výfuk

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

jsme velice potěšeni, že do Výfuku se letos zaregistrovalo téměř 150 řešitelů, z nichž většina se zapojila do řešení první série. Na hodnocení vašich řešení pilně pracujeme, takže již brzo se na našem webu objeví první výsledková listina. Opravená řešení spolu s tištěnou podobou vzorových řešení vám zašleme v další obálce spolu se zadáním třetí série.

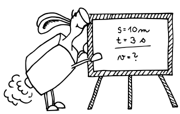
V této brožurce tedy najdete zadání druhé série úkolů a text Výfučtení, které pojednává o užitečných fyzikálních tricích, které často výrazně zjednodušují řešení některých problémů.

Den otevřených dveří MFF UK

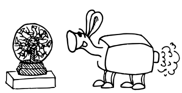
Dne 26. 11. se uskuteční den otevřených dveří naší fakulty, kde se můžete dovědět mnoho o tom, jak to na Matfyzu chodí. V rámci dopoledního programu v prostorách Kongresového centra Praha bude mít své zastoupení i Výfuk. Odpolední program bude probíhat již přímo v nedalekých budovách fakulty, kde se můžete formou exkurzí podívat na jednotlivá pracoviště či se zúčastnit zajímavých přednášek. Více informací naleznete na fakultním webu.[1]

Hodně zdaru v řešení vám přejí

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání II. série



Termín doručení: 7. 12. 2015 20.00

Úloha II.1 ... Okno ❻ ❼ — 5 bodů

Jednou se organizátoři sešli v osvětlené místnosti a povídali si dlouho do noci. Mezi řečí si David položil otázku, proč nevidí ven skrz okno, zatímco kdyby stál venku, tak dovnitř vidí

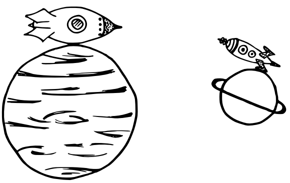
[1] `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`

krásně. Hned se zeptal ostatních, jak to funguje. Po chvíli si všichni uvědomili, proč tomu tak je. Přijdete na to i vy?

Úloha II.2 ... Bóje ❻ ❼ ❽ ❾ 4 body

Andřejce se stýskalo po létě, a tak se jela slunit k moři. Při celodenním ležení na pláži si všimla, že bóje označující konec prostoru pro plavání je při odlivu vlnami posunuta směrem k pláži, kam až jí úvaz dovolí. Celkem to je o 9 m oproti poloze při přílivu, kdy je úvaz právě tak dlouhý, aby bóje byla ještě na hladině. Jak dlouhý úvaz je, pokud je na Andřejčině pláži rozdíl hladiny při přílivu a odlivu 5 m?

Úloha II.3 ... Dobývání planet ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Píše se rok 3 333 a výzkum vzdálených planet je v plném proudu. Přednedávnem dvě kosmické lodě úspěšně přistály na dvou malých planetách, označených α a β. Obě lodě byly vybaveny citlivými senzory, které měřily základní parametry planetek. Senzory zjistily, že na planetě α trvá den šestkrát déle než na planetě β a dále zjistily, že poloměr planety α je oproti poloměru planety β čtyřnásobný.

Po chvilce měření se ale oba senzory porouchaly, a to kvůli přílišné odstředivé síle, která na ně působila. Zjistěte, na který ze senzorů působila větší odstředivá síla, víte-li, že senzor měřící na planetě α vážil $m_\alpha = 9\,\mathrm{kg}$, zatímco senzor na druhé planetě měl hmotnost $m_\beta = 1\,\mathrm{kg}$. Pro odstředivou sílu na povrchu libovolné planety platí vztah

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

kde m je hmotnost uvažovaného senzoru, v je obvodová rychlost planety daná její rotací a r je poloměr dané planety.

Úloha II.4 ... Hrátky s přepínači ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Petr se doma nudil až do chvíle, než vytáhl ze skříně tátovu krabici s elektrickými součástkami. Po chvíli prohrabování se krabicí našel na jejím dně starý ústřižek z časopisu pro mladé kutily s následujícím problémem: Máme k dispozici dva přepínače, červenou a zelenou žárovku, ideální zdroj konstantního napětí[2] a ideální vodiče.[3] Jak se dá sestavit obvod, ve kterém při zapnutí obou přepínačů svítí obě žárovky, při přepnutí libovolného z nich zhasne zelená žárovka a při přepnutí i druhého přepínače nesvítí ani jedna ze žárovek? Ústřižek bohužel neobsahuje řešení a Petr si s ním neví rady. Pomůžete mu?

[2]Ideální zdroj napětí dodává do obvodu konstantní napětí nezávisle na zátěži (součástkách, které jsou do obvodu zapojeny).

[3]Ideální vodiče mají nulový elektrický odpor.

Úloha II.5 ... James Bond ❻ ❼ ❽ ❾ ✰ 8 bodů

Agent 007 byl zase jednou vyslán na mimořádně riskantní záchrannou misi. Tentokrát jde ale o hodně – jiný agent britské tajné služby MI6 je vězněn ve zločineckém doupěti a jde mu o život! Agent je pevně připoután k židli na dně obdélníkového bazénu s rozměry $a = 10\,\mathrm{m}$ a $b = 5\,\mathrm{m}$, přičemž jeho obličej je ve výšce přesně $h = 1\,\mathrm{m}$ nade dnem bazénu.

V momentě, kdy se James Bond plížil potichu doupětem a byl od svého kolegy vzdálen pouze $s = 500\,\mathrm{m}$, byl odhalen elektrickým senzorem. Zločinec hlídající uvězněného agenta se tedy rozhodl konat a otočil kohoutem, který do bazénu napouští vodu průtokem $Q = 50\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$, a v té samé chvíli se vydal na okružní pochůzku doupětem. Tato pochůzka trvá zločinci přesně dobu $t_1 = 2\,\mathrm{min}$, po kterých se vrátí a čas $t_2 = 1\,\mathrm{min}$ zůstane u agenta. Pak odejde na další stejnou pochůzku, zpět k agentovi, a tak dále.

Na to, aby James Bond mohl kolegu osvobodit, musí přijít dostatečně brzy před tím, než se voda dostane na úroveň obličeje jeho kolegy. Rovněž ale nemůže přijít tehdy, kdy je u bazénu zločinec a ani $\tau = 25\,\mathrm{s}$ před příchodem zločince – tolik času totiž zabere vysvobození spoutaného agenta.

(a) Spočtěte, kolik času zbývá uvězněnému agentovi, než voda dosáhne na úroveň jeho obličeje.
(b) Zjistěte, za jakou nejkratší dobu James Bond dojde k bazénu, pokud se nedokáže plížit rychleji než rychlostí $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
(c) Najděte intervaly (rozsahy) časů, ve kterých se může James Bond doplížit k bazénu a kolegu osvobodit.
(d) K intervalům času určete příslušné intervaly rychlostí, kterými se může James Bond plížit doupětem, aby byla mise úspěšná.

Úloha II.E ... Ledová ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Poněvadž je zima přede dveřmi, je potřeba se na ni připravit. Kupříkladu tak, že zjistíme, jak rychle taje led různých rozměrů. První část této úlohy sestává z výroby ledových vzorků. Nejdříve si z kartonu vystřihněte a poskládejte tři „nádoby“ ve tvaru krychliček s hranami dlouhými 5 cm, 7,5 cm a 10 cm. Pak si vezměte potravinovou fólii (nebo sáček) a vlepte ji na vnitřní strany papírových forem, naplňte je asi do 9/10 vodou a nechte je zmrazit. Měli byste tak získat tři krásné ledové kostky.

Kostky posléze vytáhněte z forem, odstraňte z nich fólie a položte je na rovnou plochu (například na tác). Vaší úlohou bude změřit čas, za který kostky zcela roztají. Kolikrát delší bude čas, za který roztají větší kostky v porovnaní s tou nejmenší? Popište, jak se tento poměr liší od

(a) poměru délek stran,
(b) poměru povrchů,
(c) poměru objemů.

Oceníme, když svoje experimentální snažení doplníte fotografiemi.

Úloha II.C ... Stěhování ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

Když se Tom přestěhoval do Prahy a zařizoval si byt, měl v pokoji koberec i lino. Na koberec si postavil skříň tak, že střed skříně byl vzdálen 1 m od rozhraní lina a koberce. Jenže se mu již na koberec nevešel stůl, a tak se rozhodl skříň přesunout na lino, a to tak, že na konci je střed skříně od rozhraní koberec-lino stejně daleko jako na začátku. Dále víme, že Tomova skříň je široká 1 m, váží 40 kg a koeficient smykového tření koberce je $f_\mathrm{k} = 0{,}5$, lina $f_\mathrm{l} = 0{,}2$.

(a) Jakou silou F_1 Tom musí na skříň působit, pokud ji posouvá po koberci?
(b) Jakou silou F_2 Tom musí působit, pokud skříň je již na linu?
(c) Jakou silou $F_{1/2}$ Tom působil, když byla půlka skříně již na linu, ale druhá půlka ještě stále na koberci?
(d) Nakreslete graf závislosti síly na vzdálenosti, kterou skříň již urazila.
(e) Jakou práci Tom při stěhování skříně vykonal?

Třecí síla se spočte jako $F_\mathrm{t} = mgf$. Skříň považujte za homogenní těleso.

Výfučtení: Triky v řešení fyzikálních úkolů

Úvod

Ve fyzice občas narazíme na problémy, jejichž řešení je mnohdy komplikované a zdlouhavé. Avšak v určitých případech se tyto složité problémy dají vyřešit velmi jednoduše a elegantně za předpokladu, že využijeme nějaký trik. Takovýchto triků existuje nepřeberné množství, z nichž některé si ukážeme v tomto Výfučtení.

Obecné řešení

Velmi důležitá jsou tzv. *obecná řešení*, kde místo čísel využíváme pouze abstraktní označení veličin písmeny. Na rozdíl od řešení s konkrétními hodnotami nedochází k zaokrouhlovacím nepřesnostem a častokrát se na konci dojde i k výsledku ve zjednodušeném a elegantním tvaru. Obecné řešení je rovnice, která obsahuje na jedné straně neznámou veličinu a na druhé straně pouze známé veličiny nebo konstanty. Platí, že příklady se vždy snažíme vyřešit nejprve obecně (algebraicky), tudíž i s neznalostí číselných hodnot v zadání.

Nicméně, při obecném řešení postupujeme úplně stejně, jako kdyby v rovnicích byla čísla. Jediný rozdíl je v tom, že všechny matematické operace provádíme s písmeny. Takže z rovnic můžeme například vyjadřovat neznámé nebo je dosazovat do jiných rovnic. Jak již bylo zmíněno, největší výhodou tohoto postupu je přesnost. Další nespornou výhodou je fakt, že při obecném řešení často dojdete ke zjednodušení výsledného výrazu, něco se nám např. „pokrátí“ – v případě, že se jedná o nějakou konstantu (např. π), opět zvyšujeme přesnost výsledku. A v případě, že se jedná o proměnnou, můžeme zjistit, že jsme schopni úlohu vyřešit i přes to, že neznáme všechny veličiny, které se objevovaly v mezivýsledcích. Tyto výhody si ukážeme na příkladu.

První příklad

Vypočítejte s přesností na jedno desetinné místo, jakou hmotnost má dřevěná koule o hustotě $\varrho = 800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, *jestliže její povrch je* $S = 100\,\mathrm{dm^2}$.

Nejdříve počítejme postupně. Spočtěme poloměr koule

$$S = 4\pi r^2\,, \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{dm^2}}{4\cdot 3{,}14}} \doteq 2{,}8\,\mathrm{dm}\,.$$

Nyní určíme objem této koule

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot (2{,}8\,\mathrm{dm})^3 \doteq 91{,}9\,\mathrm{dm^3}$$

a nyní spočítáme její hmotnost

$$m = \varrho V = 91{,}9\,\mathrm{dm}^3 \cdot 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \doteq 73{,}5\,\mathrm{kg}\,.$$

Naopak, budeme-li počítat obecně, postup bude následující:

$$m = \varrho V = \varrho \frac{4}{3}\pi r^3 = \varrho \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 ,$$

$$m = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \left(\sqrt{\frac{100\,\mathrm{dm}^2}{4 \cdot 3{,}14}}\right)^3 \doteq 75{,}2\,\mathrm{kg}\,.$$

Vidíme, že rozdíl mezi postupem s mezivýpočty a obecným řešením je až 1,7 kg. A věřte tomu, že mnohdy bývá rozdíl ještě větší.

Rozměrová zkouška

Pokud řešíme příklady obecně, může se nám stát, že děláme mnoho poměrně komplikovaných úprav, kde hrozí, že při nich uděláme chybu. Proto je velmi výhodné si získané výsledky průběžně kontrolovat. Avšak kontrola každého kroku by byla velmi zdlouhavá. Na užitečnou a rychlou kontrolu, zda nemáme v postupu chybu, poslouží tzv. rozměrová zkouška. To není nic jiného, než že za všechny veličiny ve vzorci dosadíme jejich *základní jednotky SI* a pomocí úprav se snažíme zjistit, jakou jednotku má výsledná veličina, kterou se snažíme spočítat.

Pokud nám vyšla jednotka, kterou očekáváme (například u hmotnosti kilogramy), máme téměř vyhráno.[4] Jenom pozor, rozměrová zkouška nám pouze napoví, zda sedí jednotky. Pokud však někde v úpravách zapomeneme nějakou *bezrozměrnou* konstantu (např. π), tuto chybu neodhalíme. Jedno je ale jisté: pokud nám zkouška nedala očekávané jednotky (např. u hmotnosti nám vyšlo $\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$), rozhodně máme v úpravách chybu.

Rozměrovou zkoušku v praxi si ukážeme na dalším příkladu.

Druhý příklad

Paťo počítal přeměnu potenciální energie na kinetickou a došel k rovnici

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m}}\,.$$

Je jeho vzoreček správný?

[4] Musíme si dát pozor, že některé jednotky se kterými běžně počítáme, například newtony u síly, nejsou základní jednotky SI. Tedy pokud děláme rozměrovou zkoušku pro sílu a vyjde nám, že síla má jednotku $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$, neznamená to, že máme ve vzorci chybu, protože pro newton z definice platí $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}} = \mathrm{N}$.

Provedeme-li rozměrovou analýzu Paťova vzorce, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}}\,,\\
\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{kg{\cdot}m^2}}{\mathrm{kg{\cdot}s^2}}}\,,\\
\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}}\,,\\
\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že Paťův vzoreček je alespoň po rozměrové stránce správně.

Zavádění vlastních veličin

Dalším trikem, který si ukážeme, je zavádění „vlastních“ veličin. Občas se může stát, že při výpočtu potřebujeme počítat s nějakou veličinou, která reprezentuje něco, co neznáme, co není v zadání a co víc, občas se může stát, že jsme o takové veličině ani nikdy před tím neslyšeli! Nicméně pokud se tohoto nezalekneme a budeme i přesto s takovými veličinami počítat, zjistíme, že jednak se náš postup buď velmi zjednodušil, nebo že se nám povedlo vypočítat příklad, který bychom jinak vypočítat nezvládli. Možná to vypadá děsivě, ale není to nic těžkého. Až si zavádění vlastních veličin párkrát zkusíte, nebude vám to připadat vůbec zvláštní. Pojďme si tento trik opět ukázat na příkladech.

Třetí příklad

Auto jede čtvrtinu dráhy rychlostí v_1, po zbytek dráhy zpomalí a jede rychlostí v_2. Určete průměrnou rychlost automobilu.

Nejprve si vzpomeneme, že průměrná rychlost $\overline{v}$ se vypočítá jako celková dráha s uražená za celkový čas t. Ze zadání si tudíž musíme uvědomit, co je naše celková dráha a jak se vypočte čas. Celková dráha je součet drah prvního a druhého úseku. Můžeme tedy zapsat (a vyřešit) rovnici

$$
s = s_1 + s_2 = \frac{1}{4}s + s_2\,, \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{3}{4}s\,.
$$

Právě jsme si zavedli celkovou dráhu s, o které se jednak nehovoří v zadání, ba co víc, ani ji nedokážeme spočítat. Ničeho se nelekejme a počítejme s ní dál.

Jednotlivé časy na úsecích vypočteme z klasického vzorce pro rovnoměrný pohyb: čas je podíl ujeté dráhy a rychlosti:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{1}{4}s}{v_1} = \frac{s}{4v_1}\,,\\
t_2 &= \frac{s_2}{v_2} = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2} = \frac{3s}{4v_2}\,.
\end{aligned}
$$

Celkový čas pohybu je pak jednoduše $t = t_1 + t_2$.

Nyní stačí jednotlivé neznámé dosadit do prvotní myšlenky $\overline{v} = s/t$:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{4v_1} + \dfrac{3s}{4v_2}} = \frac{s}{s\left(\dfrac{1}{4v_1} + \dfrac{3}{4v_2}\right)} = \frac{4v_1v_2}{v_2 + 3v_1}\,.$$

Vidíme, že námi zavedenou dráhu s nakonec nebylo ve výsledku potřeba znát, neboť se pokrátila. A takto to dopadá s většinou námi zavedených veličin: pomohou nám pohodlně provádět mezikroky a ve výsledku se pokrátí.[5]

Plocha pod grafem

Zaslechli jste někdy vaše starší spolužáky či sourozence mluvit o integrálech a zajímalo vás, co to je? Velmi zjednodušeně vás teď naučíme trik, který má s integrály mnoho společného, ale jeho provedení je velmi snadné. Integrály jsou jedny z nejpoužívanějších nástrojů ve fyzice. I přes to, že mohou být velmi složité, jejich základní princip je, že počítají „velikost plochy pod grafem“.

A přesně toho můžeme využít i my v případech, kdy bychom se k výsledku jiným způsobem dostávali jen velmi obtížně. Pokud počítáme nějakou veličinu jako součin dvou jiných veličin (například u práce se jedná o součin síly a dráhy), není problém spočítat výsledek, pokud jsou obě konstantní. Působíme-li silou $F = 5\,\mathrm{N}$ po dráze $s = 5\,\mathrm{m}$, vykonaná práce je $W = Fs = 5\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{J}$.

To jsme si neukázali nic nového, že? Ale co když se jedna z veličin bude měnit v závislosti na té druhé? Pokud známe jejich vzájemnou závislost, můžeme je zakreslit do grafu. Například je-li síla závislá na vzdálenosti, z tohoto grafu bude zřejmé, jak velká síla v daných bodech působila. Pak námi hledaný výsledek, který se spočte jako součin těchto dvou veličin, není nic jiného, než plocha pod křivkou v tomto grafu.

Tento trik je poněkud složitější na představivost, pojďme si ho tedy ukázat na příkladu.

Čtvrtý příklad

Auto jede rychlostí $v_0 = 72\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ až do okamžiku, kdy začne brzdit. Od tohoto okamžiku se rychlost auta snižuje rovnoměrně (odborně řečeno lineárně klesá*) až do okamžiku, kdy auto zastaví. Pokud auto brzdilo $t = 10\,\mathrm{s}$, jakou dráhu urazilo od okamžiku, kdy řidič začal brzdit?*

Jelikož víme, že dráha se vypočítá jako $s = vt$ a že rychlost auta se zde mění v čase, nakreslíme si graf rychlosti v závislosti na čase. Na svislou osu budeme vynášet rychlost a na vodorovnou osu čas. Ale pozor na jednotky – hodnoty je potřeba vynášet v základních jednotkách SI!

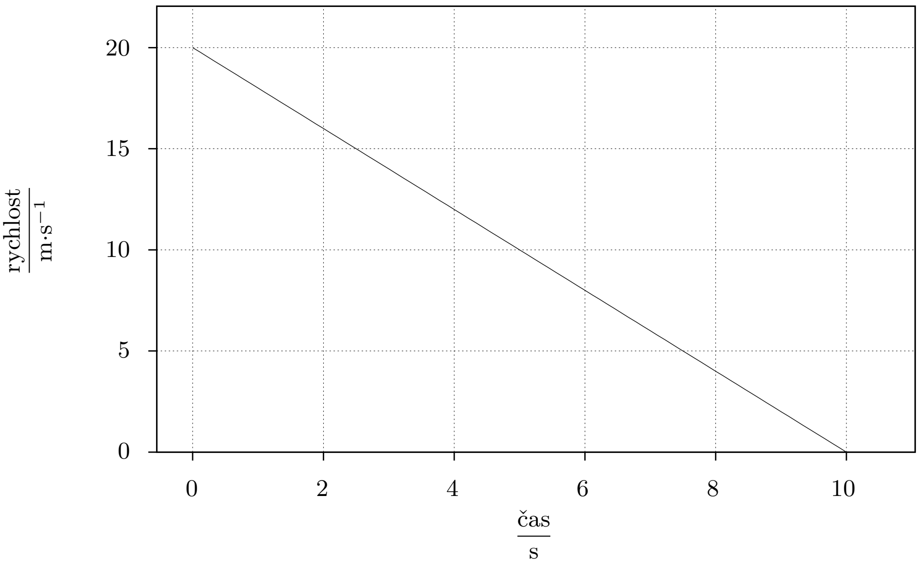
Nyní již můžeme spočítat dráhu, kterou auto urazilo jako velikost plochy, která je pod grafem. Tato plocha je vlastně pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami v_0 a t, takže pro jeho obsah můžeme napsat:

$$s = \frac{v_0 t}{2} = \frac{20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 10\,\mathrm{s}}{2} = 100\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme tedy, že auto po dobu brzdění urazilo dráhu $s = 100\,\mathrm{m}$.[6]

[5] Tento princip se využíval i ve 3. sérii 4. ročníku v úloze číslo 4 – Sněhuláci. V našem archivu na webové adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/r4/s3` můžete nalézt jak zadání, tak i řešení, takže to je skvělý příklad pro případné procvičení doma.

[6] Pokud již znáte zrychlení, velmi jednoduše si můžete ověřit, že vzoreček, ke kterému jsme došli z obsahu pod křivkou v grafu, je stejný, jako když na tuto úlohu půjdeme přes zrychlení.



Obr. 1: Závislost rychlosti auta na čase

Závěr

V tomto Výfučtení jsme si ukázali několik základních velmi užitečných triků, které lze využít při řešení fyzikálních problémů. Pevně věříme, že vám všechny tyto triky usnadní řešení spousty úloh. Čím víc se budete fyzice věnovat, tím více podobných triků poznáte a fyzika pro vás už bude jen snazší a snazší. Mnoho zdaru při řešení!

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.