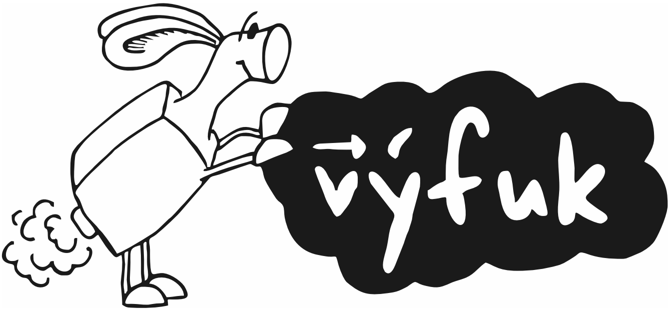


výpočty
fyzikálních
úkolů

Milí kamarádi,

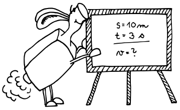
rok se pomalu ale jistě chýlí ke konci a s ním přichází třetí série letošního ročníku. Tentokrát jsme si pro vás přichystali Výfučtení o meteorologii, v němž se můžete dozvědět o tom, jak vznikají oblaka, jak se mění teplota vzduchu a další zajímavosti o atmosféře.

I body z této série vás mohou dostat na jedinečný Letní tábor Výfuku, který se uskuteční i v létě 2016 a pozvánky vybraným z vás budeme zasílat společně se čtvrtou sérií.

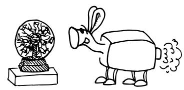
Zároveň byste v obálkách již měli nalézt opravená řešení první série.

Mnoho zdaru při řešení a vánoční pohodu vám přejí

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání III. série



Termín doručení: 11. 1. 2016 20.00

Úloha III.1 ... Symetrická ❻ ❼ 5 bodů

Jistě jste si všimli, že některá písmena jsou symetrická vůči nějaké ose, popřípadě středu symetrie. Nakreslete nám tedy čtyři obrázky, ze kterých bude jasné, jak vzniknou z písmena q písmena p, b a d a o jaký typ symetrie (osová, středová souměrnost) jde.

Pak se zamyslete a zkuste vymyslet tři slova s osou či bodem symetrie, která jsou symetrické jako celky. Můžete použít malá i velká písmena.

Úloha III.2 ... Sněhuláci ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Když se Lucka ráno probudila, zjistila, že celou noc sněžilo. Do zahrady o rozměrech $a = 15\,\mathrm{m}$ a $b = 16\,\mathrm{m}$ napadla vrstva sněhu vysoká $c = 5\,\mathrm{cm}$. Lucka se tedy rozhodla sníh využít a postavila z něho sněhuláka. Ten sestával ze tří koulí o poloměrech v poměru 1 : 2 : 3. Jak byl sněhulák vysoký, pokud víte, že Lucka použila všechen sníh ze zahrady a při stavění sněhuláka sníh udusala na desetinu jeho původního objemu?

Poradíme vám, že vzorec pro objem koule je

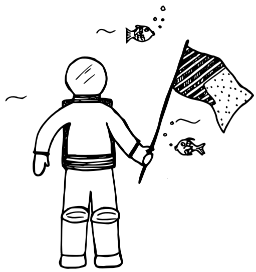
$$V_{\mathrm{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3\,,$$

kde r je její poloměr.

Úloha III.3 ... Úsporná ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Káťu máma zase napomenula, že v pokoji nechává svítit a zbytečně utrácí peníze. Vypočítejte, jak dlouho by musela svítit žárovka ve vašem pokoji, aby to vaši maminku stálo pět korun. Nezapomeňte nám do řešení napsat parametry vaší žárovky a zdroj, kde jste našli cenu elektrické energie.

Úloha III.4 ... Simulace Měsíce ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Astronauti trénují práci na Měsíci tak, že se ve skafandrech ponoří do bazénu, kde jsou nadnášeni vztlakem vody. Vypočítejte, na jaký objem V mají inženýři skafandr s astronautem nafouknout, aby astronaut vážící $m = 90\,\mathrm{kg}$ pociťoval tíhové zrychlení stejné jako na Měsíci, tzn. šestinu zemského tíhového zrychlení? Samotný skafandr váží $M = 40\,\mathrm{kg}$, hmotnost vzduchu ve skafandru zanedbejte.

Úloha III.5 ... Cesta na sever ❻ ❼ ❽ ❾ ✩ 7 bodů

Petr se rozhodl o prázdninách dobýt severní pól. Základní tábor si založil na 89,9° s.š. a vydal se na lyžích rovnoměrným přímočarým pohybem na sever. Poté, co dosáhl severního pólu, pokračoval stále rovně, tedy na jih. Když byl od severního pólu stejně daleko jako na začátku, začala mu být zima, a tak vyrazil po rovnoběžce zpátky do základního tábora.

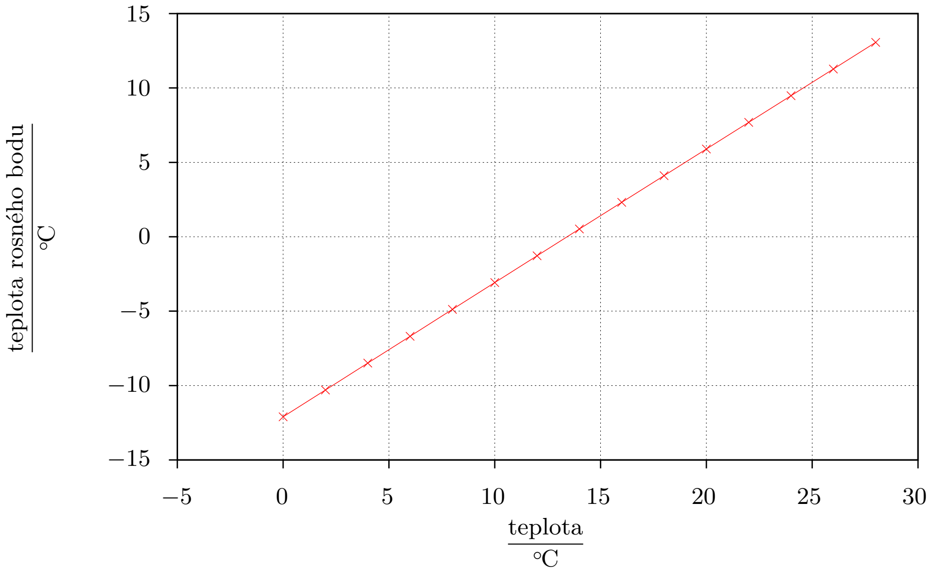
a) Jak daleko byl jeho tábor od severního pólu?
b) Za jak dlouho se dostal zpátky do tábora, když jel stálou rychlostí $v = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?
c) Nakreslete graf závislosti Petrovy vzdálenosti od severního pólu na čase.
d) Nakreslete také graf závislosti jeho rychlosti směrem na sever na čase.
Zemi považujte za přesnou kouli s poloměrem $R = 6\,378\,\mathrm{km}$.

Úloha III.E ... Nenasytné kapesníčky ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Říká se, že kapesníčky jsou velmi savé, ale my bychom si to chtěli ověřit v praxi. Proto jsme vám se zadáním zaslali pět kapesníčků. Nejdříve si na kapesníčky nakreslete stupnici s dílky po centimetru. Pak je pověste nad nádobu s vodou tak, aby se voda do kapesníčku nasávala podél jedné z jeho stran. Vaší úlohou bude měřit časy, za které stoupne hranice smáčené části kapesníčku o centimetr. Měření zopakujte se všemi kapesníčky a naměřené hodnoty odpovídající stejné výšce zprůměrujte. Pak nakreslete graf závislosti těchto časů na výšce smáčené části kapesníčků.

Úloha III.C ... Oblaka ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

a) David na podzim změřil, že teplý vzduch o teplotě $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ a relativní vlhkosti $r_0 = 40\,\%$ stoupá nahoru při suchoadiabatickém gradientu o velikosti $G = 1\,^\circ\mathrm{C}/100\,\mathrm{m}$. V jaké výšce se z tohoto vzduchu začnou tvořit oblaka (tzn. relativní vlhkost vzduchu bude $r = 100\,\%$)?



Obr. 1: Závislost teploty rosného bodu pro 40% vlhkost

b) Paťo jednou testoval zvláštní oblak plynu. Ve své laboratoři změřil, že jeho vzorek plynu má hustotu $\varrho = 1{,}84\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, teplotu $t = 27{,}7\,°\mathrm{C}$ a tlak $p = 100\,\mathrm{kPa}$.
Chemická analýza Paťova plynu ukázala, že plyn se skládá z jednoho druhu molekul, jež obsahují pouze kyslík a dusík. Vypočítejte molární hmotnost Paťova plynu a určete, o jaký plyn jde. Pokud si s určením nevíte rady, poproste o pomoc svého učitele chemie či fyziky.

Výfučtení: Meteorologie a její historie

Meteorologie je věda zabývající se atmosférou. Její název vznikl z řeckého *metéoros* – vznášející se ve výši.

Meteorologie se v průběhu doby vyvíjela. Mezi první pokusy člověka odhadovat průběh počasí se řadí pranostiky. V průběhu 18. století se uvedly do provozu první meteorologické stanice.[1] V 19. století vznikají první meteorologické ústavy. Ve 20. století se předpovídá pomocí meteorologických map, ale již v polovině století se objevují první matematické modely, které jsou od 70. let důležitou součástí předpovídání počasí.

V dnešní době se předpovědi počasí takřka výhradně vypočítávají na matematických modelech, jejichž základem jsou fyzikální poznatky o zemské atmosféře. Meteorologové jejich výstupy (výsledky) zkontrolují a podle svých zkušeností a informací, které dostanou například analýzou meteorologických map, dat z meteostanic, radarů atd., upraví předpověď do finální podoby, kterou můžete vidět v televizi či slyšet v rádiu.

Stavová rovnice

Od historie se ale přesuňme k fyzice. Základní rovnice popisující vlastnosti plynů (tedy i vzduchu v atmosféře) se nazývá stavová rovnice ideálního plynu a má tvar

$$pV = Nk_\mathrm{b}T\,,$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, N počet částic (atomů nebo molekul), k_b je *Boltzmannova konstanta*[2] a T je termodynamická teplota (v kelvinech). Přepočítat Celsiovu teplotní stupnici na Kelvinovu je snadné, neboť obě stupnice jsou od sebe pouze posunuté tak, že platí $0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,°\mathrm{C}$, neboli $273{,}15\,\mathrm{K} = 0\,°\mathrm{C}$.

Pro naše potřeby bude užitečné vyjádřit ze stavové rovnice ideálního plynu jeho hustotu. Za N, tedy počet molekul, nejdříve dosadíme z chemie známý součin molárního množství n (což je základní veličina na měření počtu částic) a Avogadrovy konstanty:[3]

$$pV = nN_\mathrm{A}k_\mathrm{b}T\,.$$

Součin dvou konstant, obrovské konstanty N_A a maličké konstanty k_b se nazývá univerzální plynovou konstantou, která se značí R a její hodnota je $R = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

Dále pak lze molární množství n zapsat jako podíl hmotnosti m látky k molární hmotnosti M (což je hmotnost 1 mol látky). Hodnotu molární hmotnosti lze vyčíst z periodické tabulky prvků,

[1] Mezi ně patří i pražské Klementinum, odkud máme od roku 1775 souvislá meteorologická měření.

[2] Její hodnota je $k_\mathrm{b} = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

[3] Avogadrova konstanta jednoduše vyjadřuje, kolik částic je v jednom molu látky. Její číselná hodnota je $N_\mathrm{A} = 6{,}022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

nebo si ji vyhledat na internetu. Například molární hmotnost suchého vzduchu je přibližně $M_{\mathrm{vzduch}} = 29\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Stavová rovnice se tedy upraví do tvaru

$$pV = \frac{m}{M}RT\,.$$

Už jsme skoro u konce – když vydělíme celou rovnici objemem, na pravé straně se objeví podíl hmotnosti a objemu, což je právě námi hledaná hustota:

$$p = \frac{m}{VM}RT \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varrho = \frac{pM}{RT}\,.}$$

Dostali jsme tedy vzoreček pro hustotu plynů v závislosti na jejich tlaku a teplotě. Vzduch při pokojové teplotě $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C} \doteq 293\,\mathrm{K}$ a normálním atmosférickém tlaku $p_{\mathrm{a}} \doteq 101\,325\,\mathrm{Pa}$ má tedy hustotu

$$\varrho = \frac{pM}{RT} = \frac{101\,325\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}029\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}}{8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \cdot 293\,\mathrm{K}} \doteq 1{,}21\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Navíc, z výše odvozeného vztahu je hezky vidět, že s rostoucím tlakem hustota vzduchu roste (vzduch na sebe tlačí, čímž tlačí jednotlivé částice blíže k sobě). Naopak, budeme-li zvyšovat teplotu, hustota se bude snižovat, což je důvod, proč teplý vzduch stoupá nahoru a studený naopak klesá dolů, čehož ještě později využijeme.

Vlhkost vzduchu

Jistě víte, že ve vzduchu je téměř vždy určité množství vodní páry, někdy je jí více, někdy méně. Z meteorologického hlediska totiž záleží na tom, odkud k nám vzduch proudí. V případě západního až severozápadního proudění k nám přichází vlhký vzduch od Atlantského oceánu. Tento vzduch je vlhký díky přítomnosti teplého Atlantského proudu v oceánu, díky němuž se voda z oceánu více vypařuje. Naopak proudí-li vzduch od východu z kontinentu, tak je obvykle vlhkost vzduchu nižší, protože se nemá kde vodní párou nasytit.

V meteorologii rozlišujeme dva pojmy, *absolutní* a *relativní* vlhkost vzduchu. Absolutní vlhkost vzduchu vyjadřuje hmotnost vodní páry v určitém objemu vzduchu. Její jednotkou je $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, lze ji tedy chápat jako „hustotu“ molekul vodní páry (vody) rozptýlené ve vzduchu. Proto se také absolutní vlhkost vzduchu značí ϱ_{v}.

Navíc vzduch při dané teplotě a tlaku pojme jen konečné množství vodní páry, jinak začne vodní pára kondenzovat – vytvoří se mlha, resp. začne pršet. Maximální vlhkost vzduchu, která může při daných podmínkách existovat, se značí ϱ_{vs} a říkáme jí absolutní vlhkost nasyceného vzduchu. Platí, že čím je teplota vzduchu vyšší, tím více vodní páry pojme, proto se bude absolutní vlhkost nasyceného vzduchu s rostoucí teplotou zvyšovat.

Pro lepší představu nasycenosti vzduchu vlhkostí používáme relativní vlhkost r, která vyjadřuje poměr mezi absolutní vlhkostí vzduchu a absolutní vlhkostí nasyceného vzduchu pro danou teplotu:

$$r = \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{\varrho_{\mathrm{vs}}} \cdot 100\,\%\,,$$

tzn. udáváme ji v procentech. S touto veličinou se můžete setkat i u vás doma na vlhkoměrech a také ji pociťujeme venku, když cítíme třeba na podzim „vlezlý“ sychravý vzduch. Teplota, při níž se vzduch při konstantní absolutní vlhkosti ϱ_{v} maximálně nasytí vodní parou (tzn. relativní vlhkost bude 100 %), se nazývá teplota *rosného bodu.*

Teplotní gradienty

Pro vývoj počasí je klíčové znát, jak se vzduch v atmosféře mísí a jak v ní proudí. Proto je důležité vědět, jak se mění teplota a tlak vzduchu s rostoucí výškou. Typicky teplota s výškou klesá. Jistě jste si všimli při chození v horách, že na kopci bývá nižší teplota nežli pod ním. Změně teploty s výškou říkáme odborně *teplotní gradient*. Obvykle se udává změna teploty za 100 m výšky. Běžná hodnota teplotního gradientu je asi 0,6 °C/100 m.

V závislosti na okamžitém počasí se ale hodnota teplotního gradientu může měnit, a to i docela výrazně. Záleží na tom, zda-li je zataženo, nebo svítí slunce, jaký k nám proudí vzduch při zemi a jaký ve výšce: například u země se může držet studený suchý vzduch zatímco ve výšce třeba 2 km bude proudit teplý a vlhký vzduch.

Může se dokonce stát, že s výškou teplota roste. Takovému jevu říkáme teplotní inverze. Můžeme se s ní setkat za jasných rán, nebo třeba na podzim, kdy je na horách slunečné počasí s dalekými výhledy, zatímco v údolích je chladno a často zataženo.

S výškou také klesá tlak vzduchu. Proto dle stavové rovnice klesá i jeho hustota. Navíc, nedodáme-li vzduchu žádné další teplo (například od Slunce), tak se bude stoupající vzduch ochlazovat. Vzduch, jehož relativní vlhkost je menší, než 100 % se při takovémto výstupu ochladí přibližně o 1 °C/100 m a o stejnou hodnotu se zase ohřeje, když bude klesat. Tomuto teplotnímu gradientu říkáme *suchoadiabatický*.

Když je relativní vlhkost vzduchu rovna 100 %, při výstupu bude ve vzduchu kondenzovat vodní pára, která bude vzduchu dodávat teplo.[4] Vzduch se pak bez dalšího dodaného tepla ochladí o 0,65 °C/100 m. Tomuto teplotnímu gradientu říkáme *nasyceně adiabatický*. Když bude na počátku nasycený vzduch klesat, tak se jeho teplota zvýší, čímž se jeho relativní vlhkost sníží pod 100 %.

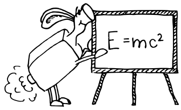
Tvorba oblaků

Oblaka se nejčastěji tvoří dvěma procesy. Buďto konvekcí, a to když se teplota s výškou hodně snižuje, díky čemuž začne teplý vzduch při zemi stoupat do výšky. Když tento vzduch překoná kondenzační hladinu, což je určitá výška, v níž tento vzduch dosáhne teploty rosného bodu, tedy stoprocentní relativní vlhkosti, vodní pára začne kondenzovat a vytvoří se oblak. Vodní kapičky v oblaku jsou opravdu malé, a tak je ve vzduchu udrží výstupné (konvektivní) proudy, které si můžete představit jako vítr foukající svisle vzhůru.

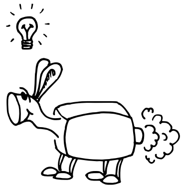
Když jsou však kapičky moc těžké, toto proudění je v oblaku neudrží a začnou vypadávat (začne pršet nebo sněžit). Konvekcí vznikají kupovitá oblaka, tedy latinsky druhu cumulus, mezi něž se řadí i bouřkový oblak Cumulonimbus, který může být až kolem 10 km vysoký. Srážky vypadávající z těchto oblaků bývají intenzivní, avšak mívají krátké trvání, zpravidla desítky minut, maximálně pár hodin.

Druhým způsobem, kterým se často vytvářejí oblaka, je přechod teplejšího, vlhčího vzduchu po sušším a studenějším, čímž se teplejší vzduch ochlazuje. Navíc často ještě po studeném vzduchu tzv. vykluzuje, tedy lehce stoupá, čímž se ještě více ochladí a vodní pára opět po zvýšení relativní vlhkosti na 100 % kondenzuje. Takto se vytváří oblaka typu stratus. Tato oblaka bývají velmi plošně rozsáhlá, a proto z těchto oblaků obvykle vypadávají srážky několik hodin i několik dnů, ale nemívají takovou intenzitu jako srážky z kupovitých oblaků.

[4] Přeměna vody na vodní páru (var vody) vyžaduje dodávání tepla. Opačný proces (kondenzace) musí toto teplo uvolňovat.



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Logistika

5 bodů; průměr 4,56; řešilo 45 studentů

Kuba bydlí poblíž velkého překladiště, do kterého neustále přijíždějí auta s nejrůznějším zbožím. Pozorováním tohoto shonu pod okny časem zjistil, že:

- *osobní auta přijíždějí každých* 10 minut *a na překladiště dovezou vždy přesně* 20 kg *úhledně zabalených tenisových míčků,*
- *malé dodávky se na překladišti objeví v průměru jednou za* 45 minut*, přičemž každá z nich doveze* 210 kg *hopíků,*
- *každých* 50 minut *přijede velký kamion a na překladiště vyloží* 1 500 kg *skleněných kuliček.*

Všechno toto kulaté zboží je pak přeloženo na vlak. Ten je složen ze tří vagónů, nosnost každého z nich je 16,5 t*. Jakmile je vlak naplněn, z nádraží odjede. Zjistěte, jak často musí vlak z nádraží odjíždět, tzn. vypočtěte, za jak dlouho se vlak naplní.*

Tato úloha se dá vyřešit mnoha různými způsoby. Aby byla matematicky úplně správně, musíme sestavit rovnici, ze které nám na konci vyjde jedna neznámá, kterou hledáme. V našem případě je tato neznámá čas.

Vycházejme z toho, že součet hmotností třech druhů zboží se rovná nosnosti třech vagónů:

$$\text{míčky} + \text{hopíky} + \text{kuličky} = \text{celková nosnost}\,.$$

Vlak je složen ze tří vagónu, přičemž nosnost každého z nich je 16,5 t. Proto

$$\text{celková nosnost} = 3 \cdot 16{,}5\,\mathrm{t} = 49{,}5\,\mathrm{t} = 49\,500\,\mathrm{kg}\,.$$

Do jednoho vlaku se může vejít P_m nákladů míčků, P_h nákladů hopíků a P_k nákladů kuliček tak, aby jejich celková hmotnost byla stejná, jako je nosnost vlaku:

$$20\,\mathrm{kg} \cdot P_\mathrm{m} + 210\,\mathrm{kg} \cdot P_\mathrm{h} + 1\,500\,\mathrm{kg} \cdot P_\mathrm{k} = 49\,500\,\mathrm{kg}\,.$$

Teď musíme zjistit, jaké jsou počty P_m, P_h a P_k. Ze zadání víme, že každých 10 minut jsou přivezeny míčky, každých 45 minut hopíky a každých 50 minut kuličky. *V průměru* se tak za 5 minut na překladiště doveze zboží s celkovou hmotností

$$20\,\mathrm{kg} \cdot \frac{5\,\mathrm{min}}{10\,\mathrm{min}} + 210\,\mathrm{kg} \cdot \frac{5\,\mathrm{min}}{45\,\mathrm{min}} + 1\,500\,\mathrm{kg} \cdot \frac{5\,\mathrm{min}}{50\,\mathrm{min}}\,.$$

Z tohoto příkladu je vidět, že počet nákladů je zde nahrazen časem, který nás zajímá, dělený časem, jak často je zboží přiváženo. Úplně obecně tedy můžeme říct, že do vlaku se vejde tolik nákladů, kolik se jich stihlo za hledaný čas t dovézt:

$$20\,\mathrm{kg} \cdot \frac{t}{10\,\mathrm{min}} + 210\,\mathrm{kg} \cdot \frac{t}{45\,\mathrm{min}} + 1\,500\,\mathrm{kg} \cdot \frac{t}{50\,\mathrm{min}} = 49\,500\,\mathrm{kg}\,.$$

Tuto rovnici začneme upravovat. Nejdříve „zapomeneme“ na jednotky – budeme si ale pamatovat, že všechny hmotnosti měříme v kilogramech a časy v minutách. Pak pokrátíme čísla v jednotlivých zlomcích:

$$2t + \frac{14t}{3} + 30t = \frac{110t}{3} = 49\,500\,,$$

a z rovnice vyjádříme t:

$$t = \frac{3 \cdot 49\,500}{110} = 1\,350\,.$$

Vlak se tedy naplní za 1 350 min, což činí 22,5 h.

Samozřejmě, tato úloha se dala pojmout mnohými jinými způsoby. Nicméně, „poctivý“ matematický zápis je jedna z nejspolehlivějších metod řešení, což je také důvod, proč ji uvádíme jako vzorové řešení. Dobrým bodovým ziskem ohodnotíme ale všechna správná řešení.

Kateřina Stodolová
`katas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.2 ... Úsporné tenisáky

4 body; průměr 3,67; řešilo 93 studentů

Nejlepší firma na výrobu míčků v okolí vděčí za svůj úspěch zejména revoluční myšlence úhledně balit míčky do krabic, které mají tvar krychle s hranou dlouhou 20 cm. *Poloměr balených míčků je* 5 cm.

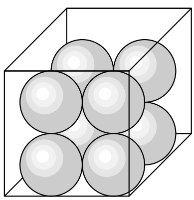
(a) Kolik míčků se vejde do jedné krabice? Nakreslete nám obrázek, jak míčky do krabice naskládat tak, aby se jich tam vešlo co nejvíce.

(b) Jakou část objemu krabice zabírají takto uložené míčky?

Pomůcka Objem koule s poloměrem r je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

(a) Důležitým poznatkem ze zadání je, že poloměr koule je 5 cm. To znamená, že koule zabere 5 cm místa do všech směrů, celkově tedy 10 cm na délku a dalších 10 cm na výšku. Do krabice se tedy vejdou dva míčky vedle sebe – jak na délku, tak i na šířku a na výšku. Nejvíce míčků se do krabice vejde, když vedle sebe vyskládáme 4 míčky a další 4 míčky uložíme na ně jako druhé patro.



Obr. 2: Rozložení míčků v krabici

(b) Nejprve si vypočítáme objem krychle jako součin délek všech tří hran

$$V_{\text{krychle}} = (20\,\text{cm})^3 = 8\,000\,\text{cm}^3\,.$$

Teď si vypočítáme objem jedné koule. Vzorec pro výpočet koule máme v zadání. Pro poloměr koule 5 cm dostáváme

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi(5\,\text{cm})^3 \doteq 523{,}60\,\text{cm}^3\,.$$

Tuto hodnotu vynásobíme osmi, čímž získáme objem koulí v krabici. Procentuální podíl objemu koulí získáme vydělením tohoto objemu objemem krabice a vynásobením 100 %, tzn.

$$p = \frac{8V_{\text{koule}}}{V_{\text{krabice}}} \cdot 100\,\% = \frac{8 \cdot 523{,}60\,\text{cm}^3}{8\,000\,\text{cm}^3} \cdot 100\,\% \doteq 52\,\%\,.$$

Koule zabírají přibližně 52 % objemu krabice.

Martin Komínek

Úloha I.3 ... Meteorologická

5 bodů; průměr 4,34; řešilo 77 studentů

Petr je velký ekolog. Proto všechnu dešťovou vodu, kterou sesbírá ze střechy své kůlny, svádí do sudu a používá ji na zalévání zahrádky během sucha. Poněvadž toto léto bylo opravdu sucho, prvního srpna Petrovy zásoby vody v sudu došly. Naštěstí meteorologové předpovídali na následující dny déšť (viz obrázek).

Petr proto postavil sud pod okap a zahrádku opustil. A skutečně, déšť se přesně podle předpovědi dostavil a pršelo opravdu vydatně několik následujících dní. Když se Petr šestého srpna na zahrádku vrátil, čekalo ho překvapení – sud přetekl a voda pocákala vše okolo. „To je divné," pomyslel si, „přece tolik nepršelo. Vždyť jsem si všechno pečlivě spočítal!"

Pomozte Petrovi vyřešit tuto záhadu. Nakreslete graf, kde vynesete změnu výšky hladiny vody v sudu v závislosti na čase.[5] Graf rovněž pečlivě popište, nezapomeňte na označení os a jednotek. Rovněž v grafu vyznačte, kdy začal sud přetékat.

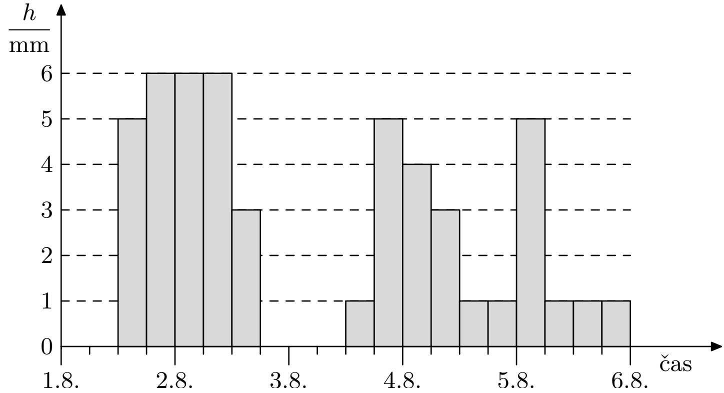
Střecha, ze které je voda sváděna, má (shora) rozměry $3 \times 4\,\text{m}$, *sud je vysoký* 80 cm *a obsah jeho dna je* $0{,}6\,\text{m}^2$. *Vodu, která napršela přímo do sudu, zanedbejte.*

Nejdříve si spočítáme, jaký je poměr obsahu (plochy) střechy a obsahu podstavy sudu, neboť voda je do sudu sváděna z celé plochy střechy. Tento poměr je

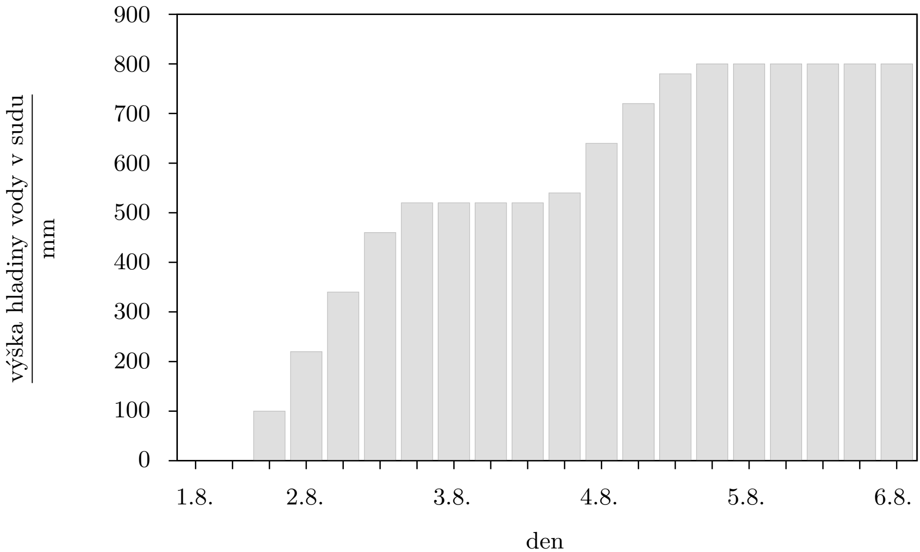
$$\frac{S_{\text{střecha}}}{S_{\text{sud}}} = \frac{12\,\text{m}^2}{0{,}6\,\text{m}^2} = 20\,.$$

Střecha má tedy dvacetkrát větší plochu než podstava sudu. Což mimo jiné znamená, že každý milimetr srážek, který spadne na střechu, nateče do sudu a zvýší hladinu vody v sudu o 20 mm. Z toho plyne, že každý sloupec v zadaném grafu množství spadlých srážek musíme vynásobit dvaceti, abychom dostali výšku hladiny vody v sudu, jehož výška činí 800 mm.

[5] To znamená, že na vodorovnou osu vyneste čas, na svislou osu výšku hladiny vody v sudu.



Obr. 3: Předpověď úhrnu srážek pro Petrovu zahrádku. Hodnota v mm vyjadřuje, jak vysoká „vrstva“ vody spadne v daném časovém úseku na $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu.



Obr. 4: Časová závislost výšky hladiny vody v sudu

Budeme-li postupovat od začátku, za první sloupec v grafu dostaneme výšku hladiny v sudu $20 \cdot 5\,\mathrm{mm} = 100\,\mathrm{mm}$, za druhý $20 \cdot 6\,\mathrm{mm} = 120\,\mathrm{mm}$. V sudu bude v tuto chvíli 220 mm vody, takže pokračujeme dál obdobným způsobem. Například 2. 8. v 18:00 dosáhne hladina vody v sudu již 520 mm.

Postupným přičítáním přírůstků zjistíme, že hladina vody v sudu dosáhne výšky 800 mm právě 4. 8. v 18:00. Jelikož je sud vysoký též 800 mm, začne každým dalším dolitím vody přetékat a výška hladiny již tedy nebude dál stoupat.

David Němec
david@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Podivná koule

6 bodů; průměr 4,40; řešilo 68 studentů

Radka našla na Matfyzu starou kouli z hliníku. Když ji chtěla zahodit do Vltavy, koule překvapivě začala na vodě plovat tak, že ponořena byla přesně polovina jejího objemu. Radka jako správná fyzička usoudila, že koule, jež je vyrobena z hliníku o hustotě $2\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *plove na vodě pouze v případě, že je dutá.*

Jak tlustou stěnu měla Radčina koule, pokud byl její poloměr $10\,\mathrm{cm}$*? Hmotnost vzduchu, který se nachází v dutině, klidně zanedbejte.*

Když koule plove na hladině, platí, že tíhová síla působící na kouli musí být v rovnováze se vztlakovou silou, tedy $F_g = F_{\mathrm{vz}}$.

Z druhého Newtonova zákona víme, že $F_g = mg = \varrho_{\mathrm{Al}} V_{\mathrm{k}} g$, kde $\varrho_{\mathrm{Al}} = 2\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota hliníku a V_{k} je objem kulové slupky tvořící stěnu koule. Tento objem spočteme jako objem koule s poloměrem r mínus objem prázdné koule uvnitř s poloměrem $(r-d)$, kde d je naše hledaná tloušťka stěny. Hmotnost vzduchu uvnitř koule zanedbáme:

$$m = \varrho_{\mathrm{Al}} V_{\mathrm{k}} = \varrho_{\mathrm{Al}} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi\left(r-d\right)^3\right] = \varrho_{\mathrm{Al}} \frac{4}{3}\pi\left[r^3 - (r-d)^3\right] .$$

Vztlaková síla se vypočte jako součin objemu ponořené části V_{p} (část, která je pod vodou, tzn. polovina koule), hustoty vody ve Vltavě o hustotě $\varrho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a tíhového zrychlení:

$$F_{\mathrm{vz}} = V_{\mathrm{p}} \varrho_{\mathrm{v}} g = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\mathrm{v}} g = \frac{2}{3}\pi r^3 \varrho_{\mathrm{v}} g .$$

Nyní už jen stačí tyto síly dát do rovnosti, vyjádřit ze vzniklé rovnice d a dosadit hodnoty ze zadání. Jejich jednotky dokonce nemusíme ani převádět do základních jednotek, protože se nám ve výsledku všechno pokrátí a zůstane nám pouze tloušťka v centimetrech:

$$d = r - \sqrt[3]{r^3 - \frac{r^3 \varrho_{\mathrm{v}}}{2\varrho_{\mathrm{Al}}}} = 10\,\mathrm{cm} - \sqrt[3]{1\,000\,\mathrm{cm}^3 - \frac{1\,000\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}{2 \cdot 2\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}} \doteq 0{,}72\,\mathrm{cm} .$$

Tloušťka stěny staré koule z hliníku je tedy asi $0{,}72\,\mathrm{cm}$.

Poznámky k došlým řešením

Mnozí z vás jste ve svých řešeních počítali s průměrnou hustotou Radčiny koule ϱ_{t}. Tu lze vypočítat také z rovnováhy vztlakové a tíhové síly

$$\frac{1}{2} V \varrho_{\mathrm{v}} g = V \varrho_{\mathrm{t}} g \quad \Rightarrow \quad \varrho_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{v}} = 500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} .$$

Hmotnost koule $V\varrho_{\mathrm{t}}$ se tudíž musí rovnat hmotnosti hliníkové části a dutiny (jejíž hmotnost uvažujeme rovnou nule):

$$V\varrho_{\mathrm{t}} = xV\varrho_{\mathrm{Al}} + (1-x)\,V \cdot 0\,\mathrm{kg} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5} .$$

Hliníková část tudíž zabírá 1/5 objemu koule; zbylé 4/5 objemu koule tvoří dutina. Je tedy již snadné vypočítat poloměr kulové dutiny. Odečteme-li tento poloměr od poloměru Radčiny koule, získáme hledanou tloušťku stěny.

Petra Štefaníková
`petras@vyfuk.mff.cuni.cz`

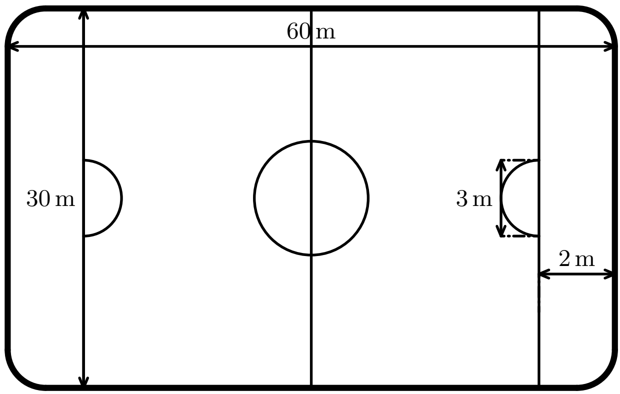
Úloha I.5 ... Klouže to

8 bodů; průměr 3,77; řešilo 44 studentů

Jeden horký letní večer myslel Jindra na zimní prázdniny a na jeho oblíbený hokej. Když byl naposledy na stadionu, led byl perfektně kluzký, jen měl jednu vadu – kluziště nebylo vodorovné.

Jindra to poznal tak, že puk, který položil do středu kluziště, se začal sám bez tření klouzat přímo k jednomu z delších mantinelů. Stopkami Jindra změřil, že tato „cesta“ puku trvá přesně 13,3 s. *Toto zjištění ale Jindru moc nepotěšilo, neboť všechny rovné střely na bránu budou na nakloněném kluzišti vybočovat.*

(a) *Jindra stojí ve středu kluziště a střílí přímo na střed branky rychlostí* $v_1 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Jak se domníval, bránu kvůli náklonu kluziště netrefil. Nakreslete, jak asi vypadala trajektorie puku, který Jindra vystřelil.*
(b) *Vypočítejte, o kolik byla Jindrova střela odchýlena od středu branky v čase, kdy byla na úrovni brankové čáry.*
(c) *Jakou nejmenší rychlostí* v_2 *musí Jindra vystřelit, aby bránu trefil?*
(d) *Jak velkou rychlost by měl takto vystřelený puk v čase průchodu brankovou čárou?*
(e) *Určete velikost úhlu náklonu kluziště.*



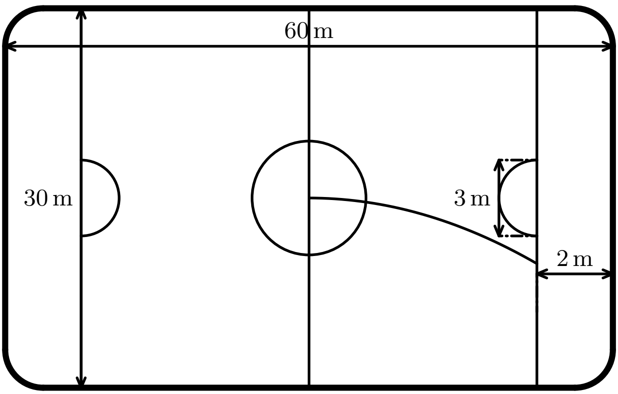
Obr. 5: Schéma kluziště a jeho rozměry

(a) Je třeba si uvědomit, že pohyb puku se skládá ze dvou *nezávislých* částí (složek). První je vodorovný pohyb puku směrem od středu kluziště do brány. Rychlost puku v tomto směru je konstantní – led je dokonale hladký, a proto zde není třecí síla, která by jeho pohyb zpomalovala. Druhým pohybem je sklouzávání puku „do strany“. Rychlost tohoto pohybu směřuje kolmo k delšímu mantinelu, viz obrázek 5. Na rozdíl od předchozího případu, tento pohyb je rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, tzn. jeho rychlost se v čase zvyšuje. Závěrem připomeňme, že oba pohyby mají počátek ve středu kluziště a jsou na sebe kolmé.

Rychlost $v_1 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je pořád konstantní – její vektor bude úsečka stále o stejné velikosti a směru. Jenže puk se nebude pohybovat pořád rovně. Jelikož nám ve směru dolů (k delšímu mantinelu) puk zrychluje, jeho trajektorie se začne zakřivovat.[6]

Pro lepší pochopení si vyberme krátký časový úsek (třeba 1 s) a zamysleme se, o jakou vzdálenost se v jednotlivých směrech puk posune. Ve vodorovném směru (přímo ke kratšímu mantinelu) je, jak jsme již zmínili, pohyb rovnoměrný. Proto se *každou sekundu* puk přiblíží ke kratšímu mantinelu o stejnou vzdálenost (pro rychlost v_1 to bude $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{m}$). V kolmém směru (směrem k delšímu mantinelu) bude situace poněkud odlišná. Již jsme si řekli, že na začátku pohybu má v tomto směru puk nulovou počáteční rychlost, která rovnoměrně roste. To znamená, že během první sekundy rychlost puku v tomto směru naroste na nějakou (malou) hodnotu a puk se trochu přiblíží k delšímu mantinelu. Během druhé sekundy se rychlost opět zvýší o stejnou hodnotu. Avšak přiblížení puku k delšímu mantinelu stejné nebude, protože na začátku druhé sekundy již puk měl v tomto směru nějakou (počáteční) rychlost a na konci rychlost ještě větší. Puk se proto během druhé sekundy musí do strany posunout *více* než během první sekundy.

Další vývoj posunutí bude stejný, tzn. během každé vteřiny se puk přiblíží k delšímu mantinelu více než během předchozí. Naopak, v kolmém směru se bude puk posouvat stále stejně. Výsledná trajektorie proto musí být nutně zakřivena.



Obr. 6: Trajektorie vystřeleného puku

(b) Cílem je zjistit dráhu, kterou puk ujede ve svislém směru k delšímu mantinelu za čas, který potřebuje, aby ve vodorovném směru dojel na brankovou čáru rychlostí v_1.

Čas snadno spočteme, protože dráhu od středu kluziště po brankovou čáru si přečteme na

[6] Konkrétně se trajektorie zakřiví do tvaru paraboly, jelikož velikost rychlosti puku směrem k delšímu mantinelu roste pořád stejným tempem.

nákresu u zadání (= 28 m). Jednoduše tedy zjistíme, že

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{28\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 7\,\mathrm{s}\,.$$

Jak již bylo zmíněno, ve svislém směru počítáme se zrychleným pohybem. Nejdříve tedy musíme zrychlení puku a zjistit. Vystačíme si se vzorcem pro dráhu zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí[7] $s = at^2/2$ a s poznatkem, že dráhu $s^* = 15\,\mathrm{m}$ (polovina šířky kluziště) puk projel za čas $t = 13{,}3\,\mathrm{s}$. Po úpravě předchozího vztahu dostáváme:

$$a = \frac{2s^*}{t^2} = \frac{2\cdot 15\,\mathrm{m}}{13{,}3\,\mathrm{s}^2} \doteq 0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Toto zrychlení dosadíme opět do vzorce pro dráhu zrychleného pohybu, ale s časem $t_1 = 7\,\mathrm{s}$. Tím dostaneme hledanou vzdálenost d_1, o kterou se puk odchýlil od přímého směru:

$$d_1 = \frac{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot(7\,\mathrm{s})^2}{2} \doteq 4{,}17\,\mathrm{m}\,.$$

(c) Nejprve si musíme rozmyslet, jak závisí vychýlení puku na rychlosti Jindrovy střely. Čím rychleji Jindra vystřelí, tím kratší čas se bude puk pohybovat, než se dostane na úroveň branky. Rovněž ale platí, že za kratší čas puk sklouzne méně do strany. Pro nalezení minimální rychlosti Jindrovy střely musíme tedy hledat takovou rychlost, při níž puk sklouzne co nejvíc do strany, ale zároveň se jím Jindra trefí do branky. Toto maximální sklouznutí je jednoduše polovina šíře branky ($d_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$).
Situace je tedy oproti předchozí úloze obrácená: známe maximální odchýlení, ale chybí nám rychlost v_2. Proto budeme obráceně i postupovat. Nejprve si ze vztahu pro dráhu zrychleného pohybu vyjádříme čas:

$$d_2 = \frac{1}{2}at_2^2 \quad\Rightarrow\quad t_2 = \sqrt{\frac{2d_2}{a}}\,.$$

Po dosazení známých hodnot tedy získáváme

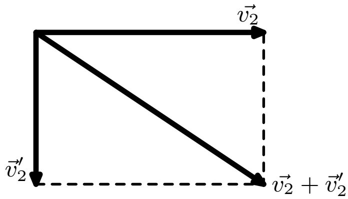
$$t_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}} \doteq 4{,}2\,\mathrm{s}\,.$$

Teď už vypočteme jen rychlost $v_2 = s/t_2$, kde dráha s je přímá vzdálenost od středu hřiště po brankovou čáru:

$$v_2 = \frac{28\,\mathrm{m}}{4{,}2\,\mathrm{s}} \doteq 6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

(d) Na první pohled to vypadá tak, že odpovědí je rychlost v_2, vypočítaná před chvílí. Není tomu ale tak. Nesmíme totiž zapomenout na sklouzávání puku do strany a obě rychlosti správně sečíst. Jelikož směry rychlostí jsou na sebe kolmé, výslednou rychlost vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, kde tyto dvě rychlosti budou odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a jeho přepona bude výsledná rychlost v.

[7] Pokud nějaký předmět zrychluje z klidu se zrychlením a po dobu t, nabude rychlost $v = at$. Ve vzorci se bohužel nenachází žádná dráha, kterou my chceme zjistit. Proto nejprve spočítáme průměrnou rychlost zrychleného pohybu. Jestliže rychlost po dobu t rovnoměrně rostla z nuly na v, průměrná rychlost pohybu je $v_\mathrm{p} = v/2$.
Dále platí, že dráha s, kterou za čas t ujede těleso zrychleně, musí být stejná jako dráha, kterou za stejnou dobu ujede rovnoměrnou rychlostí v_p. Proto je dráha zrychleného pohybu $s = v_\mathrm{p}t = vt/2$. Dosadíme-li za rychlost $v = at$, dostáváme výsledný vztah pro dráhu zrychleného pohybu $s = at^2/2$.



Obr. 7: Skládání rychlostí

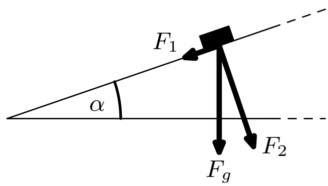
Zatím však onu rychlost sklouzávání v momentu průchodu brankovou čarou[8] neznáme, nejprve ji tedy musíme zjistit. Puk v tomto směru zrychluje po dobu t_2 zrychlením a z nulové počáteční rychlosti. Jeho rychlost tedy naroste na

$$v_2' = at_2 = 0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{s} \doteq 0{,}71\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Nyní zmíněné rychlosti (v_2 a v_2') složíme do jedné. Jak již bylo řečeno, použijeme Pythagorovu větu:

$$v^2 = v_2^2 + {v_2'}^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{v_2^2 + {v_2'}^2} = \sqrt{(6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (0{,}71\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} \doteq 6{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

(e) Kluziště si představíme jako nakloněnou rovinu, viz obrázek 8. Opět tu vidíme pravoúhlý trojúhelník (díky podobnosti trojúhelníků). Na puk působí tíhová síla F_g, kterou ale lze rozložit na složku F_1 (síla ve směru roviny – způsobuje zrychlení puku) a sílu F_2 (síla kolmá na rovinu – přitlačuje puk ke kluzišti).



Obr. 8: Pohled na kluziště zboku

Díky goniometrické funkci sinus v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou F_g vypočítáme délku odvěsny protilehlé k úhlu α, tzn. velikost síly F_1, která způsobuje odchylování puku do strany. Platí tedy

$$\sin\alpha = \frac{F_1}{F_g}\,.$$

Sílu F_1 již známe: umíme ji vypočítat jako součin hmotnosti puku a zrychlení, které tato síla způsobuje: $F_1 = ma$. Tedy pro sinus úhlu α platí

$$\sin\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} = 0{,}017\,.$$

[8] Nemusí to být nutně průchod brankou.

S tímhle výsledkem již nemůžeme udělat nic jiného, než ho zadat do kalkulačky a použít funkci arcus sinus (na kalkulačce $\sin^{-1}$), která zjistí úhel, pro který je sinus hodnota zadaná do kalkulačky. Dostáváme $\alpha \doteq 0{,}97^\circ$. Náklon Jindrova kluziště je tedy přibližně jeden stupeň.

Poznámky k došlým řešením

Mile mě překvapil počet lidí, kteří získali plný počet bodů. Mějte na paměti, že to byla jedna z těch těžších úloh (ne-li ta nejtěžší) a většina z vás si vedla opravdu dobře.

Bohužel, málokdo si uvědomil, že puk klouže do strany k mantinelu rovnoměrně zrychleným pohybem, a tak je jeho trajektorie *zakřivená*. Kdyby to byla přímka, tak by puk v obou směrech (k mantinelu i k brance) jel rovnoměrným přímočarým pohybem. Proto vám vycházely velké rychlosti a ještě větší velikosti odchýlení puku od středu branky.

Pokud jste počítali s tím, že rychlost puku směrem k mantinelu je konstantní (což není), pak jste v drtivé většině sice spočítali průměrnou rychlost puku, ale jen v případě, že opravdu urazí celých 15 m a celých 13,3 s, což třeba bod (b) nesplňoval.

Někteří si odvodili vzorec pro hodnotu zrychlení sami jako $a = s/t^2$, což je jednotkově správně, naneštěstí ale ve vzorci chybí konstanta 1/2. Proto se vaše zrychlení ve skutečnosti rovnalo polovině správného. V tomto vzorovém řešení naleznete správné odvození.

Pavla Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Tekutý poklad 7 bodů; průměr 3,64; řešilo 73 studentů

Vaším úkolem bude změřit, jaký největší objem vody je možné nakapat[9] *na mince o hodnotách 10 Kč a 50 Kč tak, aby se kapka na minci udržela. Aby bylo vaše měření přesné, pro každou minci jej zopakujte alespoň 10-krát a naměřené hodnoty zprůměrujte.*

Pak experiment zopakujte s vodou, do které přidáte trochu prostředku na mytí nádobí. Jak se změnila schopnost vody tvořit velké kapky? Kolikrát se zvětšil nebo zmenšil průměrný objem kapky?

Teorie

Všechno v přírodě se snaží mít co nejmenší energii. V případě rozhraní dvou tekutin to znamená, že tekutiny se snaží mít co nejmenší plochu vzájemného rozhraní. Tuto vlastnost tekutin (mít co nejmenší povrch) charakterizuje tzv. povrchové napětí. Podrobně vysvětlit tento jev by znamenalo zabrouzdat do složitější fyziky, a proto nám bude stačit poznatek, že čím větší je povrchové napětí, tím víc se daná tekutina snaží „smrsknout“. V ideálním případě by se tekutina měla dostat do tvaru koule, avšak v důsledku deformací způsobených tíhovou silou nepozorujeme kulové, ale oválné kapky.

V našem případě kapka na minci bude růst více, než bychom čekali. Kapka se totiž z mince vylije až tehdy, když síly způsobující deformaci kapky (způsobeny zejména tíhovou sílou) překonají síly povrchového napětí. V onen okamžik se povrchová blanka kapky „protrhne“.

Přidáním jaru do vody se povrchové napětí vody sníží. Proto bychom měli pozorovat, že po přidání jaru se budou na mincích držet kapky s menším objemem.

[9] Na kapání doporučujeme použít co nejmenší injekční stříkačku, nejlépe s objemem 2 ml.

Měření

Experiment v tomto případě nebyl nijak extrémně složitý. Bylo zapotřebí si sehnat injekční stříkačku s co nejmenším objemem (ideálně 2 ml až 3 ml), aby měla dostatečně jemnou stupnici a naše měření mohlo být dostatečně přesné. Dále bylo potřeba sehnat mince v hodnotě 10 Kč a 50 Kč, které jsme umístili na vodorovnou plochu. Pokud bychom mince neumístili vodorovně, z jedné strany by na povrchovou blanku působila větší složka tíhové síly proti síle povrchového napětí. K protržení povrchové blanky by tak došlo dříve, což by naše měření znepřesnilo. Posléze již stačilo nabrat do stříkačky vodu, při čemž jsme si museli dávat pozor, aby ve stříkačce nebyly žádné vzduchové bublinky a abychom ve stříkačce měli známý objem vody (abychom mohli po nakapání určit, kolik vody jsme vlastně vykapali).

Měření jsme zopakovali 10-krát pro každou minci. Mezi každým měřením jsme minci osušili, abychom měli všechna měření za stejných podmínek. Při druhé sadě měření jsme do vody kápli trochu jaru a měření opět 10-krát zopakovali.

Naměřené hodnoty

Při zpracování naměřených dat nesmíme zapomenout na chybu měření. Chyby měření se dají spočítat mnoha způsoby, ale v našem případě si vystačíme se základní chybou jednoho měření, kterou spočteme jako $\Delta V = |V - \overline{V}|$, kde V je změřený objem a $\overline{V}$ je naměřený aritmetický průměr deseti měření.

Absolutní chybu průměrného objemu $\Delta\overline{V}$ pak spočítáme jako aritmetický průměr těchto odchylek a relativní odchylku jako

$$\delta V = \frac{\Delta V}{\overline{V}} \cdot 100\,\%\,,$$

tedy jako procentuální poměr absolutní odchylky k průměrné hodnotě.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty. Vlevo měření s vodou, vpravo s jarem.

	voda				voda s jarem			
	10 Kč		50 Kč		10 Kč		50 Kč	
číslo pokusu	V/ml	ΔV/ml	V/ml	ΔV/ml	V/ml	ΔV/ml	V/ml	ΔV/ml
1	2,0	0,0	2,8	0,1	1,1	0,0	2,0	0,1
2	2,1	0,1	2,6	0,1	1,0	0,1	2,1	0,0
3	2,0	0,0	2,6	0,1	1,2	0,1	2,1	0,0
4	2,0	0,0	2,8	0,1	1,2	0,1	2,2	0,1
5	2,1	0,1	2,7	0,0	1,0	0,1	2,2	0,1
6	1,9	0,1	2,6	0,1	1,1	0,0	2,1	0,0
7	2,0	0,0	2,7	0,0	1,0	0,1	2,0	0,1
8	2,1	0,1	2,9	0,2	1,1	0,0	2,2	0,1
9	1,9	0,1	2,7	0,0	1,1	0,0	2,0	0,1
10	1,9	0,1	2,6	0,1	1,2	0,1	2,1	0,0
průměr	2,0	0,1	2,7	0,1	1,1	0,1	2,1	0,1

Výsledek

Z našich naměřených dat vidíme, že objem kapky vody, kterou lze nakapat na desetikorunu je $(2{,}1 \pm 0{,}1)$ ml (relativní chyba 5 %) a na padesátikorunu $(2{,}7 \pm 0{,}1)$ ml (relativní chyba 4 %).

V okamžiku, kdy jsme do vody přidali jar, objem kapky se snížil na $(1{,}1 \pm 0{,}1)$ ml (chyba 10 %) a $(2{,}1 \pm 0{,}1)$ ml (chyba 5 %). Vidíme tedy, že přidáním jaru se objem kapky snížil na cca 50 % až 70 %. Tento poměr samozřejmě závisí na množství jaru, které jsme do vody přidali.

Diskuse

Měření je docela přesné a to hlavně proto, že jsme použili stříkačku s dostatečně jemnou stupnicí s nejmenším dílkem 0,5 ml. Největší chyba měření je způsobena tím, že povrchová blanka vody praskne až při dodání celé poslední kapky, takže dodáme o něco víc vody, než by bylo třeba. Další nepřesností je odečítání objemů na stříkačce, nedokonale vyrovnaná mince a podobně.

Jakub Sláma
`slama@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.C . . . Výfuček na procházce

7 bodů; průměr 5,85; řešilo 67 studentů

Výfuček je velký fanoušek kartézské soustavy souřadnic. On sám používá takovou, která má počátek (bod $[0, 0]$*) ve svém domě. Osa x směruje na východ, osa y na sever.*

(a) *O víkendu se Výfuček vybral ze svého domu na procházku. Nejprve se přesunul o vektor* $(1, 3)$ km*, poté o vektor* $(2, -1)$ km *a nakonec o* $(1, -5)$ km*. Určete polohu bodu, kde se právě nachází.*
(b) *Jak vzdálený je od Výfučka jeho dům?*
(c) *Výfučkův kamarád Paťo bydlí* 4 km *daleko od místa, kde se Výfuček nachází. Vektor Paťovy polohy (vektor spojující Výfučkovu aktuální polohu a bod, kde se Paťo nachází) svírá s osou x úhel* 60°*. Určete, kolik kilometrů musí Výfuček ujet ve směrech os x a y, aby za Patěm došel.*

(a) Nejnázornější je použít čtverečkovaný papír, kde jedna strana čtverečku bude odpovídat 1 km. Vektory Výfučkova pohybu pak jednoduše zakreslíme do této sítě. Začneme v počátku, tedy v bodě $[0, 0]$. Výfuček se posunul o vektor $(1, 3)$, tedy napočítáme jeden čtvereček v kladném směru osy x (doprava) a tři v kladném směru osy y (nahoru).
Vektor první části Výfučkova pohybu vyznačíme v síti jednoduše – nakreslíme šipku z výchozího bodu, tedy z $[0, 0]$ do konečného bodu, tj. $[1, 3]$. Tento bod se pro nás nyní stává výchozím a zjistíme další pohyb Výfučka, $(2, -1)$. Nyní napočítáme 2 čtverečky doprava a 1 dolů, vektor znázorníme opět jako šipku vedoucí z počátečního bodu $[1, 3]$ do koncového $[3, 2]$. Stejným způsobem zjistíme, že Výfuček se dostal do dalšího, nyní již jeho posledního, bodu $[4, -3]$.
Ke stejnému výsledku se můžeme dostat i matematickou cestou, a to pomocí sčítání vektorů. Sečtením všech vektorů posunutí získáme výsledný vektor posunutí

$$(1, 3) + (2, -1) + (1, -5) = (1 + 2 + 1, 3 - 1 - 5) = (4, -3)\,.$$

Výfuček se tedy z bodu $[0, 0]$ posunul do bodu $[0 + 4, 0 - 3] = [4, -3]$.

(b) Vzdálenost dvou bodů můžeme chápat také jako délku úsečky, která je spojuje. Všimneme si, že vzdálenost Výfučka od jeho domu můžeme spočítat pomocí Pythagorovy věty: aby se dostal domů, musel by Výfuček ujít 3 km po síti nahoru a 4 km doleva. Tyto dvě části cesty jsou na sebe navzájem kolmé a tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, přičemž jeho přeponou je právě spojnice Výfučka a jeho domu.
Vybaveni touto znalostí, výpočet je pro nás nyní snadný:

$$x^2 = (4\,\mathrm{km})^2 + (3\,\mathrm{km})^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{25\,\mathrm{km}^2} = 5\,\mathrm{km}\,.$$

Stejně jako v předchozí části i zde můžeme postupovat čistě matematicky. Stačí si uvědomit, že vzdálenost Výfučka od jeho domu je stejná jako velikost výsledného vektoru posunutí. Jak jsme si již řekli ve Výfučtení, velikost vektoru určíme pomocí Pythagorovy věty a dostáváme stejný výsledek jako v předchozím odstavci, tedy 5 km.

(c) Chceme-li zjistit, jakou vzdálenost musí Výfuček ujít ve směru osy x a jakou ve směru osy y, je třeba *rozložit* vektor Paťovy polohy. Jelikož známe výslednou vzdálenost k Paťovi (velikost vektoru), ale neznáme její složky v ose x a y, uděláme vlastně opačný postup, než jsme dělali v předchozí části. Zde si bohužel nemůžeme pomoct obrázkem a budeme muset počítat. Naštěstí můžeme využít vzorečků, které jsme si ukázali v textu Výfučtení.
Nejprve spočítáme x-ovou složku hledaného vektoru:

$$x = 4\,\mathrm{km} \cdot \cos(60^\circ) = 2\,\mathrm{km}\,.$$

Podobným způsobem vypočítáme i složku y-ovou:

$$y = 4\,\mathrm{km} \cdot \sin(60^\circ) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{km} \doteq 3{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Výfuček tedy musí ujít 2 km ve směru osy x (doprava) a 3,5 km ve směru osy y (nahoru).

Lukáš Fusek
`lukas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	5	6	8	7	7	**42**	**42**
1.	*Martin Kysela*	G Český Krumlov	5	4	4	2	–	3	5	**23**	**23**
2.	*Patrik Rosenberg*	ZŠ Tuháčkova, Brno	5	3	–	3	–	3	6	**20**	**20**
3.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	5	4	–	6	–	–	–	**15**	**15**
4.	*Pavel Šimůnek*	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**4**
5.	*Sára Božoňová*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	5	6	8	7	7	**42**	**42**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	5	4	5	5	8	7	7	**41**	**41**
2.	*Kryštof Pravda*	G Mensa, Praha	5	4	5	6	8	4	7	**39**	**39**
3.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	5	3	5	6	8	3	7	**37**	**37**
4.	*Ondřej Valášek*	ZŠ V. Kl. Klicpery, Nový Bydžov	5	2	5	4	8	3	3	**30**	**30**
5.–6.	*Ester Galiová*	ZŠ a MŠ Středokluky	5	4	5	2	–	5	7	**28**	**28**
5.–6.	*Adam Krška*	G Mikulov	5	4	4	5	1	2	7	**28**	**28**
7.–9.	*Natálie Křivancová*	G Český Krumlov	5	4	5	4	–	3	6	**27**	**27**
7.–9.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	5	3	5	–	–	7	7	**27**	**27**
7.–9.	*Tomáš Trtík*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	5	4	5	5	–	3	5	**27**	**27**
10.	*Vojtěch Vincíbr*	První české G, Karlovy Vary	5	3	5	2	1	–	7	**23**	**23**
11.	*Filip Temiak*	G Český Krumlov	5	4	5	4	–	2	0	**20**	**20**
12.–13.	*Tomáš Kavena*	Křesťanské G, Kozinova, Praha	5	4	4	–	1	5	–	**19**	**19**
12.–13.	*Filip Matůš*	ZŠ Valašská Polanka	5	4	5	5	–	–	–	**19**	**19**
14.	*Isabela Andreevská*	Spec. soukromé G Integra, Brno	5	4	5	–	–	4	–	**18**	**18**
15.–16.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	5	4	4	4	–	–	–	**17**	**17**
15.–16.	*Tomáš Kudrnáč*	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	5	4	–	1	–	2	5	**17**	**17**
17.	*Barbora Vosková*	G Legionářů, Příbram	5	4	–	1	0	4	2	**16**	**16**
18.	*Luboš Petráň*	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	5	–	2	–	–	5	–	**12**	**12**
19.	*Miroslav Kotsyba*	ZŠ a MŠ Helsinská, Tábor	5	4	2	–	–	–	–	**11**	**11**
20.	*Martin Kolovratník*	ZŠ Pardubice - Studánka	3	2	–	2	–	–	3	**10**	**10**
21.–22.	*Honza Bartoš*	První české G, Karlovy Vary	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**9**
21.–22.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**9**
23.	*Jakub Hembera*	G Jindřichův Hradec	5	–	–	–	–	2	–	**7**	**7**
24.–26.	*Monika Bambuchová*	ZŠ Valašská Polanka	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
24.–26.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
24.–26.	*Anežka Zobačová*	ZŠ Vratislavovo nám., NMnM	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
27.	*Jakub Tománek*	ZŠ Hošťálková	1	–	–	–	–	–	–	**1**	**1**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		4	5	6	8	7	7	**37**	**37**
1.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	4	5	6	8	7	7	**37**	**37**
2.–3.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	–	4	5	6	8	5	7	**35**	**35**
2.–3.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	–	4	4	5	8	7	7	**35**	**35**
4.	*Lubor Čech*	G Mikulov	–	4	5	6	3	7	7	**32**	**32**
5.	*Michal Grus*	G Dobruška	–	4	5	6	–	4	7	**26**	**26**
6.–7.	*František Krůs*	Masarykovo G, Plzeň	–	3	4	6	–	5	7	**25**	**25**
6.–7.	*Julie Rubášová*	Biskupské G, Brno	–	4	3	6	2	4	6	**25**	**25**
8.–9.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	4	–	5	5	3	7	**24**	**24**
8.–9.	*Radim Šafář*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	4	5	6	–	4	5	**24**	**24**
10.–13.	*Tereza Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	4	5	6	–	–	7	**22**	**22**
10.–13.	*Filip Holoubek*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	4	–	6	1	4	7	**22**	**22**
10.–13.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	4	4	5	–	3	6	**22**	**22**
10.–13.	*Jiří Zikmund*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	2	5	6	1	3	5	**22**	**22**
14.–15.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	5	8	–	7	**20**	**20**
14.–15.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	–	4	4	3	0	4	5	**20**	**20**
16.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	3	3	6	–	2	5	**19**	**19**
17.–19.	*Filip Řeháček*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	5	5	1	–	7	**18**	**18**
17.–19.	*Eliška Švecová*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	4	5	–	–	4	5	**18**	**18**
17.–19.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	4	5	–	–	4	5	**18**	**18**
20.–22.	*Petr Budai*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	4	4	2	6	–	–	**16**	**16**
20.–22.	*Ondřej Man*	ZŠ T. G. Masaryka Jihlava	–	4	5	4	0	3	–	**16**	**16**
20.–22.	*Ondřej Polanecký*	1. ZŠ TGM Milevsko	–	4	3	2	1	1	5	**16**	**16**
23.	*Filip Trhlík*	G J. Škody, Přerov	–	3	4	–	8	–	–	**15**	**15**
24.	*Anna Sovová*	Klasické a španělské G, Brno	–	4	5	–	–	5	–	**14**	**14**
25.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	1	6	5	**12**	**12**
26.–27.	*Vojtěch Kuchař*	ZŠ Sobotka	–	4	4	–	–	–	–	**8**	**8**
26.–27.	*Lada Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	1	0	0	–	2	5	**8**	**8**
28.	*Jiří Zinecker*	G Komenského, Havířov	–	3	4	–	–	–	–	**7**	**7**
29.–30.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	–	4	–	–	–	2	–	**6**	**6**
29.–30.	*Adam Závora*	15. základní škola Plzeň	–	4	–	–	–	2	–	**6**	**6**
31.	*David Zatloukal*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	3	1	–	–	0	–	**4**	**4**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		4	5	6	8	7	7	**37**	**37**
1.	*Václav Zvoníček*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	4	6	8	7	7	**36**	**36**
2.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	4	5	6	8	5	7	**35**	**35**
3.	*Šimon Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	4	5	6	8	4	7	**34**	**34**
4.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	4	5	4	5	6	7	**31**	**31**
5.–6.	*Tomáš Salavec*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	3	4	6	8	3	6	**30**	**30**
5.–6.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	5	5	8	1	7	**30**	**30**
7.–9.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	4	5	5	–	6	7	**27**	**27**
7.–9.	*Václav Pavlíček*	ZŠ a MŠ Ždírec nad Doubravou	–	4	5	5	1	5	7	**27**	**27**
7.–9.	*Lenka Tomanová*	ZŠ Měřín	–	4	5	6	1	4	7	**27**	**27**
10.–11.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	5	5	3	2	7	**26**	**26**
10.–11.	*Adam Vavrečka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	3	5	6	8	4	–	**26**	**26**
12.–13.	*Aneta Pouková*	ZŠ Horní Čermná	–	4	5	2	1	5	7	**24**	**24**
12.–13.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	4	5	5	–	3	7	**24**	**24**
14.–15.	*Adam Nekolný*	G, Písnická, Praha	–	3	4	5	1	3	7	**23**	**23**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		4	5	6	8	7	7	**37**	**37**
14.–15.	*Filip Novotný*	G Jihlava	–	4	4	4	1	3	7	**23**	**23**
16.–17.	*Miroslav Jarý*	ZŠ Velké Poříčí	–	3	5	5	–	4	5	**22**	**22**
16.–17.	*Filip Wagner*	G Tišnov	–	4	5	5	–	3	5	**22**	**22**
18.–19.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	4	3	3	3	1	7	**21**	**21**
18.–19.	*Jan Vondra*	G Týn nad Vltavou	–	4	5	2	1	3	6	**21**	**21**
20.–21.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	4	4	3	–	2	7	**20**	**20**
20.–21.	*Jaroslav Scheinpflug*	ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Bud	–	4	5	–	–	4	7	**20**	**20**
22.	*Pavla Rudolfová*	ZŠ Komenského náměstí, Slavkov u	–	4	3	4	–	4	4	**19**	**19**
23.	*Martin Bína*	G, Moravská Třebová	–	4	5	4	–	–	5	**18**	**18**
24.	*Vojtěch Ježek*	G Legionářů, Příbram	–	4	–	6	–	–	7	**17**	**17**
25.–27.	*Martin Flídr*	G Masarykovo nám., Kroměříž	–	3	4	–	–	4	5	**16**	**16**
25.–27.	*Victoria Grundlerová*	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	4	5	2	1	2	2	**16**	**16**
25.–27.	*Jiří Hocek*	ZŠ Veronské náměstí, Praha	–	4	4	6	–	2	–	**16**	**16**
28.	*Alena Osvaldová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	3	5	5	2	–	–	**15**	**15**
29.	*Jakub Bartoš*	G, Písnická, Praha	–	–	5	–	1	3	5	**14**	**14**
30.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	3	4	6	–	–	–	**13**	**13**
31.–33.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	4	4	–	–	–	4	**12**	**12**
31.–33.	*Michal Suk*	ZŠ Svisle, Přerov, Přerov I - Mě	–	4	0	1	1	3	3	**12**	**12**
31.–33.	*Mária Volmanová*	ZŠ Kollárova, Jihlava	–	2	5	–	–	5	–	**12**	**12**
34.–35.	*Dita Chabičovská*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	4	5	2	–	–	–	**11**	**11**
34.–35.	*Alice Janáčková*	G Chotěboř	–	3	–	–	–	3	5	**11**	**11**
36.	*Eva Jurčeková*	ZŠ sv. Voršily Praha 1	–	4	5	–	–	–	–	**9**	**9**
37.	*Klára Šenkeříková*	ZŠ a MŠ Nedašov	–	4	–	–	–	3	–	**7**	**7**
38.–39.	*Petr Čerych*	ZŠ Sobotka	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**4**
38.–39.	*Roman Varfolomieiev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10	–	3	–	–	–	1	–	**4**	**4**
40.	*Jakub Ucháč*	ZŠ Vrané n. Vltavou	–	3	–	–	0	–	–	**3**	**3**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.