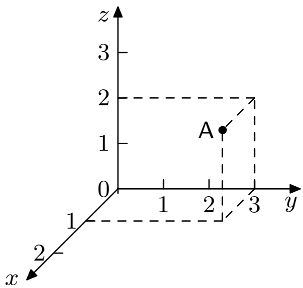
Výfučtení: Vektory

Souřadné systémy

Dříve než začneme naše povídání o vektorech, řekneme si pár slov o souřadných systémech. Ty zavádíme při řešení problémů, u kterých nás zajímá rozmístění různých objektů v prostoru. Pomocí souřadnic (čísel) chceme jednoznačně popsat polohu každého bodu v prostoru vzhledem k nějakému počátku. Podle potřeby se používá mnoho různých druhů souřadnic. Pro nás budou nejnázornější tzv. kartézské.

Kartézské souřadnice jsou tvořeny dvěma ve 2D, resp. třemi ve 3D, na sebe navzájem kolmými osami protínajícími se v jediném bodě, který nazýváme počátek souřadnic. Ve dvou rozměrech obvykle značíme vodorovnou osu x a svislou y. Ve 3D jsou standardně osy x a y vodorovné a na ně je kolmá svislá osa z.

Každý bod v prostoru nyní můžeme popsat pomocí dvou, resp. tří souřadnic, které zapisujeme do hranatých závorek v pořadí $[x, y, z]$. Hodnoty jednotlivých souřadnic nám říkají, o kolik se z počátku musíme posunout ve směru jednotlivých os, abychom se dostali do daného bodu – tedy nejprve se posuneme o hodnotu první souřadnice ve směru osy x, potom o hodnotu druhé ve směru osy y a na závěr o hodnotu třetí ve směru osy z (viz obrázek 1).

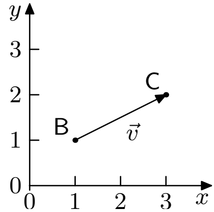


Obr. 1: Bod A se souřadnicemi $[1, 3, 2]$.

Vektory

Vektory se od obyčejných čísel, tzv. skalárů, liší tím, že mají kromě velikosti také orientaci (směr). V kartézské soustavě si můžeme vektor představit jako čárku se šipkou, vedoucí od jednoho bodu k druhému. Délka čárky určuje jeho velikost, naklonění a šipka směr a orientaci.

Nyní si na jednoduchém příkladu vysvětlíme, jak můžeme vektory zapisovat. Mějme vektor $\vec{v}$ v dvourozměrném prostoru popsaném dvěma kartézskými osami. Začátek vektoru je v bodě $\mathsf{B} = [1, 1]$ a konec v $\mathsf{C} = [3, 2]$ (viz. obrázek 2). Vektor zapisujeme pomocí složek, kde nám každá složka říká, o kolik se musíme posunout ve směru jednotlivých os, abychom se dostali ze začátku vektoru na jeho konec. V našem případě musíme udělat dva kroky doprava (tedy v kladném směru osy x) a jeden krok nahoru (tedy v kladném směru osy y). Jinak řečeno vektor zapisujeme jako rozdíl souřadnic jeho konce a začátku. Náš vektor zapíšeme jako $\vec{v} = (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$.



Obr. 2: Vektor jako posunutí z bodu B do bodu C.

Vektory se značí šipkou nad písmenem (v tištěném textu mohou být též vektory napsány tučně) a jeho složky se zapisují do kulatých závorek opět v pořadí (x, y). Zde jsou ale x a y chápány jako posunutí ve směru osy x a y. Chceme-li zapsat složky samostatně, značíme je stejným písmenem jako vektor a dáme jim index podle odpovídající osy, např. zde $v_x = 2$ a $v_y = 1$. Ve 3D bychom postupovali stejně, jen se z-tovou složkou navíc.

U takto zapsaných vektorů můžeme snadno určit jejich velikost (délku čárky) a to jednoduchou aplikací Pythagorovy věty. Velikost našeho vektoru $\vec{v}$ označíme v (velikost vektoru se značí stejným písmenem jako vektor, jen psáno bez šipky, případně netučně) a spočteme ji jako

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,.$$

Ve třech rozměrech bychom postupovali stejně, jen s použitím třírozměrné verze Pythagorovy věty, tedy $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Operace s vektory

Máme-li vektorů více, můžeme je navzájem sčítat, případně odčítat. Součtem dvou vektorů je opět vektor a sčítání probíhá po složkách, tedy sečtením x-ových složek původních vektorů dostaneme x-ovou složku výsledného vektoru. Budeme-li například sčítat vektory $\vec{u} = (u_x, u_y) = (3, 1)$ s vektorem $\vec{v} = (v_x, v_y) = (1, 2)$, získáme vektor

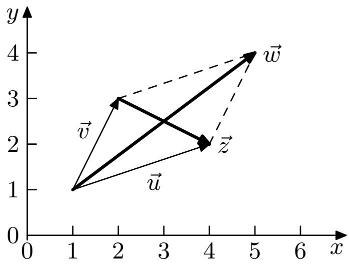
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y) = (4, 3)\,.$$

Při odčítání vektorů postupujeme stejně, tedy

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y) = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)\,.$$

Graficky můžeme vektory sčítat pomocí tzv. vektorového rovnoběžníku, kdy začátky obou vektorů umístíme do stejného bodu a dokreslíme rovnoběžník, jak je znázorněno na obrázku 3. Úhlopříčka potom představuje výsledný vektor. Odčítání si můžeme představit jako přičítání vektoru opačného. Opačný vektor získáme, když změníme znaménko u všech jeho složek (nakreslíme šipku na druhý konec čárky).

Kromě sčítání a odčítání můžeme vektory také násobit, a to hned třemi způsoby. Začneme tím nejjednodušším a to násobením vektoru skalárem, neboli číslem. To se provádí tak, že všechny složky vektoru vynásobíme daným číslem. Chceme-li například získat vektor, který je třikrát větší než vektor $\vec{u}$, musíme všechny složky vektoru $\vec{u}$ vynásobit trojkou, tedy $3\vec{u} = (3u_x, 3u_y, 3u_z)$.



Obr. 3: Vektorový rovnoběžník.

U násobení dvou vektorů rozlišujeme mezi tzv. skalárním součinem, kdy je výsledkem číslo, a vektorovým součinem, jehož výsledkem je vektor. V tomto textu se budeme zabývat pouze součinem skalárním. Ten se řídí jednoduchým pravidlem – nejprve vynásobíme stejné složky, tedy x-ové spolu, y-ové spolu, případně z-ové spolu a výsledky potom sečteme. Budeme-li násobit $\vec{v} = (1, -2)$ a $\vec{u} = (2, 3)$ dostaneme

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 2 - 6 = -4\,.$$

Využití vektorů ve fyzice

V tuto chvíli již o vektorech víme dost, abychom si mohli říci o jejich využití ve fyzice. Mnozí z vás již jistě ví, že fyzikální veličiny se dělí na skalární a vektorové. Jak nám název napovídá, skalární veličiny můžeme vyjádřit skalárem, tedy číslem, a patří mezi ně například hmotnost, teplota, čas a spousta dalších. Naopak vektorové veličiny, jako třeba rychlost, síla či poloha, zapisujeme pomocí vektorů a mají kromě velikosti také směr (jakým směrem se pohybujeme danou rychlostí, kam působí daná síla či kterým směrem se nacházíme od výchozího bodu).

Jednotlivé složky vektoru potom představují velikost dané veličiny v jednotlivých směrech. Celková velikost je samozřejmě daná velikostí vektoru. Má-li například vrtulník rychlost $v_x = 24\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_y = 7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, představuje hodnota v_x rychlost v horizontálním směru a hodnota v_y rychlost ve směru vertikálním, tedy rychlost stoupání či klesání. Celkovou velikost rychlosti vrtulníku získáme vypočtením velikost vektoru $\vec{v} = (24, 7)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je $v = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (zkuste si).

Ve fyzice ovšem budeme muset mnohem častěji postupovat obráceně – tedy budeme znát velikost dané veličiny a její směr vyjádřený úhlem φ mezi vektorem a jednou ze souřadných os a bude nás zajímat velikost jednotlivých složek. V tomto případě nám velmi pomůžou goniometrické funkce, konkrétně sinus a kosinus. V případě, že jste o nich nikdy neslyšeli, můžete si přečíst text staršího Výfučtení, které je věnováno právě jim.[1]

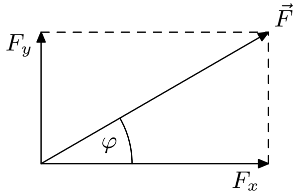
Na obrázku 4 vidíme sílu o velikosti $F = 10\,\mathrm{N}$, která svírá s osou x úhel $\varphi = 30^\circ$ a chceme zjistit složky této síly F_x a F_y. Víme (nebo jsme si přečetli), že funkce sinus je definovaná jako délka protilehlé strany ku přeponě. V našem případě to je $\sin\varphi = F/F_y$, tedy

$$F_y = F \sin\varphi = 10\,\mathrm{N} \cdot \sin 30^\circ = 5\,\mathrm{N}\,.$$

[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_4.pdf`

Podobně pomocí funkce kosinus, která je definovaná jako poměr délky přilehlé strany a přepony, určíme x-ovou složku síly

$$F_x = F\cos\varphi = 10\,\mathrm{N}\cdot\cos 30^\circ = 5/\sqrt{3}\,\mathrm{N} \doteq 8{,}7\,\mathrm{N}\,.$$



Obr. 4: Rozklad síly $\vec{F}$ na vodorovnou a svislou složku.

Na závěr by nás mohlo zajímat, jaký úhel ϑ spolu svírají dva vektory. K tomu nám poslouží skalární součin, neboť platí vztah

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u\ v\ \ \cos\vartheta\,.$$

Z tohoto vztahu můžeme rovnou vyjádřit hledaný úhel

$$\vartheta = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{uv}\,.$$

Z výše uvedených vztahů můžeme vypozorovat ještě jeden užitečný poznatek. Skalární součin dvou rovnoběžných vektorů je roven součinu jejich velikostí a naopak skalární součin dvou kolmých vektorů je vždy nulový.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.