je pořádně proschnout. Když jablka vyschla, Pavla zjistila, že má pouze 4 kg křížal. Bylo jí hned jasné, že je to způsobeno odpařením vody z jablek. Jelikož je velmi zvídavá, rozhodla se spočítat, kolik váží voda, která v křížalách zbyla. Pomůžete to Pavle spočítat, jestliže víte, že před sušením voda v jablkách tvořila 80 % jejich hmotnosti?

Úloha IV.3 ... Lanoběžec ❻ ❼ ❽ ❾ 4 body

Kuba se přihlásil do silácké soutěže. Jednou z disciplín byl běh na pružném laně s jednoduchými pravidly: přivázat si lano, jehož jeden konec byl pevně uchycen v držáku, kolem pasu a doběhnout co nejdál od držáku. Jak daleko Kuba doběhl, pokud dokáže při běhu vyvinout maximální sílu 1 kN? Klidová délka lana je 25 m a má tuhost $220\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Délku lana potřebnou k přivázání zanedbejte.

Úloha IV.4 ... Výkonné Slunce ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Družice na zemské oběžné dráze změřily, že výkon slunečního záření, které dopadá na plochu jeden metr čtvereční (tzv. solární konstanta), je v okolí Země $k = 1\,361\,\mathrm{W/m^2}$. Dále se družicím povedlo změřit vzdálenost Země od Slunce, která činí $s = 149{,}6 \cdot 10^6$ km.

(a) Spočítejte, jaký je výkon celého Slunce, předpokládáte-li, že Slunce vyzařuje energii rovnoměrně do celého prostoru a energie se při šíření vesmírem nikde neztrácí.

(b) Astronomům se z mnoha měření povedlo zjistit, že průměr Slunce je $d = 1\,390\,000$ km. Navíc se jim ale povedlo zjistit, že intenzita záření a povrchová teplota hvězd spolu souvisí prostřednictvím vztahu

$$I = \sigma T^4\,,$$

kde I je intenzita záření[3] hvězdy na jejím povrchu, T je termodynamická teplota (v kelvinech) na povrchu hvězdy a $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Dokážete podle výsledků z předchozího bodu určit teplotu na povrchu Slunce?

[2] Pět vzorků jsme poslali pouze řešitelům ze šestých a sedmých ročníků. Ostatním řešitelům jsme poslali pouze jeden vzorek na vyzkoušení, jelikož úloha je určena pouze pro mladší řešitele.

[3] Intenzita záření na povrchu je definována jako výkon hvězdy děleno její povrch.

Úloha IV.5 ... Přehrada ❻ ❼ ❽ ❾ ☆ 7 bodů

Denisa si v létě zajela na výlet k přehradě. Při její prohlídce si přečetla, že kruhová výpusť přehrady se nachází v hloubce $h = 50\,\mathrm{m}$ pod úrovní hladiny vody v přehradě. Denisu překvapilo, jak bouřlivě voda z výpusti vytéká, a tak se začala zamýšlet nad tím, jestli lze výtokovou rychlost vody vypočítat.

Denisa přišla na to, že neustálé odtékání vody z přehrady při neměnné výšce hladiny si lze představit i tak, jakoby se voda přitékající na hladinu najednou „teleportovala“ do výpusti.[4]

(a) Představte si, že se takto teleportuje objem vody V. Pomocí tohoto objemu, hustoty vody ϱ, výšky h a tíhového zrychlení g vyjádřete změnu potenciální energie E_p tohoto objemu.

(b) Denisa zjistila, že asi $k = 63\,\%$ z této energie se promění na energii kinetickou. S pomocí tohoto poznatku nejdříve vyjádřete rychlost vody ve výpusti v pomocí veličin ϱ, h, k, g a V (není potřeba použít všechny), a pak rychlost vody vypočítejte i číselně.

(c) Řeka, která do přehrady přivádí veškerou vodu, má v létě průtok $Q = 10\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. Inženýři při stavbě přehrady ale počítali s tím, že na jaře, kdy řeka může mít průtok i $50Q$, bude mít výpusť dostatečný průměr na to, aby voda pořád odtékala rychlostí v. Jaký je tento průměr?

Úloha IV.E ... Skleničky ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

Zajisté jste již slyšeli, že na tenkostěnnou skleničku lze „hrát“.[5] Výška tónu, který sklenička vydává, je daný zejména tloušťkou a tvarem skleničky, ale také množstvím nápoje, který se v skleničce nachází. Nás by velmi zajímalo, jak závisí výška tónu na tom, kolik do skleničky nalijete vody. Od rodičů si tedy půjčte tenkostěnnou skleničku a pro několik výšek vody zkuste skleničky rozezvučet. Pak odpovězte na tyto otázky:

(a) Seřaďte jednotlivá „měření“ podle výšky tónu. Je mezi výškou hladiny v skleničce a výškou tónu nějaká souvislost?

(b) Hraje prázdná sklenička nejhlubším, nebo nejvyšším tónem?

(c) Změřte, pro jakou výšku hladiny vody v skleničce se vám již nepovede skleničku rozezvučet. Měření několikrát zopakujte a výslednou výšku hladiny vydělte výškou hladiny, když je sklenička naplněná až po okraj.

Chcete-li výšky tónů měřit opravdu vědecky, nainstalujte si volně šiřitelný program pro zpracování zvuků Audacity.[6]

[4] Ve skutečnosti je dynamika odtékání vody komplikovanější, nicméně tento jednoduchý model nám bohatě postačí.

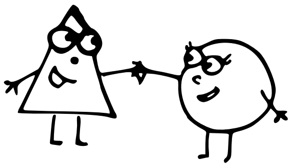
[5] Kdo hrající skleničku neslyšel, pusťte si video: `https://youtu.be/9iSsaKnPmLM`.

[6] Po nahrání zvuku do programu se vám v programu zobrazí zaznamenaná stopa. Pomocí tlačítka „Delete“ ořežte od stopy nechtěné části záznamu (např. začátek a konec), a pak v horním menu klikněte na „Analyzovat“ → „Zobrazit spektrum“. Zobrazí se vám graf závislosti intenzity signálu (v decibelech) na frekvenci (v hertzích). Program stahujte na stránce `http://audacityteam.org/download/?lang=cs`.

Úloha IV.C ... Stavebnice ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Radka zahájila na půdě úklid, při kterém našla starou stavebnici. Zjistila, že dílky stavebnice jsou různé geometrické útvary. Nejvíce tam bylo trojúhelníků se stranami dlouhými 3 cm, 4 cm a 5 cm.

(a) Kolik těchto trojúhelníkových dílů se vejde na čtvercový plán o rozměrech 24 cm × 24 cm tak, aby se trojúhelníky nepřekrývaly?
(b) Radka našla i trojúhelníky s dvojnásobnými rozměry. Kolikrát méně těchto větších útvarů se jí povede uložit na stejně velký plán?
(c) Protože kousků v Radčině stavebnici bylo málo, chtěla si z papíru vyrobit další hezké útvary. Pod hezkým útvarem si Radka představuje středově a zároveň osově symetrický útvar. Navrhněte alespoň tři útvary, které splňují tyto podmínky symetrie, a nakreslete osu i střed jejich souměrnosti.
(d) Nakonec Radka prozkoumala všechny části stavebnice a našla také rovnoramenný lichoběžník, jehož strany vyjádřeny v centimetrech jsou celá čísla a jehož obsah je $36\,\mathrm{cm}^2$. Jaké mohou být délky stran Radčina lichoběžníku?



Výfučtení: Geometrické útvary a zobrazení

V geometrii občas narazíme na to, že některé geometrické obrazce vykazují jistou symetrii. Popřípadě můžeme slyšet, že nějaké dva útvary jsou si *podobné*. V tomto Výfučtení budeme hovořit právě o geometrických operacích, které se symetriemi a podobnostmi úzce souvisí.

Základní geometrické útvary

Úvodem si připomeňme základní dvourozměrné geometrické útvary a jejich zajímavé vlastnosti.

Kružnice a kruhy

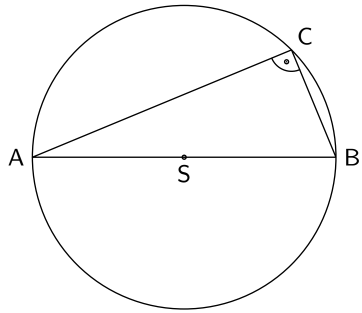
Víte, jaký je rozdíl mezi kruhem a kružnicí? Jednoduše řečeno, kruh je kružnicí ohraničen. Z toho vyplývá, že kružnice nemá obsah, ale jen obvod, kdežto kruh má jak obsah, tak i obvod. Pro obvod kruhu (resp. kružnice) a obsah kruhu o poloměru r platí

$$o = 2\pi r\,, \qquad S = \pi r^2\,.$$

Známe i význačné kružnice, které jsou *opsané* nebo *vepsané* nějakému obrazci (nejčastěji se setkáte s opisováním kružnice trojúhelníkům nebo čtyřúhelníkům). Vepsaná kružnice se dotýká obrazce zevnitř v jednom bodě každé jeho strany. Střed vepsané kružnice se nachází v průsečíku os vnitřních úhlů tohoto obrazce. Jako opsanou kružnici označujeme takovou, na níž leží *všechny* vrcholy obrazce. Existují tedy i obrazce, kterým kružnici opsat nelze (žádná kružnice splňující uvedenou podmínku neexistuje).

Platí tvrzení, že všem trojúhelníkům lze opsat kružnici. (Její střed leží v průsečíku os jeho stran.) Co se týká čtyřúhelníků, ne všem jde opsat nebo vepsat kružnice (zkuste si nějaký příklad třeba jen načrtnout).

Speciální opsané kružnici se říká *Thaletova kružnice*, podle řeckého filosofa a geometra Thaléta z Milétu. Označíme-li AB průměr kružnice, pak platí, že libovolná poloha bodu C na oblouku kružnice (mimo body A a B) vytvoří pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C (viz obrázek 1). Stejně tak platí, že opíšeme-li pravoúhlému trojúhelníku kružnici, bude přepona jejím průměrem. Střed Thaletovy kružnice pak splývá se středem přepony pravoúhlého trojúhelníku, kterému je opsaná.



Obr. 1: Thaletova kružnice

Čtyřúhelníky

Čtyřúhelníky jsou útvary se čtyřmi vrcholy, přičemž součet jejich vnitřních úhlů je 360°. Dělit čtyřúhelníky se dá podle více kritérií. Pokud se bavíme o vztazích platících mezi jednotlivými stranami, případně úhlopříčkami čtyřúhelníku, dělíme je na rovnoběžníky, deltoidy a lichoběžníky. Můžeme se ale bavit o čtyřúhelnících i ve spojitosti s právě zmíněnými kružnicemi opsanými a vepsanými.

Čtyřúhelníkům, kterým kružnici opsat lze, se říká *tětivové*. Takovýto útvar pak splňuje, že součet dvou protějších vnitřních úhlů je roven součtu zbylých dvou. (Díky zmíněnému celkovému součtu vnitřních úhlů víme, že součet dvou protějších vnitřních úhlů má velikost 180°.)

Čtyřúhelníkům, kterým jde kružnice vepsat, říkáme tečnové. U nich platí, že součet délek jeho protějších stran je stejný jako součet zbylých protějších stran.[7]

Rovnoběžníky mají čtyři strany tvořeny dvěma dvojicemi navzájem rovnoběžných stran. Mezi rovnoběžníky patří pravoúhelníky (čtverce, obdélníky) a kosoúhelníky (kosočtverce a kosodélníky). Obecně platí, že úhly rovnoběžníků nemusejí být pravé, avšak protilehlé úhly mají vždy stejnou velikost.

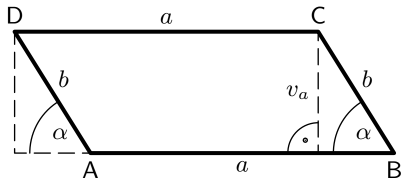
[7] Tzv. *dvojstředový čtyřúhelník* je takový, kterému lze zároveň vepsat i opsat kružnice, což není zcela běžná vlastnost. Nejjednodušším příkladem dvojstředového čtyřúhelníku je čtverec.

Každý rovnoběžník má čtyři výšky. Výška je úsečka kolmá na stranu, na kterou je vedena z nějakého vrcholu obrazce, a její délka v tomto případě odpovídá kolmé vzdálenosti protilehlých stran. Zavedení výšek jakožto kolmých vzdáleností se nám velice hodí třeba při výpočtu obsahu rovnoběžníku, viz níže.

Úhlopříčka je úsečka spojující dva protilehlé vrcholy – každý rovnoběžník má tedy dvě uhlopříčky, které se navzájem díky rovnoběžnosti půlí. Navíc v kosočtverci a čtverci jsou úhlopříčky na sebe kolmé. Dále pak čtverec a obdélník mají obě úhlopříčky stejně dlouhé.

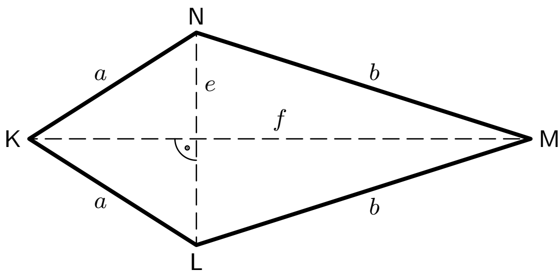
Obsah rovnoběžníku vypočítáme tak, že vynásobíme délku jedné strany s výškou na ni kolmou, viz obrázek 2:

$$S = av_a = bv_b = cv_c = dv_d\,.$$



Obr. 2: Na obrázku vidíme, že pokud bychom si „přemístili“ trojúhelník s úhlem α vpravo do míst vyznačených čárkovaně, z kosého útvaru se stane pravoúhlý se stranami o velikostech a a v_a. Tím pádem můžeme počítat jeho obsah jako obsah pravoúhelníku, tedy $S = av_a$.

Další skupina čtyřúhelníků jsou různoběžníky, mezi které patří deltoidy. Deltoid je osově symetrický podle *právě* jedné z úhlopříček čtyřúhelníku (viz obrázek 3).[8] Pro nás to zatím znamená, že má dvě nestejně dlouhé na sebe kolmé úhlopříčky, z nichž jedná půlí druhou a ne naopak (jinak by se jednalo o kosodélník, případně kosočtverec).



Obr. 3: Obecný deltoid

Obvod deltoidu určíme jednoduše jako $o = 2\,(a+b)$. K odvození obsahu si pomůžeme stejným obrázkem. V něm vidíme, že úhlopříčka f půlí celý deltoid na dva shodné trojúhelníky, s výškami rovnými $e/2$. Sečteme-li obsahy těchto trojúhelníků, spočítáme i obsah deltoidu:

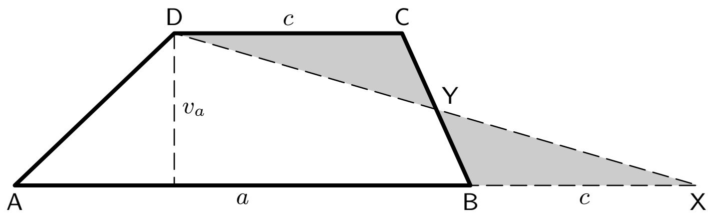
$$S = 2\frac{f\frac{e}{2}}{2} = \frac{ef}{2}\,.$$

[8] Co to je středová symetrie se dozvíte dále v textu.

Ve výpočtu jsme využili, že pro obsah trojúhelníku platí $S = av_a/2$, kde a je délka jedné ze stran a v_a je výška na tuto stranu kolmá.

Lichoběžník je útvar, jenž má právě dvě protilehlé strany rovnoběžné. Ty se nazývají základny a nejsou stejně velké (pak by se jednalo o rovnoběžník). Zbylým dvěma stranám říkáme ramena. Má-li lichoběžník ramena stejně dlouhá, říkáme mu *rovnoramenný* lichoběžník. Úhly, které svírá spodní základna s rameny, jsou si rovny, stejně tak i úhly u horní základny. Další ze specifických lichoběžníků je *pravoúhlý*, kdy právě jedno z ramen je kolmé na základny.

V lichoběžníku často uvažujeme jen jednu výšku v sloužící k popisu vlastností daného lichoběžníku, viz obrázek 4.



Obr. 4: Lichoběžník ABCD, na němž jsme odvodili vzorec pro jeho obsah

Obsah lichoběžníka vypočteme podle vzorce

$$S = \frac{(a + c)\, v}{2}\,.$$

Proč je tomu tak, si ukážeme pomocí obrázku 4, kde je nakreslený rovnoběžník ABCD. Když úsečku $\mathsf{AB} = a$ prodloužíme od bodu B o délku úsečky $\mathsf{CD} = c$ doprava, dostaneme bod označený X. Pokud spojíme tento bod s bodem D, vzniknou nám dva shodné trojúhelníky CDY a BXY. Poněvadž shodné trojúhelníky mají stejný obsah, platí, že obsah lichoběžníku ABCD je stejný jako obsah trojúhelníku AXD. Tento trojúhelník má výšku v shodnou s výškou lichoběžníka a stranu, na níž je tato výška kolmá, dlouhou $a + c$. Proto platí, že obsah trojúhelníku ADX a tudíž i obsah lichoběžníku je rovný $S = (a + c)\, v/2$.

Trojúhelníky

Na závěr si řekneme něco i o trojúhelnících. Obecně je trojúhelník útvar se třemi vrcholy a třemi vnitřními úhly, které mají dohromady 180°. Každý trojúhelník má tři výšky, které se protínají v jednom společném bodě zvaném orthocentrum, a tři těžnice (úsečky spojující vrcholy se středy protilehlých stran), které se spojují v tzv. těžišti. Uveďme si speciální trojúhelníky a některé základní vlastnosti, které v nich platí:

- V *rovnostranném* trojúhelníku jsou těžnice shodné s výškami.
- V *rovnoramenném* trojúhelníku je výška vedená na základnu shodná s odpovídající těžnicí.
- V *pravoúhlém* trojúhelníku výšky vedené na odvěsny splývají s odpovídajícími stranami trojúhelníka (nakreslete si obrázek).

Pravoúhlý trojúhelník má mnoho dalších zajímavých vlastností. Skrývají se v něm tzv. goniometrické funkce,[9] Thaletova kružnice a Pythagorova věta, jejíž slovní znění je: „obsah

[9] O goniometrických funkcích si můžete přečíst ve Výfučtení 4. série 2. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`.

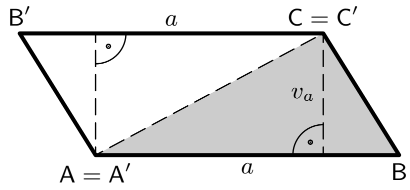
čtverce sestrojeného nad přeponou se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami“. Matematické vyjádření je mnohem kratší. Platí

$$c^2 = a^2 + b^2 ,$$

kde a a b jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a c je jeho přepona.

Pokud přiložíme dva shodné trojúhelníky a natočíme je k sobě tak, aby se dotýkaly podél nejdelší strany (nebo jedné z nejdelších stran, viz obrázek 5), vznikne nám rovnoběžník se stranami a a b a výškou v_a. Jelikož pro obsah rovnoběžníku platí $S = av_a$, obsah trojúhelníku bude poloviční, tzn.

$$S = \frac{av_a}{2} .$$



Obr. 5: Dva trojúhelníky tvořící rovnoběžník

Shodná zobrazení

Pod pojmem zobrazení v geometrii myslíme operaci, kdy vezmeme předmět (např. nějaký geometrický útvar jako je bod, úsečka, trojúhelník atd.), který zobrazíme podle nějakého pravidla na jeho obraz. Shodná zobrazení jsou taková, jejichž pravidlo nemění úhly ani vzdálenosti, tzn. obraz a vzor jsou z tohoto pohledu shodné geometrické útvary. Mezi shodná zobrazení patří posunutí, osová a středová souměrnost.

Posunutí

Posunutí je ze shodných zobrazení nejjednodušší. Značíme ho $T(\vec{v}) : \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$, což znamená, že jsme pouze přenesli daný bod A o danou vzdálenost daným směrem (podle vektoru $\vec{v}$[10]). Třeba čtverec ABCD se zobrazí na A′B′C′D′, tedy pro každý význačný bod čtverce (jeho vrchol) provedeme posunutí na jeho čárkovanou variantu a následně čárkované vrcholy spojíme. Tuto konvenci při konstrukci obrazu pomocí význačných bodů dodržujeme i níže.

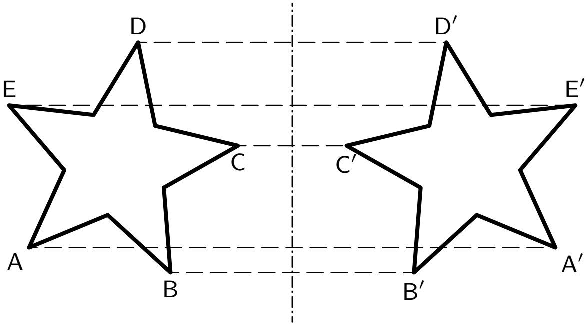
Osová souměrnost

Osová souměrnost funguje jako zrcadlo. Máme-li předmět, který chceme zobrazit osovou souměrností podle dané osy, postupujeme tak, že z každého bodu předmětu (u geometrických obrazců stačí z význačných bodů, vrcholů) vedeme kolmici k ose souměrnosti. Této kolmici

[10]Použití vektoru je jen záležitost značení posunutí, které uvádíme pro úplnost a není třeba nad tím v tuto chvíli hlouběji uvažovat. Důležité je jen, že posunujeme o nějakou vzdálenost nějakým směrem. Pokud vás však zajímá něco více o vektorech, můžete se o nich dočíst v našem Výfučtení ze 2. série 2. ročníku na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`.

říkejme třeba přímka k. Obraz daného bodu (vrcholu) leží na přímce k, na druhé straně od osy souměrnosti, než kde je předmět, a ve stejné vzdálenosti od osy souměrnosti jako daný bod.

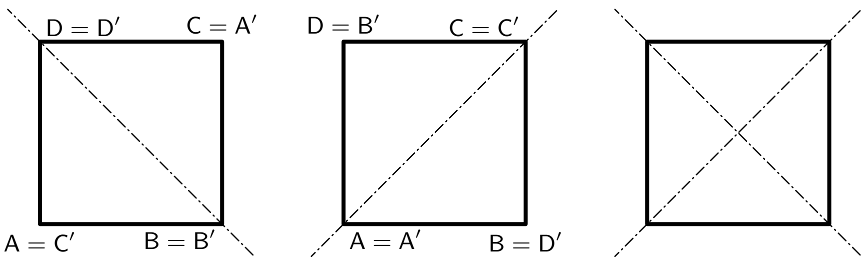
Tento obraz je vůči předmětu stranově převrácený, ale velikostně naprosto shodný. To znamená, že stejně velké jsou nejen příslušné strany, ale i úhly, výšky, těžnice, …(Což je, jak bylo zmíněno, obecná vlastnost *shodného* zobrazení.) Na obrázku 6 je podle osové souměrnosti zobrazena hvězda.



Obr. 6: Hvězda zobrazená v osové souměrnosti

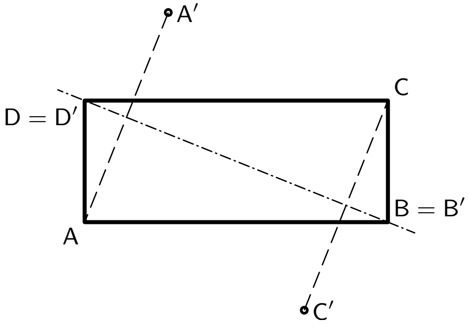
Matematicky toto zobrazení zapisujeme jako $O(o) : \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$ a čteme ho tak, že v osové souměrnosti podle osy o byl zobrazen bod A a vznikl jeho obraz bod A'.

Osově souměrný je potom takový obrazec, pro který existuje alespoň jedna osa souměrnosti procházející obrazcem, podle níž se daný obrazec zobrazí sám na sebe. Například čtverec je osově souměrný podle čtyř různých os, viz obrázek 7. Vidíme tedy, že u čtverce díky tomu, že má uhlopříčky stejně dlouhé a na sebe kolmé, splývají jeho dvě uhlopříčky s dvěma osami souměrnosti.

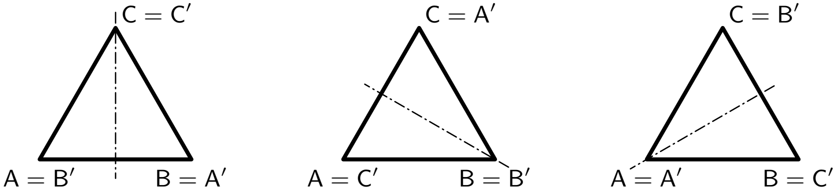


Obr. 7: Čtverec s vyznačenými osami souměrnosti, které splývají s uhlopříčkami a jsou na sebe kolmé

V obdélníku podobné splynutí os souměrnosti a uhlopříček nefunguje, protože jsme si řekli, že obraz leží na kolmici k ose souměrnosti, avšak uhlopříčky obdélníků nejsou obecně na sebe kolmé. Nefunkčnost této souměrnosti ilustruje obrázek 8.



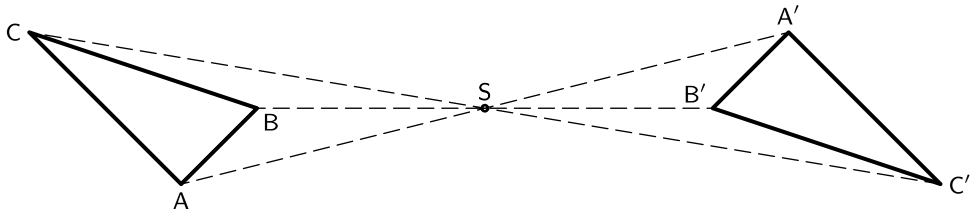
Obr. 8: Obdélník a jeho vrcholy zobrazené pomocí osové souměrnosti podle jedné z uhlopříček–vidíme, že obrazy vrcholů nesplývají s těmi původními. Obdélník tedy není osově souměrný podle uhlopříčky.



Obr. 9: Osy souměrnosti nalezneme i v rovnostranném trojúhelníku

Středová souměrnost

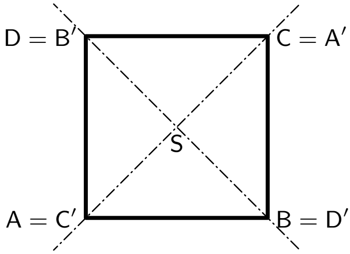
Středová souměrnost je zobrazení pomocí jediného bodu, jemuž říkáme *střed souměrnosti*. Ze všech bodů (vrcholů) předmětu pak tímto bodem vedeme přímku. Obraz bodu nalezneme, podobně jako v případě osové symetrie, ve stejné vzdálenosti od středu souměrnosti jako je bod. I zde platí, že obraz je opět velikostně naprosto shodný s předmětem. Tentokrát je ale převrácený jak stranově, tak i výškově. Na obrázku 10 jsme takto zobrazili trojúhelník.



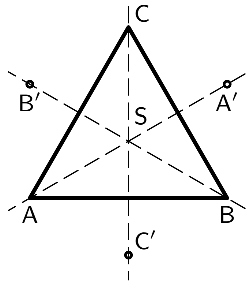
Obr. 10: Obecný trojúhelník zobrazený ve středové souměrnosti

Středovou souměrnost značíme $S(\mathsf{X}) : \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$, což znamená, že ve středové souměrnosti podle bodu X byl zobrazen bod A a vznikl tak jeho obraz A'.

Střed souměrnosti můžeme nalézt i v některých geometrických obrazcích. Pro existenci středové souměrnosti musí platit, že v daném útvaru existují dvě osy souměrnosti, které jsou na sebe kolmé. Střed souměrnosti je potom průsečík těchto os. Vzpomeňme si na čtverec, u něho jsme nalezli 4 osy souměrnosti, z nichž byly dvě a dvě na sebe kolmé a protínaly se ve středu čtverce – můžeme tedy říct, že čtverec je středově souměrný útvar se středem souměrnosti v průsečíku úhlopříček, viz obrázek 11.



Obr. 11: Čtverec a jeho obraz ve středové souměrnosti podle bodu S. Tento bod se nachází v průsečíku os souměrnosti.

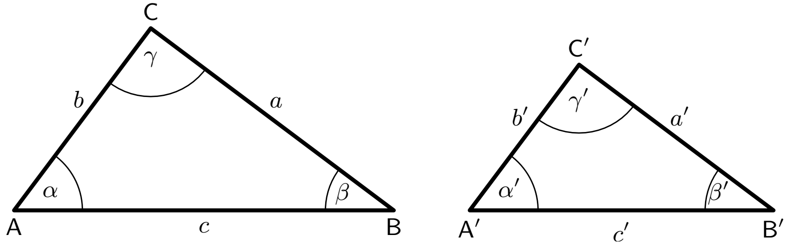


Obr. 12: U rovnostranného trojúhelníka jsme označili průsečík os souměrnosti S, avšak když podle něho zobrazíme ve středové souměrnosti vrcholy tohoto trojúhelníka, zjistíme, že nesplývají s původními. Rovnostranný trojúhelník tedy není středově souměrný, nemá střed souměrnosti.

Podobná zobrazení

Podobné útvary jsou v geometrii ty obrazce, které vypadají stejně, jen jsou různě zvětšené, či zmenšené. Matematicky tedy můžeme říci, že podobné útvary mají všechny odpovídající úhly stejně velké. Tato podmínka je splněna jen tehdy, když jsou všechny odpovídající si strany mezi zobrazovaným útvarem a jeho obrazem ve stejném poměru. Tzn. pokud například stranu a zmenšíme dvakrát, tak i všechny ostatní strany musí být zmenšeny dvakrát.

Pro čtverec platí, že má vždy všechny úhly pravé a všechny strany stejně dlouhé. Když tedy srovnáme dva různé čtverce, splňují obě podmínky podobnosti – můžeme tedy říct, že všechny čtverce jsou si mezi sebou navzájem podobné.



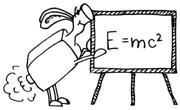
Obr. 13: Podobné trojúhelníky

Tabulka 1: Věty o podobnosti trojúhelníků

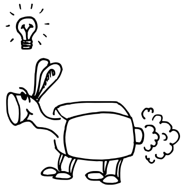
věta	formulace podmínky podobnosti	matematický zápis
sss	Příslušné strany jsou ve stejném poměru.	$a/a' = b/b' = c/c'$
uuu	Příslušné vnitřní úhly jsou shodné.	$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
sus	Dvě strany jsou ve stejném poměru a shodují se v úhlu jimi sevřeném.	$a/a' = b/b'$, $\gamma = \gamma'$
Ssu	Dvě příslušné strany jsou ve stejném poměru a shodují se v úhlu, který leží naproti větší z nich.	$b/b' = c/c'$, $\gamma = \gamma'$

K čemu nám může být podobnost dobrá? Pokud zjistíme, že nějaké dva obrazce jsou si podobné, často velmi snadno dokážeme dopočítat jejich strany nebo úhly. Velmi často se při řešení úloh setkáváme s podobností trojúhelníků. Aby bylo jednodušší zjistit, že nějaké trojúhelníky jsou si podobné, existují tzv. věty o jejich podobnosti. To jsou postačující podmínky na to, aby byly dva trojúhelníky podobné. Věty uvádíme shrnuty v tabulce 1 a značení stran a úhlů na obrázku 13. Za podobností je schován i fakt, že dokážeme-li nějakou vlastnost platící u jednoho útvaru, platí i v jeho libovolném obrazu (ať už shodném nebo podobném). To si můžeme představit na např. Pythagorově větě. Platí-li pro trojúhelník se stranami v poměru 3 : 4 : 5, pak platí pro libovolný trojúhelník se stranami v poměru $3x : 4x : 5x$, kde x je libovolné kladné reálné číslo.

Výše zmíněná pravidla nám mohou často pomoci i při řešení fyzikálních úloh, například u příkladů s nakloněnou rovinou se vyplatí hledat podobné trojúhelníky, které nám ulehčí rozklad sil do složek. Věříme, že vám znalost těchto pravidel pomůže a usnadní počítání.



Řešení II. série



Úloha II.1 ... Okno

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 18 studentů

Jednou se organizátoři sešli v osvětlené místnosti a povídali si dlouho do noci. Mezi řečí si David položil otázku, proč nevidí ven skrz okno, zatímco kdyby stál venku, tak dovnitř vidí krásně. Hned se zeptal ostatních, jak to funguje. Po chvíli si všichni uvědomili, proč tomu tak je. Přijdete na to i vy?

Klíčem k vyřešení úlohy je uvědomění si, co se děje se světelnými paprsky při dopadu na okno. Jak si lze všimnout, část světla vždy projde skrz sklo ven a část se odrazí zpět – proto můžeme na okně pozorovat mj. náš odraz. Množství (intenzita) světla, které se odrazí, je ovšem mnohem menší než množství prošlého světla.[11]

Jelikož David s ostatními organizátory sedí v osvětlené místnosti a venku je tma, je množství světla v místnosti o hodně větší než světlo přítomné venku. Proto pro někoho stojícího venku je množství světla, které se odrazilo od okna zvenku, zanedbatelně malé ve srovnání s množstvím světla, které projde z místnosti ven, a tato osoba tedy může bez problémů vidět dovnitř.

Naopak, pro Davida stojícího v místnosti je množství světla, které se od okna odrazí zevnitř, pořád větší než množství světla, které projde skrz z venku. David tedy vidí mnohem lépe svůj odraz v okně, než co se děje venku.

Lukáš Fusek
`lukas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Tereza Uhlířová
`teri@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.2 ... Bóje

4 body; průměr 2,89; řešilo 61 studentů

Andřejce se stýskalo po létě, a tak se jela slunit k moři. Při celodenním ležení na pláži si všimla, že bóje označující konec prostoru pro plavání je při odlivu vlnami posunuta směrem k pláži, kam až jí úvaz dovolí. Celkem to je o $9\,\mathrm{m}$ *oproti poloze při přílivu, kdy je úvaz právě tak dlouhý, aby bóje byla ještě na hladině. Jak dlouhý úvaz je, pokud je na Andřejčině pláži rozdíl hladiny při přílivu a odlivu* $5\,\mathrm{m}$*?*

Nejprve si musíme uvědomit, že při přílivu je výška hladiny stejná, jako je délka úvazu. Při odlivu je výška hladiny o $5\,\mathrm{m}$ menší než při přílivu, a tudíž o $5\,\mathrm{m}$ menší než délka úvazu. Toto snížení hladiny dovolí bóji posunout se o $9\,\mathrm{m}$ k pláži. Když si nakreslíme obrázek, bóje s úvazem tvoří ve své poloze při přílivu a odlivu pravoúhlý trojúhelník s přeponou rovnou délce úvazu, označenou x, a odvěsnami s délkami $9\,\mathrm{m}$ a $(x - 5\,\mathrm{m})$. Tyto hodnoty dosadíme do Pythagorovy věty:

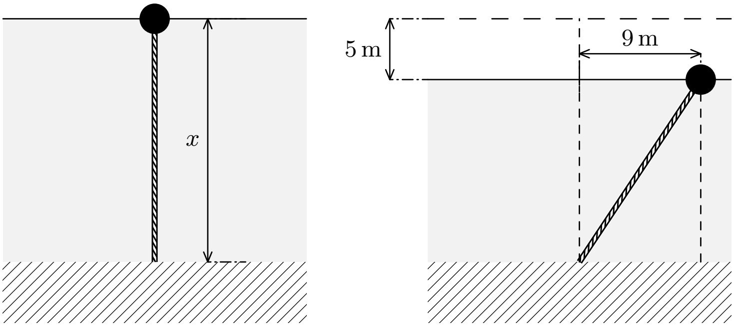
$$x^2 = (9\,\mathrm{m})^2 + (x - 5\,\mathrm{m})^2 \ ,$$

[11] Proto se sklo jeví jako průhledné, zatímco takové zrcadlo je neprůhledné, protože odráží téměř všechno dopadající světlo.

kde roznásobíme závorky[12] a vyjádříme x:

$$x^2 = 81\,\mathrm{m}^2 + x^2 + 10\,\mathrm{m}\cdot x + 25\,\mathrm{m}^2\,, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{81\,\mathrm{m}^2 + 25\,\mathrm{m}^2}{10\,\mathrm{m}} = 10{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Úvaz k bóji na Andřejčině pláži byl tedy dlouhý 10,6 m.



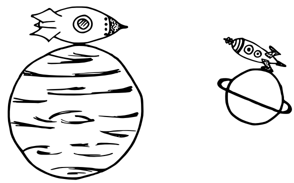
Obr. 14: Vlevo příliv, vpravo odliv

Kateřina Rosická
kacka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... Dobývání planet

6 bodů; průměr 3,96; řešilo 57 studentů

Píše se rok 3 333 a výzkum vzdálených planet je v plném proudu. Přednedávnem dvě kosmické lodě úspěšně přistály na dvou malých planetách, označených α a β. Obě lodě byly vybaveny citlivými senzory, které měřily základní parametry planetek. Senzory zjistily, že na planetě α trvá den šestkrát déle než na planetě β a dále zjistily, že poloměr planety α je oproti poloměru planety β čtyřnásobný.



Po chvilce měření se ale oba senzory porouchaly, a to kvůli přílišné odstředivé síle, která na ně působila. Zjistěte, na který ze senzorů působila větší odstředivá síla, víte-li, že senzor měřící na planetě α vážil $m_\alpha = 9\,\mathrm{kg}$, zatímco senzor na druhé planetě měl hmotnost $m_\beta = 1\,\mathrm{kg}$. Pro odstředivou sílu na povrchu libovolné planety platí vztah

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

kde m je hmotnost uvažovaného senzoru, v je obvodová rychlost planety daná její rotací a r je poloměr dané planety.

Kvůli přehlednosti si informace ze zadání zapišme do tabulky 2. Označíme-li délku dne na planetě β jako T, ze zadání je délka dne na planetě α rovna $6T$. Stejně postupujeme i u poloměrů

[12] Platí $(x - 5\,\mathrm{m})^2 = x^2 - 2\cdot 5\,\mathrm{m}\cdot x + (5\,\mathrm{m})^2 = x^2 - 10\,\mathrm{m}\cdot x + 25\,\mathrm{m}^2$.

planet. Pokud je poloměr planety β rovný r, poloměr planety α je $4r$. Nakonec si ještě všimneme, že hmotnost senzoru umístěného na planetě α je $9m$, kde m jsme označili hmotnost senzoru na planetě β.

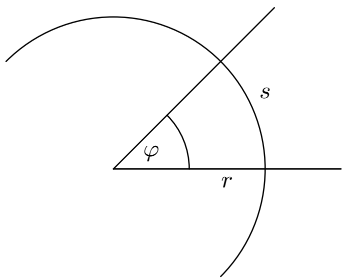
Tabulka 2: Známé údaje o planetách

atribut planety	α	β
délka dne	$6T$	T
poloměr planety	$4r$	r
hmotnost senzoru	9 kg	1 kg

Ze získaných informací máme pak spočítat odstředivou sílu, která závisí na hmotnosti, obvodové rychlosti a poloměru. Hmotnost senzoru i poloměr planety známe, rychlost bude potřeba vypočítat. Rychlost definujeme jako podíl dráhy a času ($v = s/t$). Naším cílem ale je spočítat obvodovou rychlost způsobenou rotací planety. Než si ale řekneme, jak se počítá, musíme si vysvětlit několik pojmů. Planeta se otáčí okolo své osy, takže trajektorií každého jejího bodu v prostoru je kružnice.

V případě rovnoměrného pohybu těles po kružnici zavádíme veličinu zvanou úhlová rychlost vztahem $\omega = \varphi/t$, kde φ je úhlová dráha a t je čas.

Úhlová dráha φ je prezentována na obrázku 15. Jednotkou úhlové dráhy jsou radiány. Jeden radián je definován jako středový úhel, který náleží oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Radián je tedy poměr délky oblouku s a poloměru kružnice r, přičemž $s = r$. Můžeme taktéž zapsat, že úhlová dráha je poměr délky oblouku a poloměru kružnice $\varphi = s/r$.



Obr. 15: Vztah mezi úhlem a kružnicovým obloukem

Proč by to ale nemohlo být opačně? Abychom se o tom přesvědčili, můžeme provést jednoduchý důkaz. Pokud změříte obvod jakékoli kružnice a vydělíte ho jejím průměrem, dostanete číslo, které se rovná přibližně 3,14. Je vám určitě dobře známo, že toto číslo se nazývá Ludolfovo číslo π. Znamená to tedy, že π je poměrem obvodu kružnice o a jejího průměru d, tzn. $\pi = o/d$. Zajímavé opravdu je, že tento poměr je vždy konstantní.

Průměr kružnice můžeme zapsat jako dvojnásobek poloměru. A pokud z předchozí rovnice vyjádříme obvod, dostaneme vztah pro obvod kružnice

$$o = 2\pi r\,.$$

Námi vyjádřený obvod o je to samé jako délka oblouku s. Za s tedy dosadíme do rovnice pro úhlovou dráhu a dostáváme

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,.$$

Nyní jsme si dokázali, že středový úhel kruhu je 2π rad neboli $360°$.

Pokud bychom celý postup ovšem udělali opačně, tedy

$$\varphi = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \doteq 0{,}16\,,$$

zjistíme, že středový úhel by byl menší než jedna. Ale vzhledem k tomu, že samotný jeden radián je definovaný jako úhel, který náleží oblouku o stejné délce jako je poloměr kružnice, středový úhel celé kružnice musí být určitě větší než jeden radián. Z předchozího obrázku, který definuje jeden radián, je dobře vidět, že středový úhel je větší než jeden radián.

Nyní jsme si dokázali, že úhlová dráha (neboli středový úhel) je vskutku rovna s/r. Můžeme tedy dosadit do vzorce pro úhlovou rychlost:

$$\omega = \frac{\frac{s}{r}}{t} = \frac{s}{rt}\,.$$

Při bližším prozkoumání vzorce uvidíme, že se nám zde vyskytuje rychlost jako člen s/t. Tato rychlost (ozn. v) se nazývá postupná obvodová rychlost a je to přesně ta rychlost, kterou při výpočtu dostředivé síly potřebujeme:

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{s}{t} = \frac{1}{r} v \quad \Rightarrow \quad v = \omega r\,.$$

Teď se vraťme na začátek k naší tabulce a blíže si vysvětleme, co to je délka dne. Představte si naši planetu Zemi, na které vychází v určitém místě v pět hodin ráno slunce. V průběhu dne je světlo, večer se stmívá a potom nastane tma. Druhý den v pět hodin zase na tom samém místě vyjde slunce. Určitě dobře víte, že stmívání je způsobené tím, že se naše planeta otáčí okolo své osy. Tím, že se otáčí, se odklání od slunce a stmívá se. To, že druhý den ráno zase vyjde slunce, znamená, že Země se celá otočila, a to o $360°$ neboli 2π. Planeta α se o 2π otočila za čas $6T$ a planeta β za čas T. Jinak řečeno jsme si teď slovy popsali, jakou mají obě planety úhlovou rychlost. Musí platit

$$\omega_\alpha = \frac{2\pi}{6T}\,, \qquad \omega_\beta = \frac{2\pi}{T}\,.$$

A konečně už známe všechny veličiny a můžeme použít vzorec pro dostředivou sílu. Protože chceme zjistit, na který ze senzorů působila větší odstředivá síla, dáme obě síly do poměru:

$$\frac{F_{o_\alpha}}{F_{o_\beta}} = \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{r_\alpha}}{\frac{m_\beta v_\beta^2}{r_\beta}} = \frac{\frac{m_\alpha r_\alpha^2 \omega_\alpha^2}{r_\alpha}}{\frac{m_\beta r_\beta^2 \omega_\beta^2}{r_\beta}} = \frac{m_\alpha r_\alpha \frac{4\pi^2}{36T^2}}{m_\beta r_\beta \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{9 \cdot 4r \cdot \frac{4\pi^2}{36T^2}}{1 \cdot r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}}{r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} = 1\,.$$

Z výsledku vidíme, že na oba senzory působí stejně velká odstředivá síla.

Poznámky k došlým řešením

Z výsledkové listiny můžete vidět, že plný počet bodů jsem udělila jen několika z vás. K dosažení maximální bodové hranice bylo nutno splnit především dvě kritéria. První z nich bylo si dobře přečíst zadání, a tudíž si dobře označit proměnné. Velké množství z vás totiž planety α a β prohodilo a místo, abyste napsali, že $r_\alpha = 6r$, tak jste počítali s tím, že $r_\beta = 6r$. V tomto případě stačí logicky uvažovat.

Poloměr planety α je šestkrát větší než poloměr planety β. Pokud je poloměr planety β například 100 km, tak poloměr planety α je šestkrát větší, tudíž je 600 km. Můžete zapsat, že $r_\alpha = 6r$ a $r_\beta = r$. Stejně postupujeme i u případu s délkou dne. Úloha byla bohužel (vlastně spíš naschvál) zadaná tak, aby na senzory působila stejná odstředivá síla. Proto pokud jste proměnné prohodili, vyšel vám stále stejný výsledek. Za toto špatné označení jsem strhávala jeden bod.

Přejděme k druhému kritériu. Ještě větší množství z vás uvažovalo, že když délka dne je $6T$, tak rychlost je $6v$. Ale to je fyzikálně špatná dedukce. Jak se může čas rovnat rychlosti? Samozřejmě, že nemůže. V případě výpočtu rychlosti hraje velkou roli dráha, na kterou jste zapomínali. Pokud jste nesplnili toto kritérium, vaše bodové ohodnocení bylo poloviční. S tím souvisí i to, že je dobré si pro sebe někam bokem na papír vždy udělat rozměrovou zkoušku, abyste věděli, že vám opravdu vyjde to, k čemu jste se chtěli dopočítat.

Jednou z méně častých chyb bylo, že jste místo obvodové rychlosti uvažovali normální rychlost. V zadání byl schválně uveden vzorec pro výpočet a schválně označena rychlost v jako obvodová. Pravděpodobně se většina z vás nikdy s tímto pojmem nesetkala. A pokud vám nějaký pojem není známý, zkuste si o něm něco zjistit před tím, než ho mylně nahradíte něčím, co už znáte. Vzorec pro obvodovou rychlost vychází ze vzorce pro klasickou rychlost, což jste někteří z vás pochopili a dráhu nahradili obvodem kruhu. Jiní jste dráhu jednoduše nahradili poloměrem, což bylo také špatně.

Rozpracovávat řešení obecně se sice více naučíte až na střední škole (někteří z vás to bravurně zvládají už teď), ale pár z vás doplatilo na číselnou metodu, a kvůli zaokrouhlování jim vyšel jiný výsledek.

Jmenovitě bych ráda pochválila Šimona Brázdu a Vláďu Chudého, kteří měli velmi pěkná řešení.

Kateřina Stodolová
`katas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.4 ... Hrátky s přepínači

6 bodů; průměr 2,67; řešilo 40 studentů

Petr se doma nudil až do chvíle, než vytáhl ze skříně tátovu krabici s elektrickými součástkami. Po chvíli prohrabování se krabicí našel na jejím dně starý ústřižek z časopisu pro mladé kutily s následujícím problémem: Máme k dispozici dva přepínače, červenou a zelenou žárovku, ideální zdroj konstantního napětí[13] *a ideální vodiče.*[14] *Jak se dá sestavit obvod, ve kterém při zapnutí obou přepínačů svítí obě žárovky, při přepnutí libovolného z nich zhasne zelená žárovka a při přepnutí i druhého přepínače nesvítí ani jedna ze žárovek? Ústřižek bohužel neobsahuje řešení a Petr si s ním neví rady. Pomůžete mu?*

[13] Ideální zdroj napětí dodává do obvodu konstantní napětí nezávisle na zátěži (součástkách, které jsou do obvodu zapojeny).

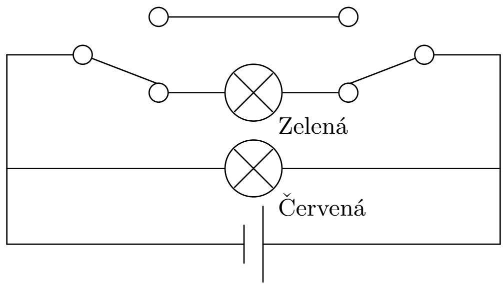
[14] Ideální vodiče mají nulový elektrický odpor.

Přepínač je elektronická součástka, která propojuje vstupní vodič s jedním ze dvou výstupních vodičů a to na základě toho, v jaké poloze se přepínač nachází.

Předpokládejme, že využijeme všechny vstupy i výstupy obou spínačů. Pokud po přepnutí prvního z nich má podle zadání zhasnout zelená žárovka, musíme tuto žárovku přepnutím odpojit od uzavřené části obvodu. Naopak, červená žárovka pořád svítí, a musí být tedy zapojena v uzavřené části obvodu, tzn. nemůže být zapojena mezi spínači. Po přepnutí druhého ze spínačů ale požadujeme, aby i tato žárovka zhasla. Odpojit ji od uzavřené části obvodu však nelze (není zapojena mezi spínači). Jediným způsobem, jak žárovku zhasnout, pak zůstává elektrický zkrat.

Můžeme tedy obvod začít stavět tak, že připojíme zdroj z jedné strany ke společnému kontaktu jednoho přepínače a z druhé strany ke společnému kontaktu přepínače druhého. Dále propojíme vodičem oba spínače tak, aby při současném vypnutí obou spínačů právě skrz tento vodič tekl proud. Dále připojíme ke zbylým dvěma kontaktům obou spínačů za pomoci vodičů zelenou žárovku. Nakonec paralelně k oběma přepínačům připojíme ke zdroji červenou žárovku.

Názornou ukázku takového obvodu uvádíme na obrázku 16. Jak je vidět, tak pokud jsou oba přepínače zapnuté, tak svítí obě žárovky a jsou paralelně zapojeny ke zdroji. Ve chvíli, kdy vypneme jeden z přepínačů, je přerušena větev se zdrojem a zelenou žárovkou, tzn. svítí pouze žárovka červená. Pokud jsou vypnuty oba spínače, pak je ke zdroji paralelně připojena větev bez žárovky. Protože tato větev má nulový odpor, všechen proud, který zdroj do obvodu dodává, poteče skrz tuto smyčku, tudíž nesvítí ani jedna ze žárovek.



Obr. 16: Hledaný obvod – při současné poloze přepínačů svítí obě žárovky

Ondřej Knopp
Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.5 ... James Bond

8 bodů; průměr 6,18; řešilo 60 studentů

Agent 007 byl zase jednou vyslán na mimořádně riskantní záchrannou misi. Tentokrát jde ale o hodně – jiný agent britské tajné služby MI6 je vězněn ve zločineckém doupěti a jde mu o život! Agent je pevně připoután k židli na dně obdélníkového bazénu s rozměry $a = 10\,\mathrm{m}$ *a* $b = 5\,\mathrm{m}$, *přičemž jeho obličej je ve výšce přesně* $h = 1\,\mathrm{m}$ *nade dnem bazénu.*

V momentě, kdy se James Bond plížil potichu doupětem a byl od svého kolegy vzdálen pouze $s = 500\,\mathrm{m}$, *byl odhalen elektrickým senzorem. Zločinec hlídající uvězněného agenta se tedy rozhodl konat a otočil kohoutem, který do bazénu napouští vodu průtokem* $Q = 50\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$, *a v té samé chvíli se vydal na okružní pochůzku doupětem. Tato pochůzka trvá zločinci přesně dobu $t_1 = 2\,\mathrm{min}$, po kterých se vrátí a čas $t_2 = 1\,\mathrm{min}$ zůstane u agenta. Pak odejde na další stejnou pochůzku, zpět k agentovi, a tak dále.*

Na to, aby James Bond mohl kolegu osvobodit, musí přijít dostatečně brzy před tím, než se voda dostane na úroveň obličeje jeho kolegy. Rovněž ale nemůže přijít tehdy, kdy je u bazénu zločinec a ani $\tau = 25\,\mathrm{s}$ před příchodem zločince – tolik času totiž zabere vysvobození spoutaného agenta.

(a) *Spočtěte, kolik času zbývá uvězněnému agentovi, než voda dosáhne na úroveň jeho obličeje.*
(b) *Zjistěte, za jakou nejkratší dobu James Bond dojde k bazénu, pokud se nedokáže plížit rychleji než rychlostí $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.*
(c) *Najděte intervaly (rozsahy) časů, ve kterých se může James Bond doplížit k bazénu a kolegu osvobodit.*
(d) *K intervalům času určete příslušné intervaly rychlostí, kterými se může James Bond plížit doupětem, aby byla mise úspěšná.*

James Bond není jenom tajný agent, ale i šikovný fyzik! Nedělá mu proto problém bez mrknutí oka cokoliv spočítat. Ukážeme si přesně, jak to vlastně agent 007 dokázal.

(a) Uvězněný agent je přivázaný k židli na dně bazénu. Ze zadaných rozměrů bazénu a z výšky h můžeme spočítat objem vody, který do bazénu nateče, než se agent utopí. Voda bude totiž vytvářet kvádr, jehož objem se rovná součinu plochy podstavy a výšky: $V = abh$. Do tohoto vztahu dosadíme zadané hodnoty a pro další výpočty převedeme výsledek na litry:

$$V = 10\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}^3 = 50\,000\,\mathrm{dm}^3 = 50\,000\,\mathrm{l}\,.$$

Chceme-li vědět, za jak dlouho se agent utopí, tento objem vydělíme průtokem přitékající vody[15] Q:

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{50\,000\,\mathrm{l}}{50\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}} = 1\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Agentovi tedy zbývá $1\,000\,\mathrm{s} \doteq 16{,}7\,\mathrm{min}$, než voda dosáhne jeho hlavy a utopí se.

(b) Druhý úkol je jednoduchý, ale velmi důležitý pro další úvahy. Pouze použijeme vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb – vydělíme dráhu, kterou agent musí ujít, maximální rychlostí, kterou se plíží:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{500\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 500\,\mathrm{s}\,.$$

James Bond tedy může dorazit k bazénu nejdříve v čase 500 s od začátku napouštění vody do bazénu.

(c) Teď si pojďme rozebrat, jak se vlastně pohybuje zločinec, který agenta vězní v bazénu. V počátečním čase začal napouštět vodu do bazénu a vydal se na pochůzku. Šel $t_1 = 120\,\mathrm{s}$ k bazénu, zde setrval $t_2 = 60\,\mathrm{s}$ a poté zase 120 s šel a 60 s čekal. Celkově mu obchůzka i s čekáním trvá vždy $t_1 + t_2 = 180\,\mathrm{s}$.
Jinak řečeno, zločinec svoji obchůzku začne v časech rovných násobkům 180 s, přičemž prvních 120 s obchůzky se u zajatého agenta nenachází. Abychom určili intervaly časů, kdy může agent 007 kolegu osvobodit, musíme započítat i $\tau = 25\,\mathrm{s}$, kterých Jamesi Bondovi trvá

[15] Průtok je veličina, která vyjadřuje závislost množství nateklé vody V na čase t, takže jeho jednotka je $\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. Správnost výpočtu můžeme tedy ověřit rozměrovou zkouškou.

osvobodit agenta. Proto má James Bond při každé obchůzce na osvobození kolegy pouze $t_1 - \tau = 95\,\mathrm{s}$ od začátku každé obchůzky.

Vhodné časové intervaly tedy můžeme pěkně zapsat pomocí čísla $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ jako $(n \cdot 180; n \cdot 180 + 95)$ s. Po dosazení za jednotlivá n tak dostáváme intervaly $(0; 95)$ s, $(180; 275)$ s, $(360; 455)$ s, dále $(540; 635)$ s a $(720; 815)$ s.

U dalšího intervalu, který začíná v čase $5 \cdot 180\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{s}$ si musíme dát pozor, protože v čase $T = 1\,000\,\mathrm{s}$ agent zemře a James potřebuje nejméně $25\,\mathrm{s}$ na záchranu. Zachraňování musí proto začít nejpozději v čase $975\,\mathrm{s}$, tzn. poslední přípustný interval je $(900; 975)$ s.

V předchozím bodě jsme si spočetli, že James Bond k bazénu dojde v nejkratším čase $T = 500\,\mathrm{s}$. Trefí se tedy zrovna do času mezi druhým a třetím intervalem,[16] kdy u bazénu čeká zločinec. Musí se tedy plížit pomaleji, aby k bazénu došel ve třetím, respektive čtvrtém nebo pátém intervalu.

(d) Intervaly příznivých časů známe (jsou tři) a známe i vzdálenost s, kterou musí James Bond ujít. Pro zjištění přípustných intervalů rychlostí tak stačí dosadit krajní hodnoty časových intervalů do vzorce $v = s/t$:

$$\begin{aligned}
&\text{třetí interval:} && v_{3_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{540\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}93\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, && v_{3_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{635\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
&\text{čtvrtý interval:} && v_{4_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{720\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}69\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, && v_{4_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{815\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}61\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
&\text{pátý interval:} && v_{5_1} = \frac{500\,\mathrm{m}}{900\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, && v_{5_2} = \frac{500\,\mathrm{m}}{975\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}51\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

James Bond se tedy může k uvězněnému kolegovi plížit rychlostí, která se nachází ve spojení intervalů

$$[(0{,}51; 0{,}56) \cup (0{,}61; 0{,}69) \cup (0{,}79; 0{,}93)]\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Kateřina Stodolová
`katas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.E ... Ledová

7 bodů; průměr 6,10; řešilo 48 studentů

Poněvadž je zima přede dveřmi, je potřeba se na ni připravit. Kupříkladu tak, že zjistíme, jak rychle taje led různých rozměrů. První část této úlohy sestává z výroby ledových vzorků. Nejdříve si z kartonu vystřihněte a poskládejte tři „nádoby“ ve tvaru krychliček s hranami dlouhými 5 cm, 7,5 cm a 10 cm. *Pak si vezměte potravinovou fólii (nebo sáček) a vlepte ji na vnitřní strany papírových forem, naplňte je asi do* 9/10 *vodou a nechte je zmrazit. Měli byste tak získat tři krásné ledové kostky.*

Kostky posléze vytáhněte z forem, odstraňte z nich fólie a položte je na rovnou plochu (například na tác). Vaší úlohou bude změřit čas, za který kostky zcela roztají. Kolikrát delší bude čas, za který roztají větší kostky v porovnaní s tou nejmenší? Popište, jak se tento poměr liší od

(a) poměru délek stran,
(b) poměru povrchů,
(c) poměru objemů.

[16] Pokud intervaly začínáme číslovat podle n, tzn. nultý, první, druhý interval a tak dále.

Oceníme, když svoje experimentální snažení doplníte fotografiemi.

Před uděláním jakéhokoliv experimentu bývá užitečné (a u větších experimentů vlastně docela podstatné) nejdříve se teoreticky zamyslet nad pokusem a zkusit odhadnout, jaké výsledky můžeme očekávat. Zkusíme to proto i zde.

Po vytažení kostek z mrazáku se potýkáme s daným objemem ledu o nějaké teplotě, která je nižší než bod tání. Led nám očividně začne tát, ale to až potom, co dosáhne teploty tání. Ohřívání ledu je poměrně komplikované, protože probíhá postupně od povrchu do středu kostky. Vypočítat ale umíme celkové teplo, které je potřeba k ohřátí celé kostky. Toto teplo Q_1 je dané vztahem

$$Q_1 = mc\Delta t\,,$$

kde c je měrná tepelná kapacita ledu, m je hmotnost kostky a Δt je rozdíl mezi výchozí teplotou ledu a teplotou tání.

Dále po zahřátí kostek na teplotu tání pak dochází k jejich tání. Opět umíme spočítat celkové teplo, které k tomu spotřebujeme:

$$Q_2 = l_\mathrm{t} m = l_\mathrm{t} \varrho V\,,$$

kde l_t značí měrné skupenské teplo tání ledu.

Na úplné roztání musí proto ledová kostka od svého okolí získat teplo $Q = Q_1 + Q_2$. Možné jsou tři způsoby předávání tepla: vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a zářením (radiací).

Předávání tepla prouděním zde hraje pouze drobnou drobnou roli, neboť tento jev se uplatňuje zejména v tekutinách. Naopak, tepelné záření přijímají naše kostičky ode všeho okolo (např. od radiátorů nebo od lidí kolem), a přestože jsou bílé, spoustu z něj nakonec pohltí. Množství záření, které kostička pohlcuje, závisí přímo úměrně na její ploše. Je snadné si rozmyslet, že plocha kostiček závisí na druhé mocnině délky strany. Na předávání tepla se podílí rovněž i vedení tepla taktéž skrze jejich povrch. Oba významné efekty předávání tepla tedy závisí na druhé mocnině délky strany kostky.

Výše popsané předávání tepla lze ve fyzice charakterizovat veličinou zvanou *tepelný výkon* (ozn. P), který jednoduše popisuje, kolik tepla okolí kostce předalo za sekundu.

Čas t potřebný k roztání kostky pak lze odhadnout jako poměr tepla, které potřebujeme dodat (tzn. teplo Q), a jak rychle ho od okolí dostáváme (tzn. tepelný výkon P):

$$t = \frac{Q}{P}\,.$$

Všimněme si, že teplo Q závisí, kromě fyzikálních konstant, na hmotnosti kostky m. Pro hmotnost ale platí $m = \varrho V$, kde ϱ je hustota a V objem kostky. Lze tedy říci, že teplo Q závisí přímo úměrně na objemu kostky, neboli na třetí mocnině délky její strany.

Vydělíme-li teplo Q, které závisí na třetí mocnině délky strany, výkonem P, jenž závisí na druhé mocnině délky, dostáváme, že doba tání t bude úměrná první mocnině délky strany kostky. Jinak řečeno, naše úvahy předpovídají, že kostka s dvakrát větší hranou bude tát dvakrát delší čas.

Tento jednoduchý model ale nepopisuje realitu dostatečně přesně, neboť na výslednou dobu tání mají vliv i další efekty, které naše předpověď nezahrnuje (průvan, nestálá teplota okolí, atp.). Proto musíme provést experiment, který je vlastně poměrně jednoduchý. Po výrobě kostek je vyndáme z mrazáku a čekáme. Poté, co roztají, zaznamenáme odpovídající čas. Náročnost experimentu se ale ukáže hned, jak zjistíme, jak dlouho kostky tály.

Tabulka 3: Přehled poměrů délek hran, povrchů a objemů kostek a dob jejich tání

veličina	nejmenší	prostřední	největší
hrana	1,0	1,5	2,0
doba tání	1,0	1,9	2,9
povrch	1,0	2,25	4,0
objem	1,0	3,38	8,0

Jelikož nám mnoho z vás zaslalo velmi kvalitní data, rozhodli jsme se vypočítat průměrné časy tání ze všech došlých řešení. Výsledné časy byly $t_1 = 3\,\mathrm{h}\,35\,\mathrm{min}$, $t_2 = 6\,\mathrm{h}\,23\,\mathrm{min}$ a $t_3 = 9\,\mathrm{h}\,33\,\mathrm{min}$ (pro kostky vzestupně podle velikosti).

Abychom mohli povědět o našem výsledku více, určíme poměr dob tání vůči sobě. Ten se nejlépe a nejpřehledněji zjistí tak, že vydělíme čas pro prostřední a největší kostičku časem tání té nejmenší. Dostáváme

$$t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 1{,}9 : 2{,}9\,.$$

Stejným způsobem určíme i poměry délek hran kostek, poměry jejich povrchů a objemů (hodnotu pro prostřední a největší kostku vydělíme tou nejmenší) a získáme čísla, která jsou uvedena v tabulce 3. Zde si můžeme všimnout, že poměry dob tání jsou trošku vyšší než předpovězené poměry stran. Důvod, proč tomu tak je, už asi jednoduše neobjasníme. Nejspíše to můžeme přičítat nerovnoměrnému ohřevu kostky, popřípadě dalším vlivům prostředí. Lze konstatovat, že tyto efekty způsobují, že větší kostky tají o kousek déle, než bychom očekávali.

Petr Doležal
`petr.d@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.C ... Stěhování

8 bodů; průměr 6,47; řešilo 47 studentů

Když se Tom přestěhoval do Prahy a zařizoval si byt, měl v pokoji koberec i lino. Na koberec si postavil skříň tak, že střed skříně byl vzdálen 1 m *od rozhraní lina a koberce. Jenže se mu již na koberec nevešel stůl, a tak se rozhodl skříň přesunout na lino, a to tak, že na konci je střed skříně od rozhraní koberec-lino stejně daleko jako na začátku. Dále víme, že Tomova skříň je široká* 1 m, *váží* 40 kg *a koeficient smykového tření koberce je* $f_\mathrm{k} = 0{,}5$, *lina* $f_\mathrm{l} = 0{,}2$.

(a) *Jakou silou F_1 Tom musí na skříň působit, pokud ji posouvá po koberci?*
(b) *Jakou silou F_2 Tom musí působit, pokud skříň je již na linu?*
(c) *Jakou silou $F_{1/2}$ Tom působil, když byla půlka skříně již na linu, ale druhá půlka ještě stále na koberci?*
(d) *Nakreslete graf závislosti síly na vzdálenosti, kterou skříň již urazila.*
(e) *Jakou práci Tom při stěhování skříně vykonal?*

Třecí síla se spočte jako $F_\mathrm{t} = mgf$. Skříň považujte za homogenní těleso.

(a) Pokud chce Tom se skříní pohnout, musí vyvinout minimálně tak vekou sílu, jak velká je síla třecí. Třecí síla odpovídá normálové síle, kterou zde zastupuje síla tíhová o velikosti mg vynásobená koeficientem smykového tření $f_\mathrm{k} = 0{,}5$. Naše hledaná síla je tedy

$$F_1 = mgf_\mathrm{k} = 40\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 0{,}5 = 200\,\mathrm{N}\,.$$

Tom musí vyvinout minimálně sílu 200 N, aby se skříň na koberci rozpohybovala.

(b) To samé jako v předchozím bodě platí i zde: síla, kterou Tom udrží skříň v rovnoměrném přímočarém pohybu, je rovna síle třecí. Tady však musíme dosadit jiný koeficient tření, protože ji posouvá po jiném materiálu (linu s koeficientem tření $f_\mathrm{l} = 0{,}2$):

$$F_2 = mgf_\mathrm{l} = 40\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 0{,}2 = 80\,\mathrm{N}\,.$$

Když je tedy skříň celá na linu, Tom proti ní působí silou o velikosti 80 N.

(c) Tady opět platí, že Tom působí silou o velikosti třecí síly, která je zde rozložena mezi dva povrchy, lino a koberec, každý s jiným koeficientem tření. Konkrétně v téhle situaci se polovina hmoty skříně nachází na koberci a druhá na linu (skříň je považována za homogenní těleso, tzn. že má po celém svém objemu hmotu rozloženou stejnoměrně). Proto bude platit

$$F_{1/2} = \frac{mg}{2} \cdot f_\mathrm{k} + \frac{mg}{2} \cdot f_\mathrm{l} = \frac{mg}{2} \cdot (f_\mathrm{k} + f_\mathrm{l}) = \frac{40\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{2} \cdot (0{,}5 + 0{,}2) = 140\,\mathrm{N}\,.$$

Síla, kterou v tomto momentu Tom působí na skříň, je tedy 140 N.

(d) Zde si musíme uvědomit, že třecí síla *nezávisí* na dráze, ale na typu povrchu, po kterém těleso posunujeme. Složení povrchů se však v určité části dráhy posouvání skříně mění z okamžiku na okamžik. Pro lepší přehlednost si tuto situaci rozdělíme na tři části: část, kdy je skříň celou svojí vahou na koberci, část, kdy je částečně na jednom a částečně na druhém povrchu, a na poslední část, kdy je celým svým spodkem na linu.

Tom bude skříň tahat pouze po koberci na dráze $s_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Tolik totiž chybí nejbližšímu kraji skříně k rozhraní koberec – lino. Pak se skříň dostává okrajem na lino a po obou površích se pohybuje po dráze dlouhé $s_{1/2} = 1\,\mathrm{m}$, tedy po celé své šířce. Nakonec, na dráze $s_2 = 0{,}5\,\mathrm{m}$ se pohybuje jen po linu.

Síla, kterou Tom působí v prvním a třetím úseku, bude konstantní a rovna F_1, respektive F_2. Proto první a poslední část pohybu bude v grafu zobrazena jako přímka, která bude rovnoběžná s osou x.

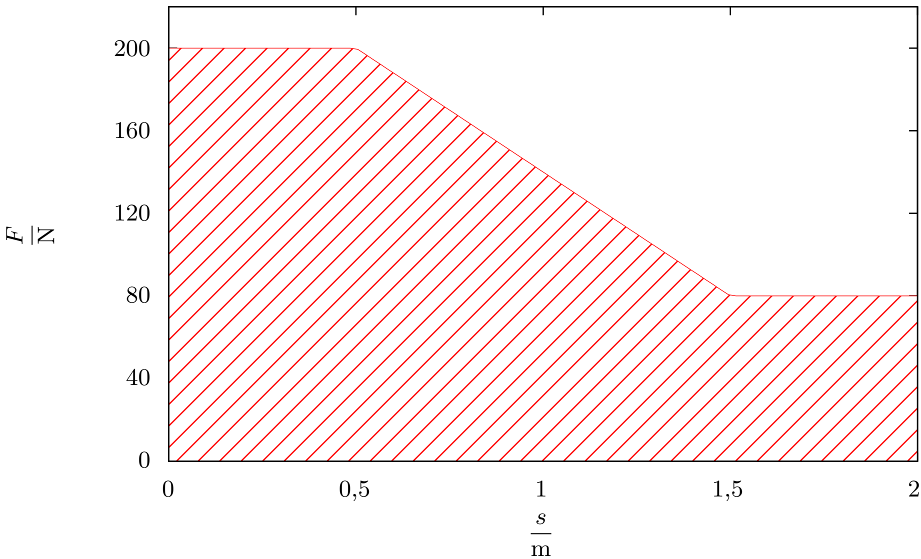
Síla se ale bude měnit při pohybu přes rozhraní koberec – lino. Zřejmě bude velikost síly potřebné k posouvání skříně klesat, protože skříň se bude posouvat na lino, které má menší koeficient tření. Poněvadž skříň má rovnoměrně rozloženou hmotu, síla bude klesat rovnoměrně z hodnoty F_1 na hodnotu F_2. V grafu se toto rovnoměrné klesání zobrazí jako přímka směřující na grafu od bodu se souřadnicemi $[0{,}5\,\mathrm{m}; 200\,\mathrm{N}]$ do bodu se souřadnicemi $[1{,}5\,\mathrm{m}; 80\,\mathrm{N}]$ (viz graf na obrázku 17).

(e) Práci, kterou vykonáme proti síle F na dráze s, je $W = Fs$. Platí tedy, že práci lze vyjádřit jako součin hodnot, které jsme vynášeli na osy našeho grafu. Z Výfučtení ale víme, že v takovém případě pro výpočet práce postačí spočítat plochu pod tímto grafem. Plocha se skládá ze dvou obdélníků se stranami o velikosti $200\,\mathrm{N} \times 0{,}5\,\mathrm{m}$ a $80\,\mathrm{N} \times 0{,}5\,\mathrm{m}$. Mezi nimi se nachází lichoběžník se svislými základnami o velikosti 200 N a 80 N a s výškou odpovídající délce 1 m. Obsah lichoběžníku se dá spočítat jako polovina součtu délek základen vynásobená jeho výškou, obsahy obdélníků vypočítáme jednoduše jako součiny jejich rozměrů.

Práce, kterou Tom vykonal, tedy odpovídá ploše pod grafem síly v závislosti na dráze, což činí

$$W = 200\,\mathrm{N}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m} + \frac{(200\,\mathrm{N} + 80\,\mathrm{N})\cdot 1\,\mathrm{m}}{2} + 80\,\mathrm{N}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N{\cdot}m} + 140\,\mathrm{N{\cdot}m} + 40\,\mathrm{N{\cdot}m} =$$
$$= 280\,\mathrm{N{\cdot}m} = 280\,\mathrm{J}\,.$$

Tom tedy při stěhování skříně vykonal práci $W = 280\,\mathrm{J}$.



Obr. 17: Závislost velikosti Tomovy síly na dráze. Plocha pod grafem je vyšrafovaná.

Poznámky k došlým řešením

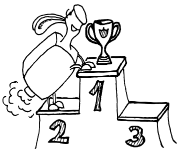
Hodně jsem v celém řešení postrádala vaše slovní vysvětlení, díky kterému bych mohla snáze odhadnout, kde jste udělali chybu, a přidělit vám alespoň nějaký ten bod k dobru. Takto se hodně z vás o body připravilo, což mě mrzí.

Všichni jste dokázali spočítat síly F_1 a F_2, ale opravdu málo z vás napsalo, proč tomu tak skutečně je. Stačilo napsat, že Tom musí na skříň působit minimálně tak velkou silou, jako je daná třecí síla, aby se skříň dala do pohybu.

Někteří z vás si také výpočet práce zjednodušili stylem „zprůměruji síly a to vynásobím celkovou dráhou“. Výsledek jste sice dostali správný, jenže toto je speciální případ, kdy jsou všechny tři části dráhy (tzn. ta po koberci, ta po smíšeném povrchu a ta po linu) stejně dlouhé, tedy 1 m. Usoudila jsem, že u většiny šlo tak spíše jen o intuitivní řešení, což jsem hodnotila jedním bodem ze dvou.

Pavla Trembulaková

pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	4	6	6	8	7	8	44	86
1.	*Martin Kysela*	G Český Krumlov	5	4	4	2	8	7	–	**30**	**53**
2.	*Patrik Rosenberg*	ZŠ Tuháčkova, Brno	5	2	3	1	–	7	–	**18**	**38**
3.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	4	–	–	8	–	8	**20**	**35**
4.	*Pavel Šimůnek*	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**7**
5.	*Sára Božoňová*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	4	6	6	8	7	8	44	86
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	5	4	3	6	7	7	7	**39**	**80**
2.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	5	4	3	–	8	7	8	**35**	**72**
3.	*Kryštof Pravda*	G Mensa, Praha	4	4	5	–	6	–	8	**27**	**66**
4.–5.	*Ester Galiová*	ZŠ a MŠ Středokluky	5	4	2	1	8	7	7	**34**	**62**
4.–5.	*Ondřej Valášek*	ZŠ V. Kl. Klicpery, Nový Bydžov	5	1	4	3	8	5	6	**32**	**62**
6.	*Adam Krška*	G Mikulov	4	3	5	–	6	7	–	**25**	**53**
7.	*Tomáš Kavena*	Křesťanské G, Kozinova, Praha	2	4	3	1	8	5	8	**31**	**50**
8.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	–	4	–	–	7	7	–	**18**	**45**
9.	*Tomáš Kudrnáč*	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	2	1	2	5	5	6	5	**26**	**43**
10.	*Filip Temiak*	G Český Krumlov	5	1	–	–	6	–	–	**12**	**32**
11.–12.	*Natálie Křivancová*	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
11.–12.	*Tomáš Trtík*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
13.	*Vojtěch Vincíbr*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
14.	*Filip Matůš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
15.	*Isabela Andreevská*	Spec. soukromé G Integra, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
16.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
17.	*Barbora Vosková*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
18.–19.	*David Kocian*	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	2	3	2	5	3	–	–	**15**	**15**
18.–19.	*Luboš Petráň*	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	–	–	–	–	3	–	–	**3**	**15**
20.	*Robert Jaworski*	G Ústavní, Praha	5	4	5	–	–	–	–	**14**	**14**
21.–22.	*Jakub Hembera*	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**12**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	4	6	6	8	7	8	**44**	**86**
21.–22.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	3	–	–	**3**	**12**
23.	*Miroslav Kotsyba*	ZŠ a MŠ Helsinská, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**11**
24.	*Martin Kolovratník*	ZŠ Pardubice - Studánka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
25.	*Honza Bartoš*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
26.	*Monika Bambuchová*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**8**
27.	*Marie Vondrášková*	ZŠ Strýčice, Hluboká nad Vltavou	3	0	–	–	–	4	–	**7**	**7**
28.–29.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
28.–29.	*Anežka Zobačová*	ZŠ Vratislavovo nám., NMnM	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
30.	*Jakub Tománek*	ZŠ Hošťálková	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		4	6	6	8	7	8	**39**	**76**
1.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	–	4	5	6	8	7	8	**38**	**73**
2.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	4	5	2	8	7	8	**34**	**71**
3.	*Lubor Čech*	G Mikulov	–	4	5	6	7	7	7	**36**	**68**
4.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	–	3	5	0	7	6	8	**29**	**64**
5.	*Michal Grus*	G Dobruška	–	4	5	–	8	7	8	**32**	**58**
6.	*Filip Řeháček*	Klasické a španělské G, Brno	–	4	4	5	8	7	8	**36**	**54**
7.	*Julie Rubášová*	Biskupské G, Brno	–	2	3	1	7	7	5	**25**	**50**
8.–9.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	1	6	5	–	5	8	**25**	**49**
8.–9.	*Jiří Zikmund*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	2	6	0	5	7	7	**27**	**49**
10.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	–	4	–	7	7	5	**23**	**45**
11.	*Filip Holoubek*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	3	1	6	7	3	**20**	**42**
12.–13.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	–	–	3	1	5	7	3	**19**	**39**
12.–13.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	1	5	0	4	6	4	**20**	**39**
14.–15.	*Tereza Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	2	6	–	3	–	–	**11**	**33**
14.–15.	*Vojtěch Kuchař*	ZŠ Sobotka	–	4	6	–	7	–	8	**25**	**33**
16.	*Ondřej Man*	ZŠ T. G. Masaryka Jihlava	–	–	6	–	–	–	7	**13**	**29**
17.	*Radim Šafář*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	3	–	–	–	–	**3**	**27**
18.–19.	*Ondřej Polanecký*	1. ZŠ TGM Milevsko	–	0	2	1	2	4	1	**10**	**26**
18.–19.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	3	–	2	3	–	–	**8**	**26**
20.–21.	*František Krůs*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**25**
20.–21.	*Andriy Volvach*	ZŠ Na Smetance, Praha 2	–	1	3	2	6	5	8	**25**	**25**
22.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**20**
23.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**19**
24.	*Eliška Švecová*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
25.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	–	4	–	–	–	7	–	**11**	**17**
26.	*Petr Budai*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
27.	*Filip Trhlík*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**15**
28.	*Anna Sovová*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
29.–30.	*Lada Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
29.–30.	*Adam Závora*	15. základní škola Plzeň	–	1	–	1	–	–	–	**2**	**8**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		4	6	6	8	7	8	**39**	**76**
31.	*Jiří Zinecker*	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
32.	*Jan Zemek*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
33.	*David Zatloukal*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		4	6	6	8	7	8	**39**	**76**
1.	*Václav Zvoníček*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	5	6	8	7	8	**38**	**74**
2.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	4	6	6	7	7	8	**38**	**73**
3.	*Šimon Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	3	6	6	7	5	8	**35**	**69**
4.–5.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	3	6	7	7	8	**35**	**62**
4.–5.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	4	2	7	7	8	**32**	**62**
6.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	4	5	–	7	7	–	**23**	**54**
7.	*Aneta Pouková*	ZŠ Horní Čermná	–	4	3	1	7	7	7	**29**	**53**
8.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	4	6	3	8	4	6	**31**	**52**
9.	*Adam Vavrečka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	5	–	8	–	8	**25**	**51**
10.	*Filip Wagner*	G Tišnov	–	1	3	2	8	7	7	**28**	**50**
11.–12.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	6	4	7	0	4	**23**	**49**
11.–12.	*Filip Novotný*	G Jihlava	–	2	2	5	7	7	3	**26**	**49**
13.	*Pavla Rudolfová*	ZŠ Komenského náměstí, Slavkov u	–	4	6	1	7	7	4	**29**	**48**
14.	*Martin Bína*	G, Moravská Třebová	–	3	5	0	8	6	7	**29**	**47**
15.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	1	3	1	6	7	7	**25**	**45**
16.	*Miroslav Jarý*	ZŠ Velké Poříčí	–	2	3	–	6	–	8	**19**	**41**
17.	*Adam Nekolný*	G, Písnická, Praha	–	2	3	–	4	–	7	**16**	**39**
18.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	4	–	–	3	–	7	**14**	**38**
19.	*Václav Pavlíček*	ZŠ a MŠ Ždírec nad Doubravou	–	–	–	–	3	7	–	**10**	**37**
20.	*Jan Vondra*	G Týn nad Vltavou	–	1	0	1	4	4	3	**13**	**34**
21.	*Jaroslav Scheinpflug*	ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Bud	–	–	3	–	5	–	4	**12**	**32**
22.–24.	*Jakub Bartoš*	G, Písnická, Praha	–	4	2	–	3	–	7	**16**	**30**
22.–24.	*Tomáš Salavec*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
22.–24.	*Michal Suk*	ZŠ Svisle, Přerov, Přerov I - Mě	–	1	3	0	5	5	4	**18**	**30**
25.–26.	*Martin Flídr*	G Masarykovo nám., Kroměříž	–	–	3	5	3	–	–	**11**	**27**
25.–26.	*Lenka Tomanová*	ZŠ Měřín	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
27.	*Karel Šebela*	Katolické gymnázium Třebíč	–	4	6	–	8	–	8	**26**	**26**
28.–29.	*Vojtěch Ježek*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
28.–29.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**17**
30.–31.	*Victoria Grundlerová*	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
30.–31.	*Jiří Hocek*	ZŠ Veronské náměstí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
32.–33.	*Jan Macek*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	4	3	–	8	–	–	**15**	**15**
32.–33.	*Alena Osvaldová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
34.	*Alice Janáčková*	G Chotěboř	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**13**
35.–37.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
35.–37.	*Lucie Kunčarová*	G Volgogradská, Ostrava	–	1	3	–	8	–	–	**12**	**12**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	6	6	8	7	8		**39**	**76**
35.–37.	*Mária Volmanová*	ZŠ Kollárova, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
38.–39.	*Petr Doubravský*	ZŠ a MŠ J. A. Komenského Nové St	–	4	–	–	7	–	–	**11**	**11**
38.–39.	*Dita Chabičovská*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.	*Eva Jurčeková*	ZŠ sv. Voršily Praha 1	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
41.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	4	3	1	–	–	–	**8**	**8**
42.	*Klára Šenkeříková*	ZŠ a MŠ Nedašov	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
43.–44.	*Petr Čerych*	ZŠ Sobotka	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**
43.–44.	*Roman Varfolomieiev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**
45.	*Jakub Ucháč*	ZŠ Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.